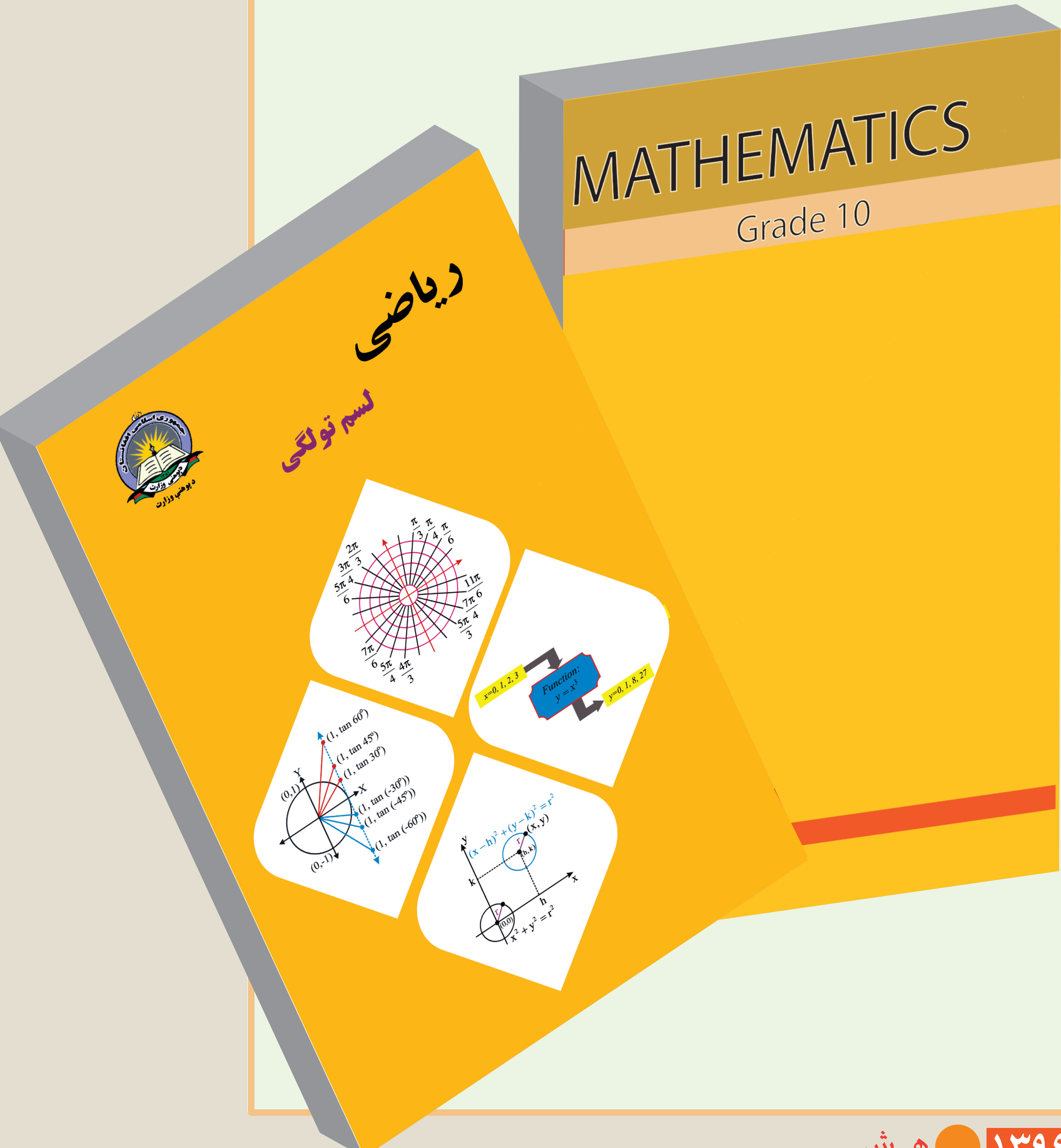
د پوهنې وزارت

د ریاضي د ښوونکي لارښوود

۱۰ ټولګی



۱۳۹۹ هـ.ش



ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هېواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم

د پوهنې وزارت

د ریاضي د تدریس لارښود

لسم ټولګی

د چاپ کال: 1399 هـ.ش

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: د ریاضي د تدریس لارښود

مؤلفین: د تعلیمي نصاب د ریاضي دیپارتمنت د درسي کتابونو مؤلفین

اډیټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډیټ دیپارتمنت غړي

ټولګی: لسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف لوی ریاست

خپروونکي: د پوهنې وزارت د اړیکو او عامه پوهاوي ریاست

د چاپ کال: 1399 هجري شمسي

برېښنالیک پته: curriculum@moe.gov.af

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند راښښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږګوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو او د ښوونکو د تدریس لارښود محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، د دې لارښود څخه په ګټې اخیستنې سره، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤلیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې لارښود کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپیڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

فهرست

ښاغلی ښوونکیه!

د ریاضي د ښوونکی لارښود کتاب، چې د فعالې زده کړې په اساس تالیف شوی، یوازې د ښوونکي د ګټې اخیستنې لپاره دی، د زده کوونکو په لاس کې دې نه لوېږي.

د ښې او اغیزمنې زده کړې او تدریس لپاره ښایي دا لاندې ټکي په پام کی ونیول شي:

1) ټولګي ته د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو، لکه (د سلام او احوال پوښتنه، د ټولګي تنظیم، حاضرۍ اخېستلو، د کورنۍ دندې له لیدلو، د تېر لوست ارزونې او د امکان په صورت کې د تېر او راتلونکي لوست ترمنځ د اړیکې له پیدا کولو وروسته) په نوي درس پیل وکړئ.

2) درسي مرستندویه مواد (محیطي مواد) چې په لارښود کې یې یادونه شوې له مخکې یې ټولګي ته راوړئ.

3) په دې لارښود کې د فعالې زده کړې له میتودونو څخه کار اخیستل شوی. سربېره له هغو ګټورو میتودونو څخه هم کار اخېستلای شئ چې د خپلې تجربې له مخې مو کارولي او تجربه کړي دي.

4) په دغه کتاب کې د تدریس پړاوونه په علمي شکل په پام کې نیول شوي دي. که په سمه توګه عملي شي په یقین سره چې ستاسو تدریس به ګټور واقع شي.

5) د امکان تر حده په موضوع پورې اړوند اضافي معلومات چمتو شوي دي. دا معلومات په تدریس کې له تاسو سره مرسته کوي.

6) یو 45 دقیقه‌یي درسي ساعت داسې وېشل شوی چې په ټاکل شوي وخت کې تدریس شي او درس پای ته ورسېږي. که په هغه ټاکل شوي وخت کې ونه شئ کړای هغه عملي کړئ، نو اختیار لرئ چې هغه وختونه لنډ یا زیات کړئ د بېلګې په ډول: د درس د جریان فعالیت د مؤلفانو له خوا 28 دقیقې ټاکل شوی دی. که ستاسو له نظره هغه زیات وي، کولای شئ د بېلګې په توګه هغه 20 دقیقې کړئ او پاتې نورې اته دقیقې په نورو فعالیتونو ورزیاتې کړئ.

7) د تدریس په بهیر او د فعالیتونو په سرته رسولو کې ټولو زده‌کوونکو ته برابره برخه ورکړئ.

8) تمرینونه باید په ټولګي کې د زده کوونکو په ګډون حل شي.

9) که چیرې د یوه تمرین پوښتنې زیاتې وي، یو شمېر دې د درس د پیاوړتیا په پړاو کې د زده‌کوونکو په ونډې اخیستنې سره په ټولګي کې حل شي او پاتې نورې دې زده‌کوونکو ته کورنۍ دنده ورکړل شي.

10) د هر څپرکي په پای کې اړوند تمرین ته ځای ورکړ شوی دی. کوښښ دې وشي چې د سختو او اسانه پوښتنو په پام کې نیولو سره د څپرکي پوښتنې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ، په دې ډول چې په لومړي څپرکي د پوښتنو د حل لپاره نهه درسي ساعتونه، د دویم څپرکي د پوښتنو د حل لپاره دوه درسي ساعتونه، د دریم او څلورم څپروکو د پوښتنو د هر یو د حل لپاره لس درسي ساعتونه، د پنځم څپرکي د پوښتنو د حل لپاره اته درسي ساعتونه، د شپږم څپرکي د پوښتنو د حل لپاره پنځه درسي ساعتونه، د اووم څپرکي د پوښتنو د حل لپاره لس درسي ساعتونه، د اتم څپرکي د پوښتنو د حل لپاره څلور درسي ساعتونه، د نهم څپرکي د پوښتنو د حل لپاره درې درسي ساعتونه او د هر څپرکي د لنډیز لپاره یو درسي ساعت په پام کې ونیسئ.

11) د ریاضي په درسي کتاب کې امکان لري چې ځینې طباعتي اشتباهګانې موجود وي او د تجدید نظر تر وخته نشي کیدای اصلاح شي، خو د ریاضي د لارښود د لیکلو په وخت کې په پام کې نیول شوي دي، محترم ښوونکی کولای شي چې د لارښود له مخې یې اصلاح کړي.

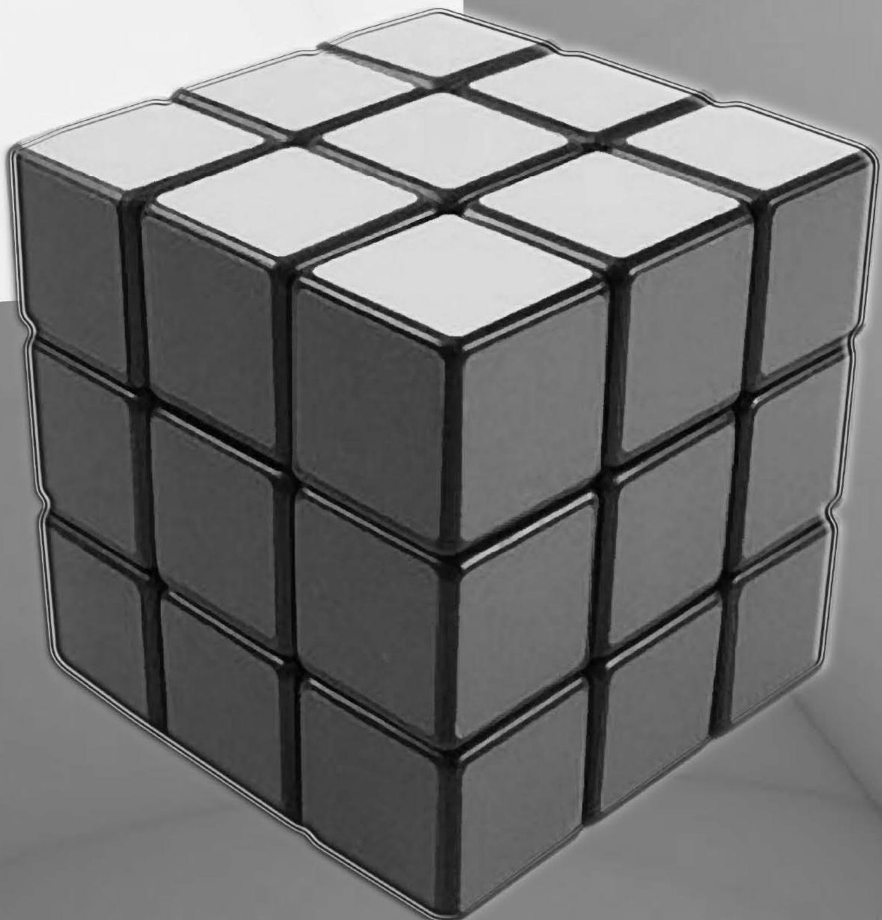
لومړی څپرکی

پولینوم

پولینوم(Polynome)

یا (Polynomial)

$$(3x^2+5x+2)+(5x+6)$$
$$=3x^2+5x+2+5x+6$$
$$=3x^2+5x+5x+6+2$$
$$=3x^2+10x+8$$





عنوان: الجبري افادې

د درسي کتاب (3) **مخ**   **د لوست وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای زده کوونکي بايد: • متحول، ثابت او الجبري افادې وپيژني. • د الجبري افادو ډولونه وپيژني او توپير يې وکړای شي. • پولينوم تعريف کړای شي او په الجبري افادو کې د پولينوم، ناطقې او غير ناطقې الجبري افادې توپير وکړای شي او د رياضي د مسايلو په حلولو کې ترې استفاده وکړای شي او اهميت يې درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنو فعاليتونو (سلام اچول، حال احوال پوښتنه،حاضري اخيستل، د ټولګي نظم، د نوی لوست اړيکه له تېر لوست سره) څخه وروسته د انګيزې د پيداکولو لپاره ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. چې په دربو راکړل شوو الجبري افادوکې ناطقې او غير ناطقې الجبري افادې وښودلای شي. که زده کوونکو ځواب ونه شو ويلای د مثالونو له حلولو څخه وروسته يې ځواب ويلای شي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې:**

محترم ښوونکي دې متحول، ثابت او الجبري افاده تعريف او د هر يو مثالونه دې ورکړي. د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره دې پولينوم تعريف او پر تخته دې لومړی مثال حل شي ا و د پولينوم عمومي شکل دې توضيح شي.

بيا دې زده کوونکي په مناسبو ګروپونو کې ددې لوست فعاليت سرته ورسوي، ښوونکي دې ځارنه، اصلاحات، لارښوونه او مرسته وکړي. يو زده کوونکي دې د تختې پر مخ خپلو کار نورو ته توضيح کړي او محترم ښوونکي دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره دويم مثال حل کړي.

کوښښ دې وشي، تر څو زده کوونکي د ناطقو او غير ناطقو الجبري افادو په توپير پوه شي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې:**

د زده کړې د پياوړتيا لپاره دې ښوونکی لومړۍ پوښتنه د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې:**

د لوست له لنډيز ويلو څخه وروسته د ارزونې لپاره لاندې پوښتنې له زده کوونکو وکړئ.

1- څوک پولينوم تعريفولای شي؟

2- د پولينومي، ناطقو او غير ناطقو الجبري افادو ترمنځ توپير څه دی؟

د هرې افادې يو، يو مثال ووياست.

3- د $p^2-\frac{1}{p^3}$, $\sqrt{5}x$, $\sqrt{x}+y, 3x^{-2}$, $x-1$ ، 15 او 0 الجبري افادو کې کوم يو پولينوم او کوم يو پولينوم نه دی؟

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

متحول او ثابت (Varible and Constant): علامه يا توري چې يو نامعلوم عدد ښکاره کوي د متحول په نامه يادېږي. د مثال په ډول که د ناطقو عددونو سټ په پام کې ونيول شي $Q=\{\frac{p}{q} \mid p,q\in z, q\neq 0\}$

چې p هر تام عدد ښيي او همدارنګه q پرته له صفره کيدای شي هر تام عدد وي که p=2 او q=7 وي، نو د $\frac{2}{7}$ عدد يو ناطق عدد دی او که $p=-11$ او q=25 وي نو $\frac{-11}{25}$ هم يو ناطق عدد دی.

په پايله کې د p او q پر ځای بې شميره تام عددونه موجود کيدای شي، نو p او q ته متحولونه (varibles) وايي.

متحولونه اکثراً د x,y,z,p,q,r,s,t تورو په واسطه ښودل کيږي.

هر حقيقي عدد يو خاص قيمت لري چې تغير نه کوي د مثال په ډول: $-10,5,7,99,\frac{1}{2},\frac{1}{10}$,... او داسې نور. داسې عددونه چې قيمت يې تغير نه کوي د ثابت (Constant) په نامه يادېږي.

سانتي ګريډ او فارنهايت د حرارت د درجو ترمنځ د اړيکې په فورمول کې $(f=\frac{9}{5}c+32^\circ)$ چې f او c متحولين او 32 او $\frac{9}{5}$ ثابت دي.

د پوښتنو ځوابونه:

1– په لاندې الجبري افادو کې کومه يوه ناطقه، غير ناطقه او پولينومي الجبري افاده ده؟

$13 \quad , \quad 3x^2+\frac{xy}{2} \quad , \quad x+\frac{1}{x} \quad , \quad \frac{m+3}{6} \quad , \quad \frac{3x^2}{2} \quad , \quad \sqrt{x}-\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{1}{x}$

حل:

$\frac{1}{x}$ يوه ناطقه الجبري افاده ده خو پولينوم نه دی.

$\sqrt{x}-\frac{1}{2}$ يوه غير ناطقه الجبري افاده ده.

$\frac{3x^2}{2}$ يو پولينوم دی چې ناطقه الجبري افاده هم ده.

$\frac{m+3}{6}$ يو پولينوم دی چې يوه ناطقه الجبري افاده هم ده.

$x+\frac{1}{x}$ ناطقه الجبري افاده ده خو پولينوم نه دی.

$3x^2+\frac{xy}{2}$ ناطقه الجبري افاده ده چې پولينوم هم دی.

13 يو ثابت پولينوم دی.

2- په لاندې الجبري افادو کې کومه یوه یې یو پولینوم او کومه یوه یې پولینوم نه دی؟

$3x \quad , \quad \frac{1}{7}x^3 - x \quad , \quad -20a^3b + 28ab^4 \quad , \quad 3x^2 + \frac{xy}{2}$

$\sqrt{8}x^8 \quad , \quad -0.03 \quad , \quad 3x \quad , \quad 8x^{-8} \quad , \quad 8\sqrt{x} \quad , \quad \frac{1}{x} - \frac{x^2}{5}$

حل:

$3x^2 + \frac{xy}{2}$ (پولینوم دی)

$-20a^3b + 28ab^4$ (پولینوم دی)

$\frac{1}{7}x^3 - x$ (پولینوم)

$3x$ (پولینوم)

$\frac{1}{x} - \frac{x^2}{5}$ (پولینوم نه دی)

$8\sqrt{x}$ (پولینوم نه دی)

$8x^{-8}$ (پولینوم نه دی)

-0.03 (پولینوم دی)

$\sqrt{8}x^8$ (پولینوم دی)

3- د $Px^4 - ax^3 + bx^2 + cx + d$ په پولینوم کې a_1, a_2, a_3, a_n او a_0 وښایاست.

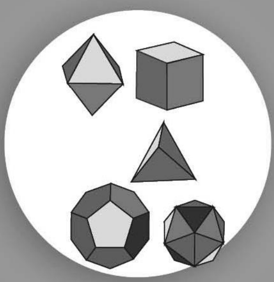
حل:

$a_0 = d \ , \ a_1 = c \ , \ a_2 = b \ , \ a_3 = -a \ , \ a_n = p$

4- د $P(x) = \frac{x^3}{2} - 2x^2 - 1$ په پولینوم کې a_1, a_2, a_3 او a_0 وښایاست.

حل:

$a_0 = -1 \ , \ a_1 = 0 \ , \ a_2 = -2 \ , \ a_3 = \frac{1}{2}$



د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه

د درسي کتاب (7) **مخ** **د لوست وخت**(2 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (پوهنیزې، مهارتي ، ذهنیتي)	ددې لوست په پای زده کوونکي باید: • د پولینوم ډولونه وپیژني. • د هر پولینوم درجه پیدا کړای شي او هم د پولینوم درجه نظر هر توري ته وټاکلای شي. • پولینومونه په صعودي یا نزولي ډول ترتیب کړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حلولو کې له پولینومونو څخه استفاده وکړای شي او اهمیت یې درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	د لومړنو فعالیتونو له سرته رسولو وروسته د انګیزې د پیداکولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ چې ځواب یې داسې دی: د لومړي پولینوم درجه (3) د دویم پولینوم درجه (8) او د دریم پولینوم درجه صفر ده.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې**:

محترم ښوونکي دې د (7) مخ جدول د چارت او یا د تختې پر مخ زده کوونکو ته توضیح کړي، تر څو د مونوم، باینوم او ترینوم افادو توپیر وکړای شي.

ددې مخ فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې حل کړي او یا زده کوونکي کولای شي چې یو، یو زده کوونکي د فعالیت ځوابونه ووایي چې ځواب یې دا دی: لومړی افاده (ترینوم) دویمه (باینوم) دریمه او څلورمه (مونوم) او پنځمه هم (باینوم) دی.

بیا دې د هغه پولینوم درجه چې له یوه او یا له څو تورو څخه تشکیل شوي وي او هم د یو پولینوم درجه نظر هر توري (متحول) ته توضیح شي د ثابت او صفري پولینوم له ورپیژندلو وروسته لومړی، دویم او دویم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي او د (9) مخ پر فعالیت دې زده کوونکي کار وکړي او محترم ښوونکي دې ورته لارښوونه او مرسته ورسره وکړي.

د مکملو، ناقصو، منظمو، غیر منظمو، صعودي او نزولي پولینومونو له توضیح کولو وروسته دې زده کوونکي د 10 مخ فعالیت سرته ورسوي او ښوونکي دې 4 مثال حل کړي او همدارنګه معادل او متجانس پولینومونه دې تعریف شي او د مثالونو په واسطه دې توضیح شي.

5 او 6 مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**:

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره لومړۍ او دویمه پوښتنه حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې:**

محترم ښوونکي ښه پوهیږي چې په څه ډول خپل زده کوونکي وارزوي، د مثال په ډول لاندې پوښتنې له زده کوونکو وکړئ.

- د لاندینیو پولینومونو درجې وټاکئ.

$Q(x) = x^2 - x - 1 \quad , \quad P(x) = x$

$P(x) = 1 \quad P(x) = 0 \quad g(x) = x^2y^3 - xy^4 - x^3y^3$

- که $P(x) = 5xy^4 - 12x^m y^3 - x^p y^4$ پولینوم یو متجانس پولینوم وي، د P او m قیمتونه پیدا کړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- پاملرنه وکړئ چې:

$\frac{4}{7}x^4y$, $-8m^3n^5$, $6.7x^4$, $\frac{4}{7}x^4y^2$ او $3a^2b^2$ هر یو یې مونوم دی، خو $\frac{4y^3}{5x}$, $-2x^{-4}$, $4g^{\frac{1}{2}}y^2$ او $\frac{1}{3y^3}$ یو یې هم مونوم نه دی.

- د دوه متحوله پولینوم عمومي شکل:

$b_m x^m + b_m x^{m-1} \cdot y\, b_{m-2} x^{m-2} \cdot y^2 + \ldots b_1 xy^{m-1} + b_0 y^m$ دی چې دا یو m درجه دوه متحوله پولینوم دی او $b_m , b_{m-1} \ldots b_1 , b_0$ حقیقي عددونه او m یو داسې تام عدد دی چې منفي نه وي.

د پوښتنو ځوابونه:

1– په لاندې افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښایاست او درجې یې پیدا کړئ.

$\frac{1}{2}x^2y^5 \quad , \quad x^2 - y + 4 \quad , \quad x - 1 \quad , \quad x - x^2 - x^3 \quad , \quad 12x \quad , \quad -12$

حل:

- $\frac{1}{2}x^2y^5$ یو حده (مونوم)
- $x - x^2 - x^3$ درې حده (ترینوم)
- $x^2 - y + 4$ درې حده (ترینوم)
- $12x$ یو حده (مونوم)
- $x - 1$ دوه حده (باینوم)
- -12 یو حده (مونوم)

2: په لاندې پولینومونو کې مکمل او ناقص پولینومونه وښایاست او بیا ناقص پولینومونه د مکملو پولنیومونو په شکل ولیکئ.

$x \quad , \quad x + 1 \quad , \quad x^2 - 1 \quad , \quad 2x^2 - 2x - 2 \quad , \quad 15 \quad , \quad x^3 + x - 1$

حل:

- x (ناقص)
- $x + 1$ (مکمل) پشپړ
- $x^2 - 1$ (ناقص) او د مکمل پولینوم په شکل $x^2 + 0 \cdot x - 1$

- $2x^2-2x-2$ (مکمل)
- 15 (مکمل)
- x^3+x-1 (ناقص) او مکمل شکل يې $x^3+0\cdot x^2+x-1$

3- لومړی د لاندې پولينومونو درجې پيدا کړئ او بيا يې په نزولي ډول ترتيب کړئ.

$4x-5+6x^2+8x^3 \quad , \quad 2y^2-4y+3-3y^4+y^3 \quad , \quad 1-x^3+x^2+2x^4-x^5$

حل:

- $4x-5+6x^2+8x^3$ درجهٔ يې (3) ده او نزولي شکل يې $8x^3+6x^2+4x-5$ دی.
- $2y^2-4y+3-3y^4+y^3$ ، درجه يې (4) ده او نزولي شکل يې $-3y^4+y^3+2y^2-4y+3,$ دی.
- $1-x^3+x^2+2x^4-x^5+x$ درجهٔ يې (5) ده او نزولي شکل يې $-x^5+2x^4-x^3+x^2+x+1$ دی.

4- که $P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$ وي د n, p او c قيمتونه پيدا کړئ.

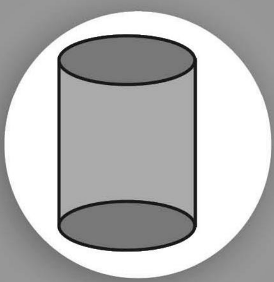
حل:

$$P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$$
$$P(x^2-2x+1)+nx+3n+c=2x^2-x+22$$
$$Px^2-2px+p+nx+3n+c=2x^2-x+22$$
$$px^2+(n-2p)x+p+3n+c=2x^2-x+22$$
$$\Rightarrow P=2 \qquad \begin{aligned} n-2p&=-1\\ n-4&=-1\\ n&=3\end{aligned} \qquad \begin{cases} p+3n+c=22\\ 2+9+c=22\\ c=11\end{cases}$$

5- د a، b او c قيمتونه پيدا کړئ که $P(x)=7x^4-(2a-3)x^3+5x-(c-3)$ او $Q(x)=(3b+4)x^4+2x^3+5x$ معادل پولينومونه وي.

حل:

$$3b+4=7\Rightarrow b=1$$
$$-2a+3=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$
$$-c+3=0\Rightarrow c=3$$



د پولینوم د قمیت او د پولینوم د ضریبونو
د مجموعې پیدا کول

د درسي کتاب (13)**مخ**　　**د لوست وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (**پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي**)	• د متحول د ټاکلي قیمت لپاره د پولینوم قیمت پیدا کول زده کړي. • د پولینوم قمیت او د پولینوم د ضریبونو مجموعه پیدا کړای شي. • د هندسي شکلونو د مساحت او حجم د اړوندو فورمولونو له مخې یې مساحت او حجم پیدا کړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حل کې د پولینوم د قیمت د پیدا کولو اهیمت درک کړي.
د تدریس لارې (**میتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له لومړنیو فعالیتونو او د تیر لوست سره د نوي لوست له اړیکې ورکولو څخه وروسته د انگیزې د پیدا کولو لپاره د ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ که زده کوونکي یې ځواب نه شو ویلای، نو ښوونکي دی حل کړي: $P(-1)=(-1)^3-(-1)^2-(-1)-1=-1-1+1-1=-2$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې:**

لومړی مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل شي او د (13) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي، محترم ښوونکي دې د دوی د کار څارنه اومرسته ورسره وکړي چې ځواب یې دا دی:

$P(0)=-1$　　　$P(1)=1-1-1-1=-2$　　　$P(-1)=-1+1+1-1=0$

په همدې ډول محترم ښوونکي دې دویم، دریم او څلورم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي.

د (14) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب یې $525\pi cm^3$ دی. ددې لپاره چې د پولینوم د ضریبونو د مجموعې او د پولینوم دقیمت دپیدا کولو موضوع ښه روښانه شي، د کتاب پنځم، شپږم، اووم او اتم مثالونه دې حل شي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې:**

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره دې د پوښتنو لومړۍ پوښتنه حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې:**

د ارزونې لپاره لاندې پوښتنې له زده کوونکو وپوښتئ:

1- که $x=-2$, $y=3$ ، $z=-1$ او $t=2$ وي، د $\frac{3xy-2zt}{4xz}$ قیمت پیدا کړئ.　　ځواب: $-\frac{7}{4}$

2- که چیرې $x=2$, $y=3$ او $Z=-1$ وي، د $3x+5yz$ قیمت پیدا کړئ　　ځواب: -9

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- که $x-y=2$ او $xy=4$ وي، د x^3-y^3 قیمت پیداکړئ:

$$x-y=2$$
$$(x-y)^2=4$$
$$x^2-2xy+y^2=4 \Rightarrow x^2+y^2=12$$
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=2(x^2+y^2+xy)=2(12+4)=2(16)=32$$

- که $a=3$ او $b=-2$ وي، د $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$ قیمت عبارت دي له :

$$8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3=(2a)^3+3(2a)^2+(3b)9+3(2a)(3b)^2+(3b)^3=(2a+3b)^3$$
$$=(6-6)=0$$

- که $x=\sqrt{5}-2$ وي، د $\frac{1}{x}, x+\frac{1}{x}$, $(x+\frac{1}{x})^2$ و $x^2+\frac{1}{x^2}$ قیمتونه عبارت دي له:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}+2}{1}=\sqrt{5}+2$$
$$x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}-2+\sqrt{5}+2=2\sqrt{5}$$
$$(x+\frac{1}{x})^2=(2\sqrt{5})^2=20$$
$$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=20 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=20-2=18$$

د پوښتنو ځوابونه:

1-که $p(x)=-x^4-x^3-x^2-x-1$ وي $p(-1)$ او $p(\frac{1}{2})$ پیداکړئ.

حل:

$$P(-1)=-(-1)^4-(-1)^3-(-1)^2-(-1)-1=-1+1-1+1-1=-1$$
$$P(\frac{1}{2})=-(\frac{1}{2})^4-(\frac{1}{2})^3-(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})-1$$
$$P(\frac{1}{2})=-\frac{1}{16}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1=\frac{-1-2-4-8-16}{16}=\frac{-31}{16}$$

2- د $p(x)=kx^3-x^2+3x-1$ په پولینوم کې که $p(2)=17$ وي د k قیمت پیداکړئ.

حل:

$$P(2)=k\cdot 2^3-2^2+3(2)-1=17$$
$$8k-4+6-1=17$$
$$8k=17-1 \Rightarrow 8k=16 \Rightarrow k=2$$

3-که د mx^2-2x+1 د ضریبونو مجموعه 18 وي د m قیمت پیداکړئ.

حل:

$$m-2+1=18$$
$$m=19$$

4- د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$P(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1+2-4}{8}=-\frac{1}{8}$$

5- $A=x^2-4x+4$ ، $B=-4x^3+10x^2$ ، $C=-x+3x^4-6x^3$ او $D=x^2+4x-4$ په پولینومونو کې د $x=4$ لپاره د کوم پولینوم قیمت له 100 څخه زیات دی.

a) C

b) D

c) A

d) B

حل: د (a) جز سم یا د $x=4$ لپاره د C پولینوم قیمت تر 100 زیات دی.

6- په لاندې پولینومونو کې د $x=5$ لپاره د کوم پولینوم قیمت تر ټولو زیات دی.

a) x^2-2x+6

b) $3x^4+6x+12$

c) $-x^3-40x-300$

d) x^5-120x^4+10

حل: د (b) جز سم دی.

7- که $p(x)=x^4-x^3-x^2-x-1$ وي $p(-1)$ ، $p(0)$ ، $p(\frac{1}{2})$ او $p(-\frac{1}{2})$ پیدا کړئ.

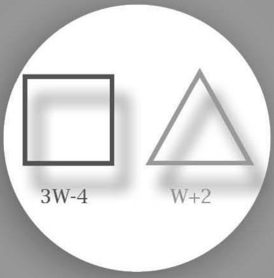
حل:

$P(-1)=1$

$P(0)=-1$

$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-29}{16}$

$P\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{9}{16}$



د پولینوم څلور ګونې عملیې (جمع او تفریق)

د درسي کتاب (17)مخ د لوست وخت(1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • مشابه حدونه (like terms) وپيژني. • د مشابه حدونو په جمع کولو او تفریقولو وپوهيږي. • د مشابه او غير مشابه حدونو توپير وکړای شي. • مشابه حدونه سره جمع او يو له بله تفريق کړای شي. • د جمعې د عمليې د تبديلي او اتحادي خاصيت او هم د ضرب توزيعي خاصيت پر جمع باندې، په پولينومونو کې تطبيق کړای شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې د جمعې او تفريق د عمليو د خاصيتونو اهميت درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د انګيزې د پيدا کولو لپاره ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ چې ځواب يې په لاندې ډول دی: که P د مربع محيط وي: $P=(3w-4)+(3w-4)+(3w-4)+(3w-4)=4(3w-4)=12w-16$ که C د متساوي الاضلاع مثلث محيط وي: $C=3(w+2)=3w+6$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې

زده کوونکو ته دې توضيح شي چې د جمعې او تفريق په عمليو کې مشابه حدونه سره جمع او يا يو له بله تفريق کيږي.

د مثال په ډول: $5x-4x^4-5x^3-9x+4x+1-1=-4x^4-5x^3$

لومړی مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي او د دې لوست لومړی فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب يې: $3ab^2+8a+2$ دی. او دويم مثال دې محترم ښوونکی د زده کوونکو په فعاله ونډې اخيستنې سره حل کړي.

په همدې ډول د تفريق د عمليې لومړی مثال دې هم د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي او د 19 مخ لومړی فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي او ښوونکي دې د دوی له کارونو څارنه او مرسته دې ورسره وکړي.

بيا له دې وروسته چې ښوونکی دويم مثال حل کړي زده کوونکي دې ددې مخ دويم فعاليت سرته ورسوي چې ځواب $(-5x-10)$ دی.

3 او 4 مثالونه دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې:**

د لوست د پیاوړتیا لپاره دې لومړی او دویمه پوښتنه حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې:**

که له $A = 4x^3 - 3ax + 5$ پولینوم څخه د $B = 11x^3 + ax^2 - x + b$ پولینوم تفریق شي، $cx^3 - 2x^2 + dx - 1$ کیږي، د b, a او c قیمتونه پیدا کړئ.

جواب: $(a = 2\ ,\ b = 6\ ,\ c = -7)$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- له لاندینیو الجبري افادو سره کومه افاده جمع او یا ترې تفریق شي، تر څو مکمله مربع شي؟

$a:\ x^2 + 16y^2 \qquad b:\ -20xy + 25y^2$

حل: که له $x^2 + 16y^2$ سره د $(2x)(4y)$ جمع او یا ترې تفریق شي، $(x \pm 4y)^2$ لاس ته راځي.

$b:\ -20xy + 25y^2 = -2(2x)(5y) + 5y^2$

نو که $(2x)^2$ له دې افادې سره جمع شي، $(2x - 5y)^2$ لاس ته راځي.

2- که $a - b = 12$ و $ab = 35$ وي، د $a^2 + b^2$ قیمت پیدا کړئ.

$(a - b)^2 = (12)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = 144 \Rightarrow a^2 + b^2 = 144 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = 144 + 70 = 214$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د دوو پولینومو مجموعه $x^2 + 2x - y^2$ ده، که یو پولینوم $x^2 - 2xy + 3$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.

حل: $x^2 + 2x - y^2 - (x^2 - 2xy + 3) = x^2 + 2x - y^2 - x^2 + 2xy - 3 = 2x - y^2 + 2xy - 3$

2- د $3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1$ پولینوم له $4x^4 + 2x^2 + x^3 - x + 1$ پولینوم څخه تفریق کړئ.

حل:

$4x^4 + 2x^2 + x^3 - x + 1 - (3x^4 + 5x^3 + 2x^2 - x + 1)$

$= 4x^4 + 2x^2 + x^3 - x + 1 - 3x^4 - 5x^3 - 2x^2 + x - 1 = x^4 - 4x^3$

3- له $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ پولینوم څخه د $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ پولینوم تفریق کړئ.

حل:

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3 = 6a^2b + 2b^3$

4- که $A = a^3 + 2a^2 - 6a + 7$ ، $B = a^3 + 2a + 5$ او $C = 2a^3 - a^2 + 2a - 8$ وي، ددې درې واړو پولینومو مجموعه پیدا کړي. $(A + B + C = ?)$

حل:

$A = a^3 + 2a^2 - 6a + 7$
$B = a^3 \quad\quad + 2a + 5$
$\underline{C = 2a^3 - a^2 + 2a - 8}$
$A + B + C = 4a^3 + a^2 - 2a + 4$

5- د $(ab^2 + 3a) + (2ab^2 + 3a - 2) + (2a + 4)$ افادې د جمعې حاصل مساوي دی، په:

$a) - 3ab^2 + 8a + 2$ $\quad b) 3ab^2 + 8a$ $\quad c) 3ab^2 + 8a + 2$

حل:

$(ab^2 + 3a) + (2ab^2 + 3a - 2) + (2a + 4)$
$ab^2 + 3a + 2ab^2 + 3a - 2 + 2a + 4 = 3ab^2 + 8a + 2$

د (c) جز سم دی.

6- جمع يې کړئ.

$(3a^2b^2 + 2a^2 - 5ab) + (-3ab + a^2 - 2) + (1 + 6ab)$

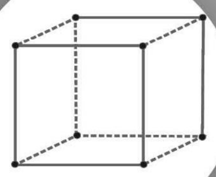
حل:

$(3a^2b^2 + 2a^2 - 5ab) + (-3ab + a^2 - 2) + (1 + 6ab)$
$= 3a^2b^2 + 2a^2 - 5ab - 3ab + a^2 - 2 + 1 + 6ab = 3a^2b^2 + 3a^2 - 2ab - 1$

7- که دوه الوتکې له يوه هوايي ډګر څخه يو د بل مخالف لورې ته والوزي، که 2 ساعتونه وروسته د يوې الوتکې واټن له هوايي ډګر څخه $x^2 + 2x + 400$ ميله وي، دبلې الوتکې واټن له هوايي ډګر څخه $3x^2 - 50x + 100$ ميله وي، ددې دواړو الوتکو تر منځ واټن(فاصله) پيدا کړئ.

حل:

$(x^2 + 2x + 400) + (3x^2 - 50x + 100) = x^2 + 2x + 400 + 3x^2 - 50x + 100 = 4x^2 - 48x + 500$



د پولينومونو د ضرب عمليه

د درسي کتاب (21) **مخ** **د لوست وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (**پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي**)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د مونوم ضربول په مونوم کې د مونوم ضربول پـه پولينـوم کـې او د پولينـوم ضـربول پـه پولينـوم کې زده کړي. • د ضرب د عمليې د تبديلي او اتحادي خاصيتونه وپيژني. • پولينومونـه سـره ضـرب کـړای شـي او د ضـرب د عمليـې اتحـادي او تبـديلي خاصـيتونه پـه پولينومونو کې تطبيق کړای شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې د پولنيومونـو د ضـرپ د عمليـې اهميـت درک او د رياضـي علم زده کړې ته علاقه مند شي.
د تدريس لارې (**ميتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه ، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته زده کړې ته د انگيزې د پيداکولـو لپـاره د ورودي برخـې پوښـتنه له زده کوونکو وکړئ که V د مکعب حجم وي: $V=(x+1)(x+1)(x+1)cm^3=(x+1)^3cm^3=(x^3+3x^2+3x+1)cm^3$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**:

محترم ښوونکي دې د مونوم ضرب په مونوم کې زده کوونکو ته توضيح کړي او بيا دې زده کوونکي ددې لوست لـومړی فعاليـت سرته ورسوي.

بيادې محترم ښوونکي لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي، همدارنگـه د مونـوم ضـرب پـه پولينـوم کـې توضيح او دويم مثال حل کړئ.

د (22) مخ فعاليت دې زده کوونکي حل کړي. د پولينوم ضـرب پـه پولينـوم کـې دې توضـيح شـي. دريـم او څلـورم مثـال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د (23) او (24) مخونو فعاليتونه دې زده کوونکي حل کړي. ښوونکي دې د (24) مخ پوښتنه پر تخته حل کړي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**:

د زده کړې پياوړتيا لپاره دې لومړۍ پوښتنه حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې**:

1- ضرب يې کړئ:

$(a-b+1)(a+b-1)$

$(x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy)$

$(x^2-3x+1)(x^2+3x+1)$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- که $x+\frac{1}{x}=5$ وي $x^4+\frac{1}{x^4}$ قيمت پيدا کړئ:

$$(x+\frac{1}{x})^2=5^2 \Rightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=25$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=25-2=23 \Rightarrow (x^2+\frac{1}{x^2})^2=(23)^2$$

$$x^4+2+\frac{1}{x^4}=529 \Rightarrow x^4+\frac{1}{x^4}=529-2$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=527$$

- څرنگه چې مطابقتونه ددې ټولگې په مفرداتو کې شامل نه دي، او په تيرو ټولگيو کې لوستل شوي دي چې ځينې مطابقتونه په لاندې ډول دي:

$1:\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\qquad$ $2:\ (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$3:\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2$ $\qquad$ $4:\ (x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$5:\ (a+b)^2=(a-b)^2+4ab$ $\qquad$ $6:\ (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$7:\ (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ $\qquad$ $8:\ (a+b)^3=a^3+.3a^2b+3ab^2+b^3$

$9:\ (a-b)^3=a^3-.3a^2b+3ab^2-b^3$ $\qquad$ $10:\ (a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$11:\ (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$12:\ (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$

د پوښتنو ځوابونه:

1- ضرب يې کړئ.

$-2xy(2x^2+2y^2-2)$, $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$

حل:

$-2xy(2x^2+2y^2-2)=-4x^3y-4xy^3+4xy$

$(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)=-20x^3y^5z^3$

2- يو بکس چې لوړوالی يې x انچه، اوږدوالی يې $x+1$ او سور يې $2x-4$ انچه دی، که لوړوالی يې 3 انچه وي، د دې بکس حجم مساوي دی، په:

$a)\ 40in^3$ $\qquad$ $b)\ 24in^3$ $\qquad$ $c)\ 48in^3$ $\qquad$ $d)\ 20in^3$

حل:

$$x(x+1)(2x-4)=(x^2+x)(2x-4)=2x^3-4x^2+2x^2-4x=2x^3-2x^2-4x$$

څرنگه چې x=3in دی، نو د مکعب حجم v مساوي دی په:

$v = 2(3)^3 - 2(3)^2 - 4(3) = 54 - 18 - 12 = 54 - 30 = 24\, in^3$

د b جز سم دی.

3- د $(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p}$ د ضرب حاصل مساوي دی، په:

$a)1$ $b)-1$ $c)$ صفر $d)$ درې واړه سم نه دي

حل:

$$(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p} = (a^{p+q})^{p-q}(a^{q+r})^{q-r}(a^{r+p})^{r-p}$$

$$= a^{p^2-q^2} \cdot a^{q^2-r^2} \cdot a^{r^2-p^2} = a^{p^2-q^2+q^2-r^2+r^2-p^2} = a^o = 1$$

د (a) جز سم دی



د پولینوم وېش پر مونوم باندې

د درسي کتاب (25) **مخ**　　　**د لوست وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي)	د دې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د مونوم پر مونوم باندې، د پولینوم پر مونوم او د پولینوم وېشل پر پولینوم باندې زده کړي. • پولینوم پر مونوم او پولینوم پر پولینوم باندې وویشلای شي. • د ریاضي د مسایلو په حلولو کې د پولینومونو د وېش اهمیت درک کړي او د ریاضي زده کړې ته علاقه مند شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	د لومړنیو فعالیتونو د سرته رسولو وروسته ددې لپاره چې د زده کړې لپاره انګیزه پیدا شي، د ورودي برخې پوښتنې دې له زده کوونکو وپوښتل شي: $\dfrac{\frac{4m^2}{n}}{n}=\dfrac{4m^2}{n}\cdot\dfrac{1}{n}=\dfrac{4m^2}{n^2}$, $\dfrac{3mn^2}{-mn}=-3n$, $\dfrac{14x^5}{2x^2}=7x^3$ $\dfrac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{b}{1}=\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{-x^2}{x}=-x$, $\dfrac{-n^a}{n^b}=-n^{a-b}$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې:**

له دې وروسته چې محترم ښوونکي لومړی او دویم مثال د تختې پر مخ حل کړه. د (25) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب یې دا دی:

$a:3x^3y^5-2x^9$　　$b:\dfrac{1}{y+1}$　　$c:\dfrac{5b}{3}$

د پولینوم وېش پر پولینوم دې توضیح شي او د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره دې دریم مثال حل شي او د 26 مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب یې (a^2-ab+b^2) دی.

څلورم او پنځم مثال دې ښوونکی د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي او د (27) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

شپږم مثال دې حل شي.

د زده‌کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**:

د زده‌کړې د پیاوړتیا لپاره دې لاندې پوښتنې حل شي:

$$\left(x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}\right) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{16}\right) \div \left(x + \frac{3}{4}\right)$$

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**:

د لوست د ارزونې لپاره لاندې پوښتنې دې له زده‌کوونکو وپوښتل شي.

$$(x^3 - 43x + 42) \div (x^2 + 6x - 7)$$

$$\frac{3x^4 - 4x^2 + 2x - 1}{x - 1} = ?$$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

•

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \div (a + b + c) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

$$1 - 8y^3 + z^3 + 6yz = (1 - 2y + z)(1 + 4y^2 + z^2 + 2y + 2yz - z)$$

$$8x^6 + 9x^3 + 1 = (2x^2 + 3x + 1)(4x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 3x + 1)$$

ځکه چې:

$$8x^6 + 9x^3 + 1 = 8x^6 + 1 + 27x^3 - 18x^3 = (2x^2)^3 + 1^3 + (3x)^3 - 3(2x^2)(1)(3x)$$

$$= (2x^2 + 1 + 3x)(4x^2 + 1 + 9x^2 - 2x^2 - 3x - 6x^3)$$

$$= (2x^2 + 3x + 1)(4x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 3x + 1)$$

• د y په کوم قیمت د $16y^2 + 9y + 7 + y^4 + 7y^3$ پولینوم پر $y^3 + 3y + 1$ پوره وېشل کیږي؟

حل:

$$\begin{array}{l|l} y^4 + 7y^3 + 16y^2 + 9y + 7 & y^3 + 3y + 1 \\ \underline{-y^4 \qquad \pm 3y^2 \pm y} & \overline{y + 7} \\ \quad 7y^3 + 13y^2 + 8y + 7 & \\ \underline{\quad -7y^3 \qquad \pm 21y \pm 7} & \\ \qquad 13y^2 - 13y & \end{array}$$

$$13y^2 - 13y = 0$$

$$13y(y - 1) = 0$$

د $y=1$ او $y=0$ په قیمتونو پورتني پولینوم پر $y^3 + 3y + 1$ پوره وېشل کیږي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- د P په کوم قیمت $3x^3 - 7x^2 - 9x + p$ پولینوم پر $x - 13$ پوره وېشل کیږي.

حل: د $p = -5291$ په قمیت راکړل شوی پولینوم پر $x - 13$ پوره وېشل کیږي.

2- د وېش حاصل یې پیدا کړئ.

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \div (a + b + c)$$

$$(x^2 + x - 6) \div (x - 2)$$

$$(x^5 - y^5) \div (x - y)$$

$$\frac{j^5k^2 - 3j^8k^4}{2j^4k} \qquad \frac{12x^5 + 9x^4 + 15x^2}{3x^3} \qquad \frac{27a^6b^{13} - 18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$$

حل:

$$(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \div \left(a + b + c\right) = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

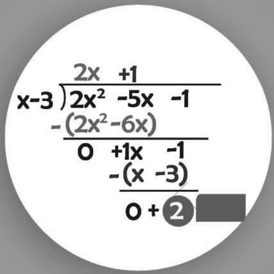
$$(x^2 + x - 6) \div \left(x - 2\right) = x + 3$$

$$(x^5 - y^5) \div \left(x - y\right) = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

$$\frac{j^5k^2 - 3j^8k^4}{2j^4k} = \frac{jk}{2} - \frac{3j^4k^3}{2}$$

$$\frac{12x^5 + 9x^4 + 15x^2}{3x^3} = 4x^2 + 3x + \frac{5}{x}$$

$$\frac{27a^6b^{13} - 18a^{12}b^8}{9a^3b^8} = 3a^3b^5 - 2a^9$$



د باقیمانده قضیه

د درسي کتاب (29) **مخ   د لوست وخت:** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته د وېش د عملیې پاتې (باقیمانده) د پیدا کولو په طریقه وپوهېږي. • د باقیمانده قضیې په مفهوم پوه شي. • په دې وپوهېږي چې که د $p(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشل شي، پاتې له $p(a)$ سره مساوي ده. • د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د وېش د عملیې پاتې پیدا کړئ. • د ریاضي د مسایلو په حللولو کې د باقیمانده له قضیې څخه استفاده وکړای شي او په اهمیت یې پوه شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو وروسته د زده کړې د انگیزې د پیدا کولو لپاره دې د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وپوښتل شي چې پاتې یې مساوي ده په: $R = p(4) = 4^3 - 6(4)^2 - 4 - 6 = 64 - 96 - 10 = -42$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې:**

محترم ښوونکي دې د لومړی مثال له حللولو څخه وروسته د پاتې قضیې ثبوت زده کوونکو ته توضیح کړي. دویم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل شي او د (30) مخ فعالیت دې زده کوونکي په ډلو کې سرته ورسوي او خپل کار دې نورو ته توضیح کړي. بیا دریم او څلورم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ او د (31) مخ فعالیت دې یو زده کوونکي د تختې پر مخ کار کړي.په پای کې په پنځم مثال کې د وېش له عملیې پرته او د وېش عملیې د سرته رسولو په واسطه پاتې په لاس راوړئ او سره پرتله دې شي، تر څو په نتیجه کې زده کوونکي په دې وپوهېږي چې د باقیمانده قضیې په مرسته د وېش د عملیې باقي په اسانۍ سره په لاس راوړلای شو.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې:**

د لوست د پیاوړتیا او د زده کوونکو د لا ښې زده کړې لپاره کولای شې چې لاندې پوښتنې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

- د وېش د عمليې له سرته رسولو پرته که د $P(x)=x^3-3x^2+x-2$ پولينوم پر $(x-2)$ وويشل شي باقيمانده به يې څو وي. (ځواب (-4))
- که د $P(x)=2x^3-7x^2+12x+3a$ پولينوم پر $(x-3)$ پوره ووېشل شي، د a قيمت پيدا کړئ. (ځواب $a=-9$)

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې**:

محترم ښوونکيه! ددې لپاره چې د زده کوونکو له زده کړې څخه ډاډمن شي چې لاندې پوښتنې له دوی څخه وکړئ.

- د وېش د عمليې له سرته رسولو څخه پرته که د $p(x)=4x^3-13x+10$ پولينوم پر $(x-3)$ ووېشل شي، باقيمانده يې پيدا کړئ؟
- که د $P(x)=x^3-4x^2+bx-2$ پولينوم پر $(x-1)$ پوره ووېشل شي، د b قيمت پيدا کړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- که $P(x)=2x^3-7x^2+12x+3a$ پولينوم پر (x-3) پوره ووېشل شي، د پاتې قضيې په مرسته د a قيمت عبارت دی له:

په دې حالت کې بايد $R=P(3)=0$ شي.

$$P(3)=2\cdot3^3-7\cdot3^2+12\cdot3+3a=0$$
$$3a=-27$$
$$a=-9$$

- که $a+b+c=7$, $ab+bc+ca=20$ وي د $a^2+b^2+c^2$ قيمت مساوي دی په:

$$a+b+c=7$$
$$(a+b+c)^2=7^2$$
$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=49$$
$$a^2+b^2+c^2+2(20)=49$$
$$a^2+b^2+c^2=49-40=9$$

- که $P(x)=x^{79}+3x^{24}+5$ پر $(x-1)$ ووېشل شي باقيمانده عبارت ده له: R=9
- د باقيمانده قضيې په مرسته د a قيمت پيدا کولای شو چې که $P(x)=2x^2-ax^2-(2a-3)x+2$ پر $x+1$ ووېشل شي.

$$P(-1)=2(-1)^3-a(-1)^2-(2a-3)(-1)+2=0$$
$$\Rightarrow -2-a+2a-3+2=0$$
$$\Rightarrow a-3=0$$
$$a=3$$

د پوښتنو ځوابونه:

1– د باقيمانده قضيې (Remainder theorem) په مرسته يې پاقي (پاتې) پيدا کړئ.

$(5x^3-x^2+4x+1)\div(x-3)$ $\qquad$ $(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$

$(6x^2+15)\div(4x+9)$ $\qquad$ $(4y^2-y-6)\div(y-1.6)$

حل:

a) $P(3)=5(3)^3-(3)^2+4(3)+1=5\cdot 27-9+12+1=139$

b) د $(6x^2+15)\div(4x+9)$ باقیمانده مساوي ده په

$4x+9=0$

$4x=-9$

$x=-\frac{9}{4}$

$6(-\frac{9}{4})^2+15=6(\frac{81}{16})+15=\frac{3(81)}{8}+15=\frac{243+120}{8}=\frac{363}{8}=45\frac{3}{8}$

c) د $(4y^2-y-6)\div(y-1.6)$ پاتې مساوي ده په 2.64

d) د $(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$ باقیمانده عبارت ده له $\frac{83}{4}$

2- د باقیمانده قضیې په مرسته وواياست چې د k په کوم قیمت د $5x^3-k^2x^2+3kx-6$ پولینوم پر $(x+2)$ وویشو، تر خو -44 باقي شي؟

که چیرې د $(5x^3-k^2x^2+3kx-6)\div(x+2)$ پاتې -44 وي نو $k=-1$ یا $k=-\frac{1}{2}$ دی.

3- د k په کوم قیمت که د $2k^2y^4-ky^2+1$ پولینوم، پر $(y-\frac{1}{2})$ وویشل شي چې 2 باقي شي؟

حل: $k=4$ یا $k=-2$ دی.

4- که چیرې $m^2x^4-10x^2+2$ پولینوم پر $(x-1)$ وویشو او باقي 17 وي، د m قیمت به څو وي؟

حل: ددې لپاره چې پاتې 17 شي، باید $m=\pm 5$ وي.

$(x^5+1)\div(x+1)$

$P(-1)=(-1^5+1)$
$=-1+1=0$

د فکتور قضیهٔ

د درسي کتاب (33)مخ　　د لوست وخت:(1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنیزې، مهارتي ، ذهنیتي)	دديٖ لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د فکتور د قضيې او د فکتور د معکوسې قضيې په مفهوم وپوهيږي. • په دې وپوهيږي چې څه وخت د $(x-a)$ دوه حده د يو پولينوم فکتور دی. • د فکتور او د باقيمانده قضيو ترمنځ په اړيکه وپوهيږي. • د فکتور د قضيې په مرسته د پولنيومونو فکتورونه پيدا کړای شي. • د فکتور د قضيې په مرسته الجبري افادې تجزيه کړای شي. • د فکتور له قضيې څخه د رياضي د مسايلو په حلولو کې استفاده وکړای شي او په اهيمت يې پوه شي، د مسايلو له حلولو څخه د رياضي د زده کړې سره علاقه مند شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د انګيزې لپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وپوښتل شي: $P(1)=1^3-4\cdot1^2+1+2=1-4+1+2=0$ څرنګه چې $P(1)=0$ دی؛ نو $(x+1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ پولينوم يو فکتور دی.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې:

محترم ښوونکي دې د فکتور د قضيې له ثبوت کولو څخه وروسته د زده کوونکو په فعاله ونډې اخيستنې سره لومړی مثال حل کړي. د پوښتنو او ځوابونو په شکل دديٖ لوست لومړنی فعاليت دې له زده کوونکو وپوښتل شي چې ځواب يې دا دی:

$x-1=0\Rightarrow x=1$

$P(1)=2\cdot1^3-13(1)+26(1)-15=0$

نو $(x-1)$ دديٖ پولينوم يو فکتور دی.

له دې وروسته چې محترم ښوونکی دويم، دريم او څلورم، مثال د زده کوونکي په ونډې اخيستنې سره د تختې پر مخ حل کړي. زده کوونکو دې د (34) مخ فعاليت دې زده کوونکي په ډلو کې کار وکړي او د خپل کار نتيجه دې د تختې پر مخ نورو ته توضيح کړي چې حل يې په دې ډول دی:

$x-6=0\Rightarrow x=6$

$6^6-36(6)^3+1296=6^6-6^5+6^4=46656-7776+1296\neq0$

نو $(x-6)$ دديٖ پولينوم يو فکتور نه دی.

$x+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$20(-\frac{1}{8})+7(-\frac{1}{2})+6=0$

نو $(x+\frac{1}{2})$ ددې پولینوم یو فکټور دی.

$x-0.1=0 \Rightarrow x=0.1$

$10(0.1)^3-11(0.1)^2+1=10(0.001)-11(0.01)+1=0$

نو $(x-0.1)$ ددې پولینوم یو فکټور دی.

$x-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{8})=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=0$

نو $(x-\frac{1}{2})$ ددې پولینوم یو فکټور دی.

$x+5=0 \Rightarrow x=-5$

$(-5)^3+125=-125+125=0$

نو $(x+5)$ ددې پولینوم یو فکټور دی.

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$(-2)^5+32=-32+32=0$

نو $(x+2)$ ددې پولینوم فکټور دی.

له دې وروسته چې محترم ښوونکی د فکټور د قضیې د معکوس مفهوم زده کوونکو ته توضیح کړ، لومړی دویم او دریم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره د تختې پر مخ حل کړي. د (35) مخ فعالیت د پوښتنو او ځوابونو په شکل له زده کوونکو وپوښتئ چې ځواب یې داسې دی:

$P(2)=2^3-4(2)^2+5(2)-2=0$

نو د 2 عدد ددې معادلې یو جذر دی. څلورم مثال پر تخته حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**:

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره لومړی پوښتنه د زده کوونکو په فعاله ونډې اخیستنې د تختې پر مخ حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**:

له دې وروسته چې ښوونکي د لوست لنډیز زده کوونکو ته ووایي، د لوست د ارزونې لپاره کولای شي د لاندې پوښتنې په شان پوښتنې له زده کوونکو وپوښتئ.

- فکټور د قضیې په مرسته وښایاست چې $(x+2)$ د $P(x)=x^3-6x^2+32$ د پولینوم یو فکتور دی.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- r د $P(x)=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی که $P(r)=0$ شي.
- $(x-r)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکټور دی که $P(r)=0$ شي.
- که د $P(x)$ پولینوم په $(x-r)$ وویشل شي او پاتې صفر شي، نو د دې پولینوم گراف د x محور په r کې قطع کوي یا

گراف په r کې صفري نقطه لري.

- د k قیمت په هغه صورت کې چې راکړل شوي دوه حده د اړوندو پولنیومونو فکټورونه وي عبارت دی له:

$x^3+3x^2-x+k \quad : \quad x-2 \qquad \Rightarrow k=-18$

$kx^3-2x^2+x-6 \quad : \quad x+3 \qquad \Rightarrow k=-1$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د k د کوم قیمت لپاره $(x-2)$ د $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ پولینوم یو فکټور دی؟

حل: د $K=-2$ په قمیت د $(x-2)$ دوه حده د $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ پولینوم یو فکټور دی.

2- ایا $(x+3)$ د $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ پولینوم یو فکټور دی؟

حل: څرنگه چې $P(-3)=(-3)^5-(3)^3+27(-3)^2-27=0$ کیږي، نو $(x+3)$ د $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ پولینوم یو فکټور دی.

3- د فکټور د قضیې په مرسته وښایاست چې $(x+7)$ د $P(x)=x^3+8x^2+8x+7$ پولینوم یو فکټور دی، که نه؟

حـل: څرنگـه چـې $P(-7)=(-7)^3+8(-7)^2+8(-7)+7=-343+392-56+7=0$ $P(-7)=R=0$ ده نـو $(x+7)$ ددې پولینوم یو فکټور دی

4- د ویش د عملیې د سرته رسولو پرته وښایاست چې ایا $(y-7)$ د $P(y)=y^4+2y^3-6y^2-14y-7$ پولینوم یو فکټور دی که نه.

حل: څرنگه چې $P(7)=7^4+2(7)^3-6(7)^2-14(7)-7=2401+686-294-98-7=3087-399\neq 0$

$R=P(7)=2087-399\neq 0$ ، نو $(y-7)$ د راکړل شوي پولینوم فکتور نه دی

5- وښایاست چې ایا $(m+\frac{1}{2})$ د $P(x)=2m^2+4m-2$ پولینوم یو فکټور دی که نه؟

حل: $P(-\frac{1}{2})=2(-\frac{1}{2})^2+4(-\frac{1}{2})-2 \Rightarrow P(-\frac{1}{2})=2\cdot\frac{1}{4}-2-2=\frac{1}{2}-4\neq 0$ ، نو $(m+\frac{1}{2})$ ددې پولینوم فکټور نه دی.

6- د $x^3+x^2-10x+8$ پولینوم د فکټور د قضیې په مرسته تجزیه کړئ.

حل: $P(1)=1^3+1^2-10(1)+8=1+1-10+8=0$ ، نو $(x-1)$ ددې پولینوم یو فکټور دی.

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2-10x+8 & x-1 \\ \underline{x^3\mp x^2} & x^2+2x-8 \\ \quad 2x^2-10x & \\ \quad \underline{{}_-2x^2\mp 2x} & \\ \qquad -8x+8 & \\ \qquad \underline{\mp 8x\pm 8} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(x-1)(x^2+2x-8)=(x-1)(x+4)(x-2)$ $\qquad x^3+x^2-10x+8=(x-1)(x-2)(x+4)$

7- که $(x-1)$ او $(x+1)$ د $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ د پولینوم فکټورونه وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$P(1)=1+a+b+2=0$

$P(-1)=-1+a-b+2=0$

$a+b=-3 \qquad -2-b=-1$

$a-b=-1 \qquad -b=1$

$2a=-4 \qquad \boxed{b=-1}$

$\boxed{a=-2}$

8- د k دکوم قیمت لپاره $(x-5)$ د $Q(x)=x^3-5x^2-16x+k$ پولینوم یو فکټور دی؟

حل:

$Q(5)=5^3-5(5)^2-16(5)+k$

$125-125-80+k=0$

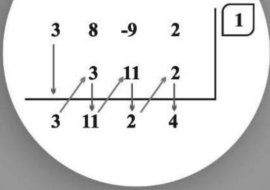
$-80+k=0 \Rightarrow \boxed{k=80}$

9- د k دکوم قیمت لپاره (-1) د $x^3-9x^2+14x+k=0$ معادلې یو جذر دی.

حل:

$(-1)^3-9(-1)^2+14(-1)+k=0$

$-1-9-14+k=0 \Rightarrow \boxed{k=24}$



ترکیبي وېش (Synthetic devision)

د درسي کتاب (37) **مخ** **د تدریس وخت:** (1 **یو درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي)	د دې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د ترکیبي وېش د عملیې د سرته رسولو پړاونه زده کړي. • د ترکیبي وېش په مرسته د وېش حاصل (خارج قسمت) او پاتې پیداکړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حلولو کې له ترکیبي وېش څخه استفاده وکړای شي او په اهیمت یې وپوهېږي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	د انګیزې د پیداکولو لپاره دې ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وپوښتل شي: $\begin{array}{cccc\|c} 3 & -1 & 2 & -5 & 2 \\ & 6 & 10 & 24 & \\ \hline 3 & 5 & 12 & 19 & \end{array}$ $Q(x)=3x^2+5x+12 \qquad R=19$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې:**

محترم ښوونکي دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره لومړی مثال حل کړي او د ترکیبي وېش پړاوونه دې توضیح کړي. بیا دې د 38 مخ فعالیت زده کوونکي په ډلو کې حل کړي.

محترم ښوونکي دې دویم، دریم، څلورم او پنځم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې:**

د ترکیبي وېش په واسطه $P(x)=2x^4+x^3-3x^2+2x$ پر $(x+4)$ باندې وویشي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې:**

د لوست له لنډیز څخه وروسته د ارزونې لپاره دې د لوست له پوښتنو څخه د لومړۍ پوښتنې یوه برخه له زده کوونکو وپوښتي.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- که د $P(x)=3x^4-8x^2-11x+1$ پولینوم پر $(x-2)$ ووېشل شي، د وېش حاصل او پاتې عبارت ده له:

$Q(x)=3x^3+6x^2+4x-3$ او $R=-5$

2- د ترکیبي وېش په واسطه ښودلای شو چې $(3x-2)$ د $P(x)=6x^3-4x^2+3x-2$ پولنیوم یو فکتور دی.

$$3x-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

$$P(\frac{2}{3})=6(\frac{2}{3})^3-4(\frac{2}{3})^2+3(\frac{2}{3})-2=\frac{48-48}{27}=0$$

3- که د $P(x)=x^{79}+3x^{24}+5$ پولینوم پر $(x-1)$ وویشل شي، نو پاتې يې مساوي ده په:

$$P(1)=1^{79}+3(1)^{24}+5=1+3+5=9$$

4- که $P(x)=3x^4-8x^2+11x+1$ پولینوم پر $(x+2)$ وویشل شي، نو پاتې يې مساوي ده په: $R=p(-2)=-5$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د ترکیبي ویش په مرسته يې د وېش حاصل او باقیمانده پیدا کړئ.

$(10x^2+2x+11)\div(x+1)$ $\quad$ $(2x^3-7x^2-2x+12)\div(2x-3)$

$(5x^3-3x+7)\div(x+4)$ $\quad$ $(6x^2+15)\div(4x+9)$

$(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$

حل:

a)

10	2	1	-1
	-10	8	
10	-8	9	

$Q(x)=10x-8$

$R=9$

b)

2	-7	-2	12	$3/2$
	3	-6	-12	
2	-4	-8	0	

$2x-3=0$

$2x=3$

$x=\frac{3}{2}$

$$Q(x)=\frac{2x^2-4x-8}{2}=x^2-2x-4 \qquad R=0$$

c)

5	0	-3	7	-4
	-20	80	-308	
5	-20	77	-301	

$Q(x)=5x^2-20x+77 \qquad R=-301$

d)

6	0	15	$-\frac{9}{4}$
	$-\frac{54}{4}$	$\frac{243}{8}$	
6	$-\frac{54}{4}$	$\frac{363}{8}$	

$4x+9=0 \Rightarrow x=-\frac{9}{4}$

$$Q(x)=\frac{6x-\frac{27}{2}}{4}=\frac{3}{2}x-\frac{27}{8} \qquad R=\frac{363}{8}$$

e)

$$\begin{array}{cccc|c} 6 & 2 & -1 & 20 & 1/2 \\ & 3 & \frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \\ \hline 6 & 5 & \frac{3}{2} & \frac{83}{4} & \end{array}$$

$$p-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow p=\frac{1}{2}$$

$$Q(x)=6x^2+5x+\frac{3}{2} \qquad R=\frac{83}{4}$$

2- د ترکیبي ویش په مرسته یې باقیمانده او د ویش حاصل پیدا کړئ.

$(y^5-17y^3-9)\div(y-3)$

$(4x^3-2x^2+5)\div(x-5)$

$(x^3+8x^2+8x+7)\div(x+7)$

حل:

a)

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -17 & 0 & 0 & -9 & 3 \\ & 3 & 9 & -24 & -72 & -216 & \\ \hline 1 & 3 & -8 & -24 & -72 & -225 & \end{array}$$

$$Q(x)=y^4+3y^3-8y^2-24y-72 \qquad R=-225$$

b)

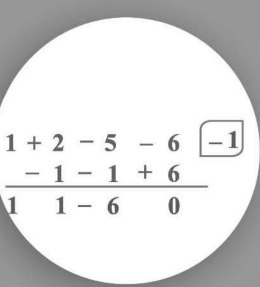
$$\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & 0 & 5 & 5 \\ & 20 & 90 & 450 & \\ \hline 4 & 18 & 90 & 455 & \end{array}$$

$$Q(x)=4x^2+18x+90 \qquad R=455$$

c)

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 8 & 8 & 7 & -7 \\ & -7 & -7 & -7 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$Q(x)=x^2+x+1 \qquad R=0$$



د ترکیبي وېش په مرسته د پولینوم د فکتور
او د پولینوم د قیمت پیدا کول

د درسي کتاب (41) **مخ** **د لوست وخت**: (1 ساعت درسی)

د زده کړې موخې (پوهنیزې، مهارتي ، ذهنیتي)	د دې لوست په پای کې زده کوونکو باید: • د ترکیبي وېش په مرسته د پولینوم د فکتور او قیمت پیدا کول زده کړي. • د ترکیبي وېش په واسطه د پولینومونو قیمت او فکتور پیدا کړای شي. • د ترکیبي وېش په واسطه د پولینومي معادلې جذرونه پیدا کړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حلولو کې له ترکیبي وېش څخه استفاده وکړای شي او اهمیت یې درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له لومړینو فعالیتونو څخه وروسته چې په مخکنیو لوستونو کې ویل شوي دي، د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ: 1 9 27 27 | −3 −3 −18 −27 1 6 9 0 $Q(x) = x^2 + 6x + 9$ $R = 0$ څرنګه چې $R = 0$ دی، نو $(x+3)$ ددې پولینوم یو فکتور دی.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې**:

محترم ښوونکي دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره لومړی، دویم او دریم مثال حل کړي او د 42 مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب یې داسې دی:

1	−1	10	5	1
	1	0	10	
1	0	10	15	

نو د $(x = 1)$ لپاره ددې پولنیوم قیمت 15 دی.

1	−1	10	5	3
	3	6	48	
1	2	16	53	

نو د $(x = 3)$ لپاره ددې پولنیوم قیمت 53 دی. څلورم مثال دې حل شي، په پنځم مثال کې د ترکیبي وېش په واسطه د پولینومي معادلې د جذرونو پیدا کول توضیح کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره د ترکیبي وېش په مرسته x په راکړل شوو قیمتونو کې د لاندې پولنیومونو قیمت پیدا کړئ:

$P(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x \quad : \quad P(-4) = (392)$

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 2 \quad : \quad P(3) = (31)$

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

د لوست د ارزونې لپاره لاندې پوښتنې له زده کوونکو وکړئ:

1- د ترکیبي وېش په واسطه د k قیمت پیدا کړئ، که $(x-2)$ د $x^3 + 3x^2 - x + k$ پولینوم یو فکټور وي چې ځواب یې داسې دی:

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 3 & -1 & k & 2 \\ & 2 & 10 & 18 & \\ \hline 1 & 5 & 9 & k+18 & \end{array}$$

$k + 18 = 0$

$k = -18$

2- د ترکیبي وېش په واسطه د k قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ، چې $(x+3)$ د $kx^3 - 2x^2 + x - 6$ پولینوم یو فکټور وي، چې ځواب یې داسې دی:

$$\begin{array}{cccc|l} k & -2 & 1 & -6 & -3 \\ & -3k & 9k+6 & -21-27k & \\ \hline k & -3k-2 & 7+9k & -27-27k & \end{array}$$

$-27 - 27k = 0$

$k = -1$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د الجبري افادو د مربع جذر پیدا کول

1: د تجزیې په واسطه:

$$\sqrt{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{6}xy + \frac{1}{16}y^2} = ?$$

$$\sqrt{\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{6}xy + \frac{1}{16}y^2} = \sqrt{(\frac{1}{3}x)^2 + 2(\frac{1}{3}x)(\frac{1}{4}y) + (\frac{1}{4}y)^2} = \sqrt{(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y)^2} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y$$

2: د وېش په واسطه: $\sqrt{16x^4 - 24x^3 + 25 - 12x + 4}$ عبارت دی له:

$$\begin{array}{r|l} & 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline 4x^2 & 16x^4 - 24x^3 + 25x^2 - 12x + 4 \\ & -16x^4 \\ \hline 8x^2 - 3x & \quad -24x^3 + 25x^2 \\ & \quad \mp 24x^3 \pm 9x^2 \\ \hline 8x^2 - 6x + 2 & \quad 16x^2 - 12x + 4 \\ & \quad _16x^2 \mp 12x \pm 4 \\ \hline & \quad 0 \end{array}$$

$\frac{-24x^3}{8x^2} = -3x \qquad \frac{16x^2}{8x^2} = 2$

نو مطلوب جذر $\pm(4x^2 - 3x + 2)$ دی.

په همدې ډول $\sqrt{\frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2+\frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9}}$ پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{r|l}
 & \frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3} \\ \hline
 & \frac{x^4}{4}-2x^3+4x^2+\frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9} \\
\frac{x^2}{2} & \pm\frac{x^4}{4} \\ \cline{2-2}
x^2-2x & -2x^3+4x^2 \\
 & \mp 2x^3 \pm 4x^2 \\ \cline{2-2}
x^2-4x+\frac{a}{3} & \frac{ax^2}{3}-\frac{4ax}{3}+\frac{a^2}{9} \\
 & -\frac{ax^2}{3}\mp\frac{4ax}{3}\pm\frac{a^2}{9} \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

ځواب: $\pm(\frac{x^2}{2}-2x+\frac{a}{3})$

- د $(2a^2-5a+3)(2a^2+5a-12)(a^2+3a-4)$ مربع جذر عبارت دی له:

$(2a^2-5a+3)(2a^2+5a-12)(a^2+3a-4)=(2a-3)(a-1)(2a-3)(a+4)(a-1)(a+4)$
$=(2a-3)(2a-3)(a-1)(a-1)(a+4)(a+4)$

نو مربع جذر یې مساوي دی په: $\pm(2a-3)(a-1)(a+4)$

- له $9x^4-12x^3+10x^2-3x-3$ سره:

a: کومه افاده جمع کړو، تر څو مکمل مربع شي.

b: کومه افاده ترې تفریق کړو، تر څو مکمل مربع شي.

c: د x په کوم قیمت مکمل مربع کیږي.

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x^2-2x+1 \\ \hline
 & 9x^4-12x^3+10x^2-3x-3 \\
3x^2 & -9x^4 \\ \cline{2-2}
6x^2-2x & -12x^3+10x^2 \\
 & \mp 12x^3 \pm 4x^2 \\ \cline{2-2}
6x^2-4x+1 & 6x^2-3x-3 \\
 & \underline{-6x^2 \pm 4x \pm 1} \\
 & x-4
\end{array}$$

a: $-x+4$ ور سره جمع شي، ترڅو مکمل مربع شي.

b: $x-4$ ترې تفریق شي، تر څو مکمل مربع شي.

c: $x-4=0 \Rightarrow x=4$ نو د $x=4$ په قمیت مکمل مربع کیږي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- د ترکیبي ویش په مرسته وښایاست چې $(x+\frac{1}{2})$ د $20x^3+7x+6$ پولینوم یوفکټور دی او $(x+1)$ د x^4-2x^2+x+2 پولینوم یو فکټور دی.

حل:

$$\begin{array}{rrrr|l} 20 & 0 & 7 & 6 & -1/2 \\ & -10 & 5 & -6 & \\ \hline 20 & -10 & 12 & 0 & \end{array}$$

څرنگه چې $R=0$ دی؛ نو $(x+\frac{1}{2})$ ددې پولینوم یو فکټور دی.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ & -1 & 1 & 1 & -2 & \\ \hline 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & \end{array}$$

څرنگه چې $R=0$ دی؛ نو $(x+1)$ ددې پولینوم یو فکټور دی.

2- ایا $(x-0.1)$ د $10x^3-11x^2+1$ د پولینوم یو فکټور دی؟ ولې؟

حل:

$$\begin{array}{rrrr|l} 10 & -11 & 0 & 1 & 0.1 \\ & 1 & -1 & -0.1 & \\ \hline 10 & -10 & -1 & 0.9 & \end{array}$$

څرنگه چې $R=0.9\neq 0$ دی نو $(x-0.1)$ ددې پولینوم یو فکټور نه دی.

3- د ترکیبي ویش په مرسته د y^3-6y^2-y+6 پولینوم قیمت د $y=6$ لپاره پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -6 & -1 & 6 & 6 \\ & 6 & 0 & -6 & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & \end{array}$$

نو $y=6$ لپاره ددې پولینوم قمیت صفر دی.

4- که(1) د $x^3+x^2-10x+8=0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي ویش په مرسته یې نور جذرونه یې پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 1 & -10 & 8 & 1 \\ & 1 & 2 & -8 & \\ \hline 1 & 2 & -8 & 0 & \end{array}$$

$Q(x)=x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$

$x=-4 \qquad x=2$

ددې معادلې نور جذرونه 2 او 4− دي.

5- که د (-2) عدد د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي ویش په مرسته یې د k قیمت پیدا کړئ؟

حل:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & k & 8 & -2 \\ & -2 & -4 & -2k+8 & \\ \hline 1 & 2 & k-4 & -2k+16 & \end{array}$$

$$-2k+16=0$$

$$-2k=-16$$

$$k=8$$

1- د k قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ؛ چې:

a: که $(x+5)$ د $P(x)=x^3+kx+125$ پولینوم یو فکتور وي.

b: که $(x-1)$ د $Q(x)=2x^4-3x^3-x-2k$ د پولینوم یو فکتور وي.

c: که د $P(x)=x^3+2x^2-3kx-10$ پولینوم پر ($x+3$) وویشل شي او د 8 عدد باقي شي.

حل:

$a)$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & k & 125 & -5 \\ & -5 & 25 & -5k-125 & \\ \hline 1 & -5 & k+25 & -5k & \end{array}$$

$$-5k=0 \Rightarrow k=0$$

او یا

$$P(-5)=(-5)^3-5k+125=0$$
$$-125-5k+125=0$$
$$-5k=0$$
$$k=0$$

که $k=0$ وي، نو $(x+5)$ د راکړل شوي پولینوم یو فکتور دی.

$b)$

$$Q(1)=2(1)^4-3(1)^3-(1)-2k=0$$
$$2-3-1-2k=0$$
$$-2k-2=0$$
$$-2k=2$$
$$\boxed{k=-1}$$

که $k=-1$ وي، نو $(x-1)$ د راکړل شوي پولینوم یو فکتور دی.

c)

$$P(-3)=(-3)^3+2(-3)^2+9k-10=8$$
$$-27+18+9k-10=8$$
$$-19+9k=8$$
$$9k=27$$
$$\boxed{k=3}$$

2- د ترکیبي ویش په مرسته یې د ویش حاصل او پاتې پیدا کړئ.

$(x^5+4x^4+x^2-3x-28)\div(x+4)$ $\qquad$ $(5x^4-6x^2+3x-4)\div(x+4)$

$(30x^3-20x^2-100x+1000)\div(x-10)$ $\qquad$ $(10x^2-31x+24)\div(x-\frac{3}{2})$

حل:

a)

1	4	0	1	−3	−28	−4
	−4	0	0	−4	28	
1	0	0	1	−7	0	

$Q(x)=x^4+x-7 \quad , \qquad R=0$

b)

30	−20	−100	1000	10
	300	2800	27000	
30	280	2700	28000	

$Q(x)=30x^2+280x+2700 \quad , \qquad R=28000$

c)

5	0	−6	3	−4	−4
	−20	80	−296	1172	
5	−20	74	−293	1168	

$Q(x)=5x^3-20x^2+74x-293 \quad , \qquad R=1168$

d)

10	−31	24	3/2
	15	−24	
10	−16	0	

$Q(x)=10x-16 \quad , \qquad R=0$

3- د فکتور د قضیې په مرسته وښایاست چې $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ د پولینوم یو فکتور دی.

حل: څرنګه چې $P(1)=(1^3)-4(1)^2+1+2=1-4+1+2=0$ دی نو $(x-1)$ د راکړل شوي پولینوم یو فکتور دی.

4- د فکتور د قضیې په مرسته وښایاست چې $(x-\frac{1}{2})$ د $P(x)=x^3-\frac{1}{8}$ د پولینوم یو فکتور دی.

حل: څرنګه چې $P(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^3-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=0$ دی نو $(x-\frac{1}{2})$ د $P(x)=x^3-\frac{1}{8}$ د پولینوم یو فکتور دی.

5- د ترکیبي ویش په مرسته د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $P(x)=5x^2+x-9$ د پولینوم قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -9 & -1/2 \\ & -\frac{5}{2} & \frac{3}{4} & \\ \hline 5 & -\frac{3}{2} & -\frac{33}{4} & \end{array}$$

نو د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره ددې پولینوم قیمت $-\frac{33}{4}$ دی.

6- د ترکیبي ویش په مرسته د $x=3$ لپاره د $K(x)=2x^3-3x^2+4x+1$ د پولینوم قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 & 3 \\ & 6 & 9 & 39 & \\ \hline 2 & 3 & 13 & 40 & \end{array}$$

د $x=3$ لپاره ددې پولینوم قیمت 40 دی.

7- د ترکیبي ویش په مرسته وښایاست چې د 3 عدد د $x^3-3x^2+x-3=0$ د معادلې یو حل (جذر) دی.

حل:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -3 & 3 \\ & 3 & 0 & 3 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

څرنګه چې $R=0$ دی، نو 3 عدد ددې پولینومي معادلې یو جذر حل دی.

8- د فکتور د قضیې په مرسته وښایاست چې د -1 او 2 عددونه د $x^4-5x^2+4=0$ د معادلې حلونه (جذرونه) دي.

حل:

$$(-1)^4-5(-1)^2+4=1-5+4=0$$
$$(2)^4-5(2)^2+4=16-20+4=0$$

نو د 1- او 2 عددونه د راکړل شوې معادلې جذرونه دي.

9- د ترکیبي ویش په مرسته د k قیمت پیدا کړئ چې که $(x+3)$ د $P(x)=3x^3+kx^2-22x+24$ پولینوم یو فکتور وي.

حل:

$$\begin{array}{rrrr|r} 3 & k & -22 & 24 & -3 \\ & -9 & -3k+27 & 9k-15 & \\ \hline 3 & k-9 & -3k+5 & 9k+9 & \end{array}$$

$9k+9=0 \Rightarrow k=-1$

په هغه صورت کې چې $(x+3)$ د راکړل شوي پولینوم یو فکتور وي، نو $k=-1$ دی.

10- د ترکیبي ویش په مرسته یې د ویش حاصل او باقي پیدا کړئ.

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$ $\qquad$ $(x^3-x^2-14x+11)\div(x-4)$

$(7x^4+41x^2-6)\div(x+6)$ $\qquad$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

حل:

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -14 & 11 & 4 \\ & 4 & 12 & -8 & \\ \hline 1 & 3 & -2 & 3 & \end{array}$$

$Q(x)=x^2+3x-2 \quad , \quad R=3$

په همدې ډول ددې پوښتنې نورې 3 برخې یې هم حلیږي.

11- د b او c قیمتونه په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $P(x)=x^4+6x^3-20x^2+bx+c$ پولینوم پر x^2-3x+2 وویشو، باقي صفر شي.

حل:

$$\begin{array}{l|l} x^4+6x^3-20x^2+bx+c & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} -x^4 \mp 3x^3 \pm 2x^2 & x^2+9x+5 \\ \hline \quad 9x^3-22x^2+bx & \\ \quad -9x^3 \mp 27x^2 \pm 18x & \\ \hline \qquad 5x^2+bx-18x+c & \\ \qquad -5x^2 \quad \mp 15x \pm 10 & \\ \hline \qquad\quad bx-3x-10+c=0 & \\ \qquad\quad (b-3)x-10+c=0 & \end{array}$$

په پایله کې $b=3$ و $c=10$ دی.

12- د m قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $\mathrm{K(x)=2x^3+5x^2-mx+4}$ پولینوم پر x^2+2x-1 وویشو او باقي صفر شي.

حل:

$$\begin{array}{l|l} 2x^3+5x^2-mx+4 & x^2+2x-1 \\ \underline{\pm 2x^3 \pm 4x^2 \mp 2x} & 2x+1 \\ \quad x^2-mx+2x+4 & \\ \quad \underline{\pm x^2 \qquad \pm 2x \mp 1} & \\ \qquad -mx+5=0 & \\ \qquad -mx=-5 \qquad m=\frac{5}{x} & \end{array}$$

که $m=\frac{5}{x}$ وي، نو د $K(x)=2x^3+5x^2-1$ پولينوم پر x^2+2x-1 پوره وېشل کيږي.

13- که $K=3a(x-1)^2-a(x-1)-4$ او $L=16+b(x-1)-3b(x-1)^2$ وي $Kb+La$ پيدا کړئ.

حل: لومړی پولینوم په b کې او دویم پولینوم په a کې ضربوو:

$$Kb=3ab(x-1)^2-ab(x-1)-4b$$
$$La=-3ab(x-1)^2+ab(x-1)+16a$$
$$Kb+La=-4b+16a$$
$$=16a-4b$$

14- د x په کوم قيمت د $P(x)=12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولينوم پر $(3x^2-1)$ پوره ويشل کيږي؟

حل:

$$\begin{array}{l|l} 12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\ \underline{\pm 12x^4 \qquad \mp 4x^2} & 4x^2+x-3 \\ \quad 3x^3-9x^2+x & \\ \quad \underline{\pm 3x^3 \qquad \mp x} & \\ \qquad -9x^2+2x+5 & \\ \qquad \underline{\mp 9x^2 \qquad \pm 3} & \\ \qquad\quad 2x+2=0 & \\ \qquad\quad x=-1 & \end{array}$$

يا په بل عبارت $P(-1)=0$ کيږي.

15- د p دکوم قيمت لپاره د $K(x)=3x^3-7x^2-9x+p$ پولينوم پر $(x-13)$ پوره د وېشلو وړ دی؟

حل:

$$K(13)=3(13)^3-7(13)^2-9(13)+P=6591-1183-117+P=0$$
$$\Rightarrow p=-5291$$

16- که د $P(x)=2x^3-x^2+3x-1$ پولينوم پر $(2x+1)$ وويشل شي، د ويش د عمليې د سرته رسولو پرته ويلای شئ

چې پاتې(باقي مانده) به څومره وي؟

$a)\ -3$ $\qquad$ $b)\ -\frac{3}{2}$ $\qquad$ $c)\ 3$ $\qquad$ $d)\ \frac{7}{2}$

حل: د a جز سم دی ځکه چې:

$$2x+1=0$$
$$2x=-1$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=2(-\frac{1}{2})^3-(-\frac{1}{2})^2+3(-\frac{1}{2})-1$$
$$=2(-\frac{1}{8})-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-1=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{3}{2}-1=\frac{-1-1-6-4}{4}=\frac{-12}{4}=-3$$

17- د m قیمت به څو وي، که د $P(x)=5x^2+6x-7$ پولینوم پر $(x+m)$ وویشل شي تر څو باقي مانده (1) شي؟

a) 2 $\qquad$ b) $-\frac{4}{5}$ $\qquad$ c) -4 $\qquad$ d) a او b سم دي

حل: د d جز سم دی، ځکه چې:

$$P(-m)=5(-m)^2-6m-7=5m^2-6m-7$$
$$5m^2-6m-7=1$$
$$5m^2-6m-8=0$$
$$m=\frac{6\pm\sqrt{36+160}}{10}=\frac{6\pm14}{10}=\begin{cases}2\\-\frac{4}{5}\end{cases}$$

$m=2$ يا $m=-\frac{4}{5}$

18- که د $P(x)=x^3+3x^2-5x-8$ پولینوم، پر $(x+3)$ وویشل شي د ویش د عملیې له سرته رسولو پرته ووایاست چې باقي څومره ده؟

$a)$ صفر $\qquad$ $b)\ 13$ $\qquad$ $c)\ -23$ $\qquad$ $d)\ 7$

حل:

$$P(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-5(-3)-8$$
$$P(-3)=-27+27+15-8=7$$

څرنګه چې $R=7$ دی، نو د d جز سم دی.

19- که چیرې $x=4$ ، $y=-3$ او $z=2$ وي، د لاندې الجبري افادو قیمت پیدا کړئ.

$a: x^2yz+zxy^2+3xyz^2$ $\qquad$ $b: \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{4}z^2$

حل:

a) $(4)^2(-3)(2)+(2)(4)(-3)^2+3(4)(-3)(2)^2 \Rightarrow -96+72-144=-168$

b) $\frac{1}{2}(4)^2-\frac{1}{3}(-3)^2+\frac{1}{4}(2)^2$

$\frac{1}{2}(16)-\frac{1}{3}(9)+\frac{1}{4}(4)$

$8-3+1=6$

20- د x د راکړ شوو قیمتونو لپاره د ترکیبي ویش په مرسته د لاندې پولینومو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x)=2x^3+3x^2-2x+5 \quad : \quad x=2$

$P(x)=3x^3+4x^2-5x+6 \quad : \quad x=-1$

$P(x)=2x^4-5x^3+4x-1 \quad : \quad x=1$

$P(x)=4x^4+6x^3+x^2+x-3 \quad : \quad x=-2$

حل:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 & 2 \\ & 4 & 14 & 24 & \\ \hline 2 & 7 & 12 & 29 & \end{array}$$

$P(2)=29$

په همدې ډول نور یې هم حلیږي.

21- د لاندې معادلو یو، یو جذر راکړ شوی دی، د ترکیبي ویش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

$x^3-3x^2+x-3=0$ یو جذر یې (3) دی.

$x^3-5x^2+7x+13=0$ یو جذر یې (-1) دی.

$x^4-5x^2+4=0$ یو جذر یې (-1) دی.

$x^4-x^3-9x^2-11x-4=0$ یو جذر یې (-1) دی.

حل:

a)

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & -3 & 3 \\ & 3 & 0 & 3 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \qquad (x-3)(x^2+1)=0$$

څرنګه چې $x^2=-1$ کیږي، نو په حقیقي عددونه کې جذر نه لري.

په دې معنا چې معادله یو حقیقي جذر لري چې د (3) عدد دی.

b)

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 7 & 13 & -1 \\ & -1 & 6 & -13 & \\ \hline 1 & -6 & 13 & 0 & \end{array}$$

$(x^2-6x+13)(x+1)=0$ معادله یو حقیقي جذر لري چې د (1-) عدد دی.

c)

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 & 4 & -1 \\ & -1 & 1 & 4 & -4 & \\ \hline 1 & -1 & -4 & 4 & 0 & \end{array}$$

$(x+1)(x^3-x^2-4x+4)=0$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 4 & 1 \\ & 1 & 0 & -4 & \\ \hline 1 & 0 & -4 & 0 & \end{array}$$

$(x+1)(x-1)(x^2-4)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)=0$

په نتیجه کې د معادلې جذرونه عبارت دي له: $x=2$, $x=-2$, $x=-1$, $x=1$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -9 & -11 & -4 & -1 \\ & -1 & 2 & 7 & 4 & \\ \hline 1 & -2 & -7 & -4 & 0 & \end{array}$$

$(x+1)(x^3-2x^2-7x-4)=0$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -7 & -4 & -1 \\ & -1 & 3 & 4 & \\ \hline 1 & -3 & -4 & 0 & \end{array}$$

$(x+1)(x+1)(x-4)(x+1)=0$

$x_1=-1 \qquad x_2=-1 \qquad x_3=4 \qquad x_4=-1$

22- که $P(x)=0$ وي، د دې پولینوم درجه څو ده؟

$a)1$ $\qquad b)-1$ $\qquad c)$ صفر $\qquad d)$ تعریف شوې نه ده

حل: د d جز سم دی د صفري پولینوم درجه تعریف شوې نه ده

23- د هغه مستطیل له مساحت څخه چې بعدونه یې $(x+5)$ او $(x+2)$ وي، د هغه مستطیل مساحت تفریق کړئ چې بعدونه یې $(x+3)$ او $(x-1)$ وي.

حل:

$(x+2)(x+5)-(x+1)(x+3)=x^2+7x+10-(x^2+4x+3)$
$=x^2+7x+10-x^2-4x-3=3x+7$

24- که $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ وي او $a=13$ ، $b=5$ ، $c=12$ او $P=\dfrac{a+b+c}{2}$ وي، د A قیمت پیدا کړئ.

حل:

$P=\dfrac{13+5+12}{2}=15$
$A=\sqrt{15(15-13)(15-5)(15-12)}=\sqrt{(30)(10)(3)}=\sqrt{900}=30$

25- که $(x-1)^3$ او x^3+ax^2+bx+c معادل پولینومونه وي، د b قیمت مساوي دی په:

$a)\ 1$ $\qquad b)\ 3$ $\qquad c)\ -3$ $\qquad d)\ -1$

حل: که $x^3+ax^2+bx+c=x^3-3x^2+3x-1$ وي؛ ($b=3$) ، نو د b جز سم دی.

26- د $(a-\dfrac{2}{a-1})$ $(a\div\dfrac{a+1}{a-1})$ افادې حاصل مساوي دی په:

a) $a(a+1)$ $\qquad$ b) $a(a-2)$ $\qquad$ c) $\dfrac{a-2}{a}$ $\qquad$ d) $\dfrac{a-1}{a}$

حل: $\dfrac{a(a-1)}{a+1}\cdot\dfrac{a^2-a-2}{a-1}=\dfrac{a(a-1)(a-2)(a+1)}{(a+1)(a-1)}=a(a-2)$ وي، نو د b جز سم دی.

27- د $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) x^2-y^2 $\qquad$ b) x^2+y^2 $\qquad$ c) $2x^2-y$ $\qquad$ d) $x-y$

حل: $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)=(x-y)(x+y)=x^2-y^2$ ؛نو a جز سم دی.

28- لاندې پولینومونه په نزولي ډول (Descending Order) ترتیب او ووایاست چې درجې یې څو دي؟

a) $-5x^2+3x^5+9$ $\qquad$ b) $-x^2+xy^2z^3-x^5$ $\qquad$ c) 3

حل: a) $3x^5-5x^2+9\ ,\ n=5$ $\qquad$ b) $-x^5-x^2+xy^2z^3\ ,\ n=5$ $\qquad$ c) $3\ ,\ n=0$

29- د $Q(x)=x^2+3x-5$ په پولینوم کې $Q(-1)$ مساوي دی، په:

$a)\ 7$ $\qquad b)\ -7$ $\qquad c)\ 1$ $\qquad d)\ -1$

حل: $Q(-1)=(-1)^2+3(-1)-5=1-3-5=-7$ ؛ نو b جز سم دی.

30- که $P(x)=x^2-2x+3$ او $Q(x)=2x^2+3x-1$ پولینومونه وي، د لاندې افادو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x)-Q(x)$ $\qquad P(0)+Q(0)$ $\qquad P(1)-Q(-1)$
$P(x)-P(x)$ $\qquad [P(x)+Q(x)]+p(x)$

حل:

$P(x)-Q(x)=x^2-2x+3-(2x^2+3x-1)=x^2-2x+3-2x^2-3x+1=-x^2-5x+4$
$P(x)-P(x)=(x^2-2x+3)-(x^2-2x+3)=0$
$P(0)+Q(0)=3-1=2$
$[P(x)+Q(x)]+P(x)=3x^2+x+2+x^2-2x+3=4x^2-x+5$
$P(1)-Q(-1)=1-2+3-(2-3-1)=2-(-2)=2+2=4$

31- لاندې پولینومونه نظر y ته په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x^2y-3xy^2+x^3+y^3$ $\qquad$ $4xy^3-3x^3y+2x^2y^2+x^4+y^4$

حل:

$y^3-3xy^2+4x^2y+x^3$ $\qquad$ $y^4+4xy^3+2x^2y^2-3x^3y+x^4$

32- په لاندې الجبري افادو کې پولینومونه، ناطقې الجبري افادې او غیر ناطقې الجبري افادې په نښه کړئ

$13\ ,\ \sqrt{2}x\ ,\ 0\ ,\ \dfrac{3x^2}{2}\ ,\ \sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\ ,\ y^2-\dfrac{1}{y^2}$

حل:

a) $\sqrt{2}\,x$ یو پولنیوم دی او هم یوه ناطقه الجبري افاده ده.

b) $\dfrac{3x^2}{2}$ یو پولنیوم دی او هم یوه ناطقه الجبري افاده ده.

c) 13 یو ثابت پولینوم دی.

d) 0 صفري پولینوم دی.

e) $\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$ یوه غیر ناطقه الجبري افاده ده.

f) $y^2-\dfrac{1}{y^2}$ پولینوم نه دی، خو ناطقه الجبري افاده ده.

33- د $(1+2x+3x^2)+(3x-5-2x^2)+(-x^2-5x+4)$ افادې حاصل مساوي دی په:

$a)$ 1 $\qquad$ $b)$ صفر $\qquad$ $c)$ -1 $\qquad$ $d)$ 2

حل: $1+2x+3x^2+3x-5-2x^2-x^2-5x+4=3x^2-3x^2+5x-5x+5-5=0$؛ د b جز سم دی.

34- د دوو الجبري افادو د ضرب حاصل $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ دی. که یوه افاده یې $(a+b+c)$ وي، بله افاده پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ دی ؛ نو بله افاده

$(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ ده.

35- د ویش حاصل یې پیدا کړئ.

$(12x^4+3x^3-13x^2+x+5)\div(3x^2-1)$ $\quad\quad$ $(a^3+b^3)\div(a+b)$

$(4x^3-10x^2+12x+6)\div(2x+1)$ $\quad\quad$ $(a^5-b^5)\div(a-b)$

$\dfrac{x^{a-2}}{x}$ $\quad\quad$ $\dfrac{-m^a}{m^b}$

حل:

a)

$$\begin{array}{l|l} a^3+b^3 & a+b \\ \underline{-a^3 \quad \pm a^2b} & a^2-ab+b^2 \\ \quad -ab+b^3 & \\ \quad \underline{\mp a^2b \quad \mp ab^2} & \\ \quad ab^2+b^3 & \\ \quad \underline{-ab^2 \quad \pm b^3} & \\ \quad\quad 0 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l|l} 12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\ \underline{\pm 12x^4 \quad \mp 4x^2} & 4x^2+x-3 \\ \quad 3x^3-9x^2+x & \\ \quad \underline{\pm 3x^3 \quad \mp x} & \\ \quad\quad -9x^2+2x+5 & \\ \quad\quad \underline{\mp 9x^2 \quad \pm 3} & \\ \quad\quad\quad 2x+2 & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-10x^2+12x+6 & 2x+1 \\ \underline{\pm 4x^3 \pm 2x^2} & 2x^2-6x+9 \\ \quad -12x^2+12x & \\ \quad \underline{\mp 12x^2 \mp 6x} & \\ \quad\quad 18x+6 & \\ \quad\quad \underline{\pm 18x \pm 9} & \\ \quad\quad\quad -3 & \end{array}$$

$$d)\quad \frac{a^5-b^5}{a-b}=\frac{(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^2+b^4)}{(a-b)}=(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^2+b^4)$$

او یا:

$$
\begin{array}{l|l}
a^5 - b^5 & a - b \\
\underline{_a^5 \mp a^4 b} & a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4 \\
\quad a^4 b - b^5 & \\
\quad \underline{_a^4 b \mp a^3 b^2} & \\
\qquad a^3 b^2 - b^5 & \\
\qquad \underline{_a^3 b^2 \mp a^2 b^3} & \\
\qquad\quad a^2 b^3 - b^5 & \\
\qquad\quad \underline{_a^2 b^3 \mp ab^4} & \\
\qquad\qquad ab^4 - b^5 & \\
\qquad\qquad \underline{_ab^4 \mp b^5} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

$e)\quad \dfrac{x^{a-2}}{x} = x^{a-2-1} = x^{a-3}$

$f)\quad \dfrac{-m^a}{m^b} = -m^{a-b}$

36- ضرب یې کړئ.

$(a^{2x} - 2)(a^{2x} - 2) \qquad (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4})$

$(e^x + 1)(e^x - 1) \qquad (m^2 - 2n^2)(2m^2 - n^2)$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2) \qquad (2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$

حل:

$(a^{2x} - 2)(a^{2x} - 2) = a^{4x} - 2a^{2x} - 2a^{2x} + 4 = a^{4x} - 4a^{2x} + 4$

$(e^x + 1)(e^x - 1) = e^{2x} - 1$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2) = 0.001x^6$

$(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}x^2 + \frac{5}{16}x + \frac{1}{8}$

$(m^2 - 2n^2)(2m^2 - n^2) = 2m^4 - m^2n^2 - 4m^2n^2 + 2n^2 = 2m^4 - 5m^2n^2 + 2n^4$

$(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn) = (\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn) = \frac{125}{8}m^3n^3$

37- لومړی لاندې افادې ساده او بیا یې جمع کړئ.

$(a-1)+1-(a-1)-3$ $\qquad -(10mn-m)-(m^2+m)+m^2$

$(y^2-1)+(y^2-1)$ $\qquad [-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]$

$10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]$ $\qquad 10(x+1)-(x+1)-3(x+2)$

$mn-4+mn-5$

حل:

a) $(a-1)+1-(a-1)-3=a-1+1-a+1-3=-2$

b) $-(10mn-m)-(m^2+m)+m^2=-10mn+m-m^2-m+m^2=-10mn$

c) $(y^2-1)+(y^2-1)=2y^2-2$

d) $[-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]=-4a+4b-5+2a+b-a+b=-3a+6b-5$

e) $10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]=10[-\{-x^2+1+5\}-x^2+2x]$

$=10[x^2-6-x^2+2x]=10[2x-6]\Rightarrow 20x-60$

f) $10(x+1)-(x+1)-3(x+2)=10x+10-x-1-3x-6=6x+3$

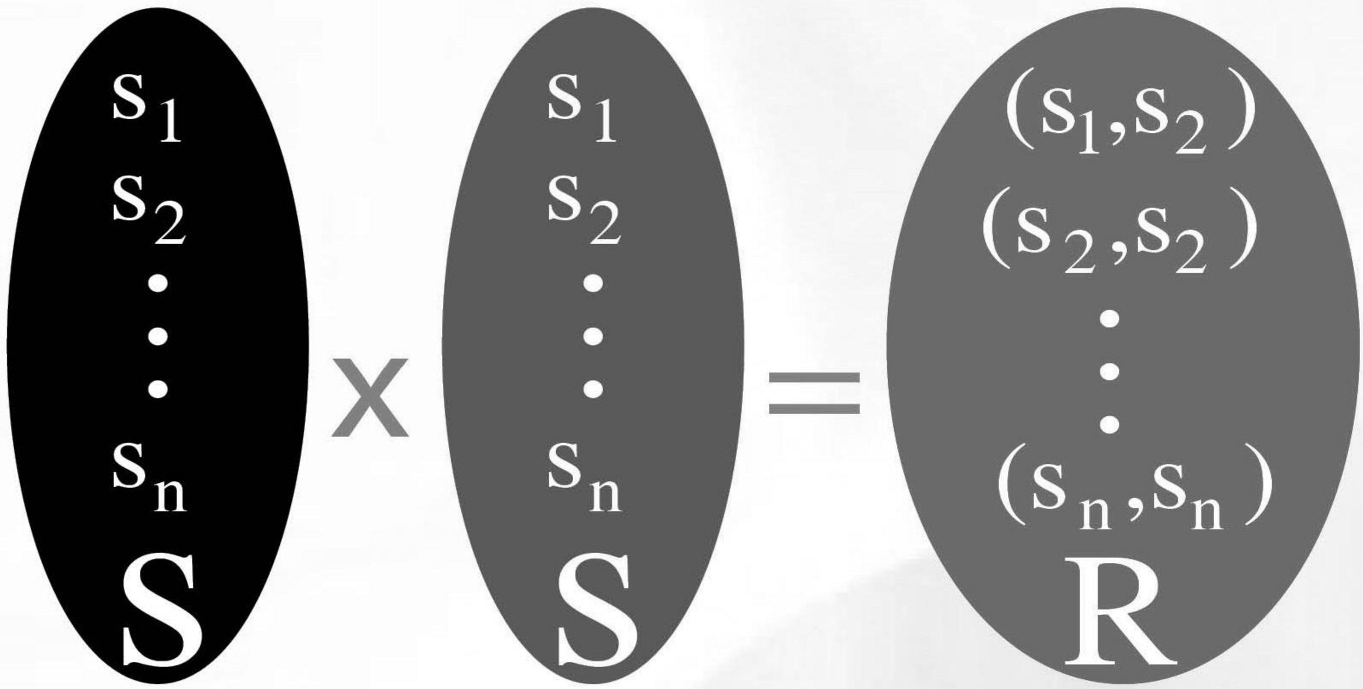
g) $mn-4+mn-5=2mn-9$

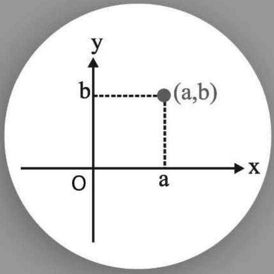
48- د لاندې کوم مونوم (یو حده) درجه صفر ده؟

$a)\ x$ $\qquad b)\ \sqrt{2}x$ $\qquad c)\ \sqrt{2}$

حل: د c جز سم دی.

دویەم چپرکی
رابطه


s_1
s_2
s_n
S
x
s_1
s_2
s_n
S
=
(s_1, s_2)
(s_2, s_2)
(s_n, s_n)
R



مرتبې جوړې او کارتيزيني مستوي

د درسي کتاب: (53)مخ **د لوست وخت:** (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي بايد: • مرتبې جوړې او کارتيزيني مستوي وپيژني. • په دې وپوهيږي چې د نقطو وضعيه کميات په کومه ناحيه کې مثبت او پـه کومـه ناحيـه کې منفي دي. • هغه نقطې چې وضعيه کميات يې راکړل شوي وي په کا رتيزينـي مـستوي کې تعين کـړای شي. • د رياضي دمسايلو په حل کې د نقطو د موقعيت پيدا کولو اهميت درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5 دقيقې)	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته له چارت څخه په استفادې او يا د تختې پر مخ د مرتبو جوړو د مساوي کېدو شرط دې توضيح شي د (x,y) او (a,b) مرتبې جوړې هغه وخت سره مساوي دي چې $x=a$ او $y=b$ وي او $(a,b)\neq(b,a)$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې:

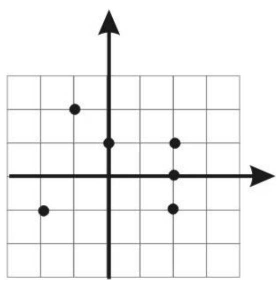
د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره دې لومړی مثال حل شي او د (53) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب يې په لاندې ډول دی:

$(a+1,2b-3)=(0,-1)$

$a+1=0\Rightarrow a=-1$

$2b-3=-1\Rightarrow 2b=2\Rightarrow b=1$

کارتيزيني مستوي، قايم محورونه او د وضعيه کمياتو مبدا دې په شکل کې ور وښودل شي او د محورونو مثبت او منفي جهتونه دې واضح شي. بيا دې د دويم او دريم مثال نقطې په شکل کې وټاکل شي. بيا دې زده کوونکي د (55) مخ فعاليت په مناسبو ګروپونو کې سرته ورسوي چې شکل يې پـه لانـدې ډول دی:



$(2,0),(2,1),(-2,-1),(-1,2),(2,-1)$ او $(0,1)$

د زده کړې پياوړتيا: (7) دقيقې:

د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره لومړی او دويمه پوښتنه حل کړي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**:

د لوست له لنډیز څخه وروسته دریمه پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

په عمومي حالت کې

$(a,b)\neq(b,a)$

$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow[(a=c)\wedge(b=d)]$

a: اگر $(x-2y,2x+y)=(3,1)$ وي د x او y قیمتونه عبارت دي له:

$$\begin{cases}x-2y=3\\2x+y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y=3\\4x+2y=2\end{cases}\Rightarrow 5x=5\Rightarrow x=1\Rightarrow y=-1$$

b: که د $(2,y-1)$ او $(x+3,-3)$ دوې مرتبې جوړې سره مساوي وي، د x او y قیمتونه مساوي دي په:

$x=-1$

$y=-2$

c: که د $(4a+1,2b+a)=(5,3a-4b)$ وي، د a او b قیمتونه مساوي دي په:

$a=1$

$b=3$

d: $(2-3a,3b-3)=(2b+3,1+a)$ وي، د a او b قیمتونه عبارت دي له:

$a=-1$

$b=1$

e: که $(-2^n+1,y+1,2x-3)=(-7,3n,5)$ وي، د $2n+y-x$ قیمت عبارت دی له:

$-2^n+1=-7$	$y+1=3n$	$2x-3=5$
$n=3$	$y=8$	$x=4$

$\Rightarrow 2n+y-x=6+8-4=10$

f: که $(3x-2y,2^{x+y})=(x,8^{-2})$ وي، د (x,y) مرتبه جوړه مساوي ده په:

$3x-2y=x\Rightarrow 2x=2y$

$2^{x+y}=8^{-2}=2^{-6}\Rightarrow x+y=-6$

ددې معادلو له حل څخه لرو چې:

$y=-3$ و $x=-3\Rightarrow(x,y)=(-3,-3)$

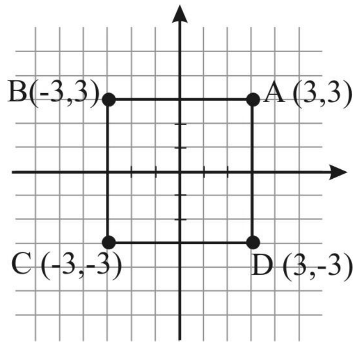
د پوښتنو ځوابونه:

1- که د P د نقطې فاصله مثبت او ترتیب یې منفي وي، د P نقط په کومه ربعه کې واقع ده؟

حل: د P نقطه په څلورمه ناحیه کې واقع ده.

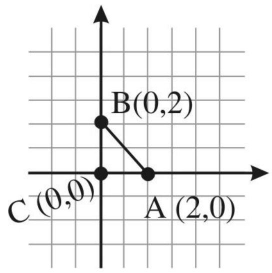
2- که د یوه شکل څلور رأسونه $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-3)$ او $D(3,-3)$ وي، داکوم ډول هندسي شکل دي؟

حل: دا هندسي شکل مربع ده.



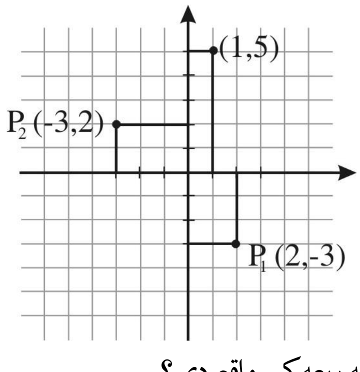
3- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه مثلث چې رأسونه یې $A(2,0)$ ، $B(0,2)$ او $C(0,0)$ وي رسم کړې او ووآیاست چې د اکوم ډول مثلث دي؟

حل: دا قایمه زاویه متساوي الساقین مثلث دی.



4- د $P_1(2,-3)$ ، $P_2(-3,2)$ او $P_3(1,5)$ نقطې و وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

حل:

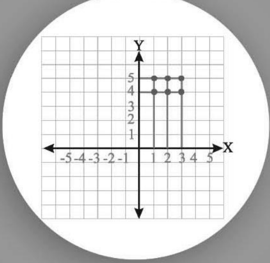


5- ووایاست چې لاندې مرتبې جوړې په کومه ربعه کې واقع دي؟

$(1,5)$, $(-5,1)$, $(-4,-6)$, $(4,-5)$, $(-\frac{1}{2},-2)$

$(-\frac{1}{2},2)$, $(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(2,0)$, $(0,-1)$

حل: $(1,5)$ په لومړۍ ناحیه کې، $(-5,1)$ په دویمه ناحیه کې، $(-4,-6)$ په دریمه ناحیه کې، $(4,-5)$ په څلورمه ناحیه کې، $(-\frac{1}{2},-2)$ په دریمه ناحیه کې، $(-\frac{1}{2},2)$ په دویمه ناحیه کې، $(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ په لومړۍ ناحیه کې، د $(2,0)$ نقطه د X پر محور او د $(0,-1)$ نقطه د y پر محور واقع ده.



د کارتیزیني ضرب حاصل او ګراف یې

د درسي کتاب مخ: (57) **د لوست وخت:** (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنیزې، مهارتي ، ذهنیتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: ● د دوو سټونو د کارتیزیني ضرب حاصل د پیدا کولو طریقه زده کړي. ● د کارتیزیني ضرب حاصل په تعریف وپوهیږي. ● د $A\times B$ د سټ د عناصرو شمېر پیدا کړای شي. ● د A او B د دوو سټونو کارتیزیني ضرب حاصل پیدا کړای شي. ● د A او B د دوو سټونو د کارتیزیني ضرب حاصل په شکل کې وښودلای شي. ● د ریاضي په موضوعاتو کې د ضرب له دې حاصل څخه استفاده وکړای شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5 دقیقې)	له لومړینو فعالیتونو څخه وروسته د چارت او یا د تختې له مخې د ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ، که پوه نه شو د مثالونو له حلولو وروسته به یې ځواب پیدا کړای شي چې ځواب یې په لاندې ډول دی: $A=\{1,2,3\}\ ,\quad B=\{4,5\}$ $A\times B\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4)(3,4)\}$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې:**

لومړی فعالیت دې د 58 مخ د فعالیت د سرته رسولو وروسته زده کوونکي سرته ورسوي.

د زده کوونکو په ونډې اخیستنې د $A\times B$ له تعریفولو څخه وروسته لومړی مثال حل کړئ. د 58 مخ فعالیت دې زده کوونکي کار کړي چې ځواب یې په لاندې ډول دی:

$A\times B=\{(-4,1),(-4,4),(-1,1),(-1,4),(0,1)(0,4)\}$

$A\times A=\{(-4,-4),(-4,-1),(-4,0),(-1,-4),(-1,-1)(-1,0),(0,-4),(0,-1),(0,0)\}$

$B\times B=\{(1,1),(1,4),(4,1),(4,4)\}$

بیا دې دویم او دریم مثال زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل شي، ددې لپاره چې د $A\times B$ د ضرب حاصل په شکل کې وښودلای شي. څلورم، پنځم او شپږم مثال دې حل شي. د 59 مخ فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي او د ګروپ نماینده دې خپل کار د تختې پر مخ وښیي چې ځواب یې په لاندې ډول دی:

$A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د (60) مخ له پوښتنو څخه لومړۍ پوښتنه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

که $A=\{3,4\}$ او $B=\{0,-1\}$ وي د $A\times B$ گراف رسم کړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- د A او B د دوو (چې تش نه وي) سټونو د کارتیزیني ضرب حاصل عبارت دی له:

$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\wedge y\in B\}$

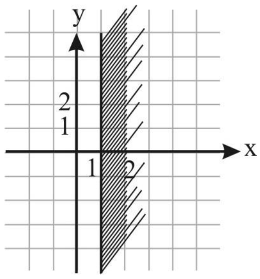
- د R^2 د سټ عناصر د وضعیه کمیاتو د مستوي د ټولو هغو نقطو سټ دی چې:

$R^2=R\times R=\{(x,y)\mid x\in R, y\in R\}$

- مثال: د مختصاتو په مستوي کې د دویمې ناحیې د نقطو سټ د دوو سټونو د دکارتي ضرب په شکل په دې ډول ښودل کیږي:

$A=\{x\mid x\in R\ ,\ \ x<0 \qquad B=\{y\mid y\in R\ ,\ y>0\}$
$A\times B=\{(x,y)\mid x,y\in R \quad , \quad x<0\wedge y>0\}$

- په لاندې شکل کې هغه ساحه چې توره شوې ده د کومو سټونو د دکارتي ضرب حاصل گراف دی.



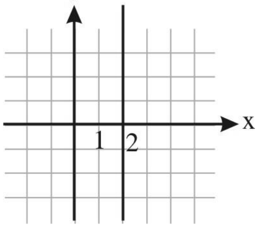
حل:

$A=\{x\mid x\in R\ ,\ \ x\geq 1\}$ $\qquad B=\{y\mid y\in R\}$ $\qquad A\times B=\{(x,y)\mid x,y\in R\ , x\geq 1\}$

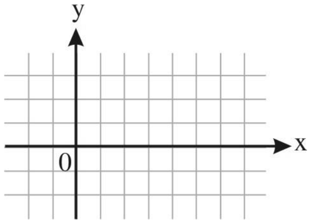
د $R\times\{0\}$ او $\{2\}\times R$ گرافونه په لاندې ډول دي:

$R\times\{0\}=\{(x,0)\mid x\in R\}$ $\qquad \{2\}xR=\{(2,y)\mid y\in R\}$

- د $R\times\{0\}$ کارتیزیني ضرب حاصل ټولې هغه نقطې دي چې د x پر محور او د $\{2\}\times R$ د کارتیزیني ضرب حاصل ټولې هغه نقطې دي چې د x=2 پر خط واقع دي.



$\{2\}\times R$

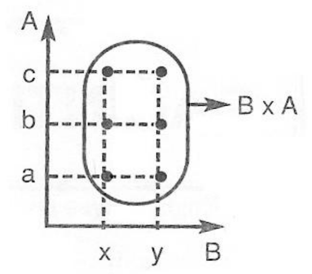


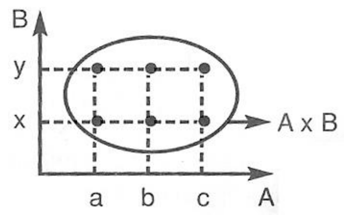
$R\times\{0\}$

- د A د هر سټ لپاره لرو چې: $A\times\phi=\phi$ و $\phi\times A=\phi$ دی.

مثال: که $A=\{a,b,c\}$ او $B=\{x,y\}$ وي:

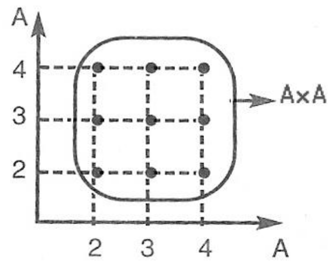
$$A\times B=\{(a,x),(a,y),(b,x),(b,y),(c,x),(c,y)\}$$
$$n(A)=3$$
$$n(B)=2\Rightarrow n(A\times B)=3\cdot 2=6$$
$$B\times A=\{(x,a),(x,b),(x,c),(y,a),(y,b),(y,c)\}$$
$$n(B\times A)=n(B)\cdot n(A)=2\cdot 3=6$$
$$n(A\times B)=n(B\times A)$$





مثال: که $A=\{2,3,4\}$ وي :

$$A\times A=\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$
$$n(A\times A)=n(A)\times n(A)=3\times 3=9$$



مثال: که $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,4\}$ او $C=\{1,2,3\}$ وي:

$a:\quad A\times(B\cup C)$ $\qquad b:\quad (A\times B)\cup(A\times C)$

$a:\quad B\cup C=\{1,2,3,4\}$

$$A\times(B\cup C)=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

$b:\quad A\times B=\{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$

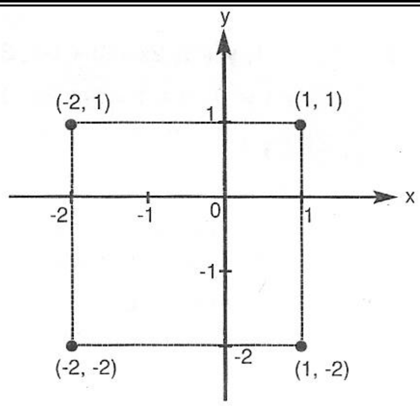
$$A\times C=\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,1),(3,2),(3,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$$
$$(A\times B)\cup(A\times C)=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$$

په پایله کې:

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

- که $A=\{-2,1\}$ وي $A\times A$ په شکل کې په داسې ډول ښودلای شو:

$$A\times A=\{(-2,-2),(-2,1),(1,-2),(1,1)\}=A^2$$

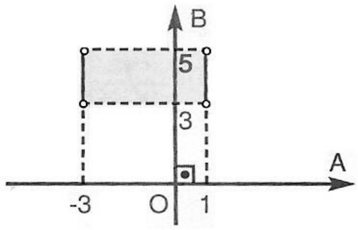


- که $A = \{x : |x+1| \le 2, x \in IR\}$ او $B = \{y : |y-4| < 1, y \in IR\}$ وي $A \times B$ گراف په لاندې ډول دی:

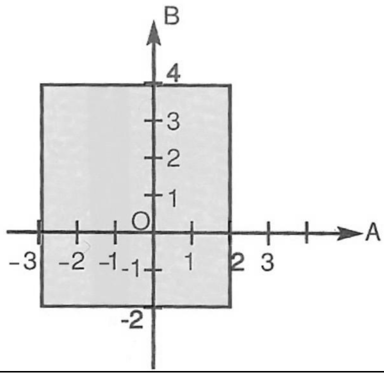
$A = \{x : -2 \le x+1 \le 2, x \in R\} = \{x : -3 \le x \le 1, x \in R\} = [-3,1]$

$B = \{y : -1 < y-4 < 1, y \in R\} = \{y : 3 < y < 5, y \in R\} = (3,5)$

$\Rightarrow A \times B = [-3,1] \times (3,5)$



- که $A = [-3,2]$ او $B = [-2,4]$ وي $A \times B$ په شکل کې داسې ښودل کیږي.



د پوښتنو ځوابونه:

1- که:

i) $B = \{2,4\}$ او $A = \{-1,1,3\}$

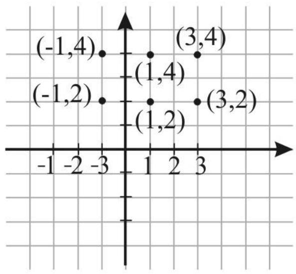
ii) $B = \{2,3\}$ او $A = \{-1,1\}$

وي $A \times B$ پیدا او په شکل کې یې وښایاست.

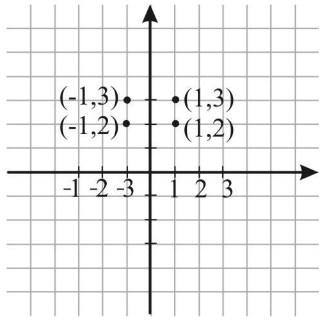
حل:

i) $A \times B = \{(-1,2), (-1,4), (1,2), (1,4), (3\ ,2), (3,4)\}$

ii) $A \times B = \{(-1,2), (-1,3), (1,2), (1,3)\}$



i

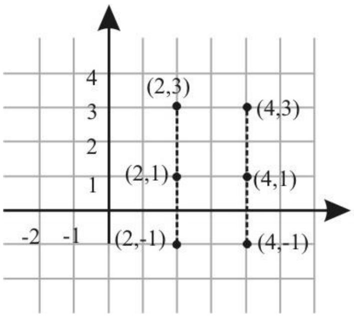


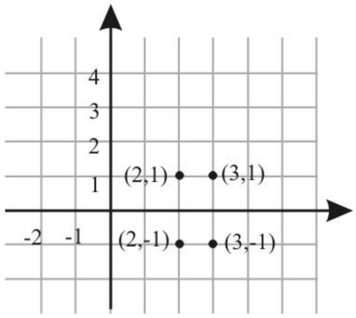
ii

2- د لومړۍ پوښتنې د سټونو لپاره $B\times A$ پیدا اوپه شکل کې یې وښایاست

حل:

$B\times A=\{(2,-1),(2,1),(2,3),(4,-1),(4,1),(4,3)\}$





$B\times A=\{(2,-1),(3,-1),(2,1),(3,1)\}$

3- که $A=\{1,2,3\}$ وي $A\times A$ پیداکړئ

حل:

$A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

4- که $A=\{2,4,6\}$ او $B=\{1,3,5\}$ وي، $A\times A, B\times A, A\times B$ او $B\times B$ پیدا کړئ.

حل:

$A\times B=\{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,3),(6,5)\}$

$B\times A=\{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}$

$A\times A=\{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$

$B\times B=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$



رابطه (Relation)

د درسي کتاب (61) **مخ** **د لوست وخت**: (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • د رابطې اود معادلې رابطې تعريفونه زده کړي. • د رابطو د تعريف او قيمتونو ناحيې پيدا کړای شي. • په A کې او له A څخه په B کې د رابطو شمير پيدا کړای شي. • د يوې رابطې معکوس او د تعريف او قيمتونو ناحيې يې پيدا کړای شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې لـه رابطـو او د رابطـو لـه خاصيتونو څخـه استفاده وکـړای شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنو فعاليتونو څخه وروسته (عطاالله عزت‌الله Related عطاالله) به شکل (عطاالله R عزت‌الله) په شکل ليکل شوي دي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**:

د رابطې له تعريفوولو څخه وروسته د زه کوونکو په ونډې اخيستنې سره دې لومړی، دويـم او دريـم مثـال حـل شـي او د 62 مـخ فعاليت دې زده کوونکي په مناسبو ګروپونو کې سرته ورسوي، محترم ښوونکي دې متوجه اوسي چې په دې فعاليت کـې تېروتنـه شوي ده $R=\{(x,y)\mid x+y=5\}$ مثبته علامه، منفي شوی ده چې ځواب يې په لاندې ډول دی:

$$A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$
$$R=\{(x,y)\mid x+y=5\}$$
$$R=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$

څلورم مثال دې حل شي، د يوې رابطې د تعريف ناحيـه(Domain) اود قميتونـو ناحيـه(Range)دې زده کوونکـو تـه توضيح شي. لومړی او دويم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي.زده کونکوي دې د 63 مـخ فعاليـت سـرته ورسـوي چې ځواب يې په دې ډول دی: $\{0,8,16\}=$ د R د قميتونو ناحيه

معکوسه رابطه دې تعريف شي او اړونده مثال دې حل شي. همدارنګـه معادلـه رابطـه ا و د هغې خاصـيتونه دې توضـيح شـي او اړونده مثال دې هم حل شي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**:

د پوښتنو لومړۍ پوښتنه دې حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**:

دویمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

دوه ګونې رابطه (Binary Relation):

که R د $A \times B$ یو فرعي ست وي، نو R له A څخه B ته د دوه ګونې رابطې په نامه یادیږي.

لکه: $(a,b) \in R$ چې د (a,b) لومړی عنصر د Domain په نامه چې $a \in A$ وي او د (a,b) دویم عنصر د Range په نامه یادیږي، چې $b \in B$ وي.

که $A = \{a,b,c\}$ او $B = \{1,2\}$ وي نو $R = \{(a,1),(b,1),(c,1)\}$ له A څخه B دوه ګونې رابطه ده.

$\text{Domain } R = \{a,b,c\}$ و $\text{Range } R = \{1\}$

همدارنګه $T = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}$ په A کې دوه ګونې رابطه ده.

$\text{Dom}T = \{a\}$ $\quad$ $\text{Range } R = \{a,b,c\}$

مثال: په لاندې رابطو کې چې د حقیقي عددونو په ست کې تعریف شوي دي د هر یوې د تعریف او قیمتونو ناحیې پیدا کړئ.

- $1 + y = -3 \Rightarrow y = -3 - 1 \Rightarrow y = -4$

$S = \{(x,y) \mid x,y \in R \wedge y = -4\}$

$Dom\, S = IR$

$Range\, S = \{-4\}$

- $2x + 1 = 7 \Rightarrow 2x = 7 - 1 \Rightarrow x = 3$

$S = \{(x,y) \mid x,y \in R \wedge x = 3\}$

$Dom\, S = \{3\}$

$Range\, S = R$

- $x = 2y - 1$

$S = \{(x,y) \mid x,y \in R \wedge x = 2y - 1\}$

ددې رابطې ځینې قیمتونه په لاندې جدول کې لیدل کیږي.

x	-1	1	3	5	-3	-5	-7	$\ldots$
y	0	1	2	3	-1	-2	-3	$\ldots$

$S = \{(-1,0),(1,1),(3,2),(5,3),(-3,-1),(-5,-2),(-7,-3)\}$

$Dom\, S = \{-1,1,3,5,-3,-5,-7\ldots\} = R$ $\qquad$ $Range\, S = \{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3\ldots\} = R$

- $x^2 + y^2 = 4$

$S = \{(x,y) \mid x,y \in R \wedge x^2 + y^2 = 4\} = \{(2,2),(-2,-2)\}$

$\text{Dom}S = \{2,-2\}$

$\text{Range}S = \{2,-2\}$

- $9x^2 + 16y^2 = 644$

$S = \{(\pm 4,5),(-4,-5),(4,-5),(-4,5)\}$

$Dom S = \{4,-4\}$

$Range S = \{5,-5\}$

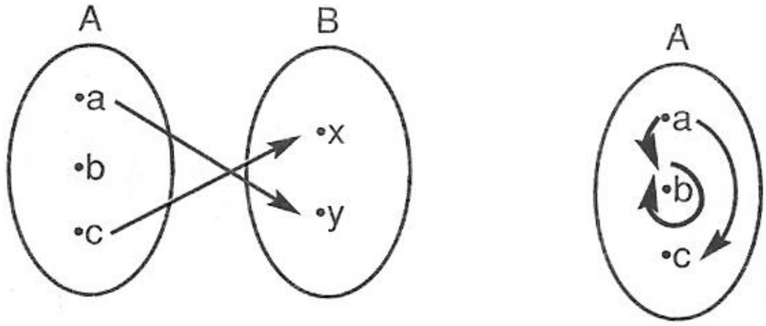
- که $A = \{x, y\}$ او $B = \{1,2\}$ وي:

$n(A \times B) = n(A) \times n(B) = 2 \cdot 2 = 4$

لیکن له A څخه و B ته د رابطو شمېر عبارت دی له:

$2^{n(A \times B)} = 2^4 = 16$

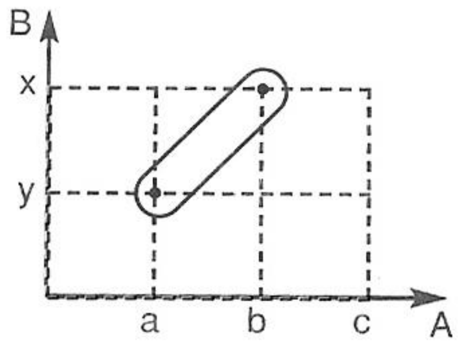
- که $\beta \subset A \times B$ او $\beta \subset A \times A$ وي د β رابطه په شکل کې داسې ښودل کیږي:



- که $A = \{a, b, c\}$ او $B = (x, y)$ وي او هم $\beta \subset A \times A$ وي:

$\beta = \{(a, y), (b, x)\}$

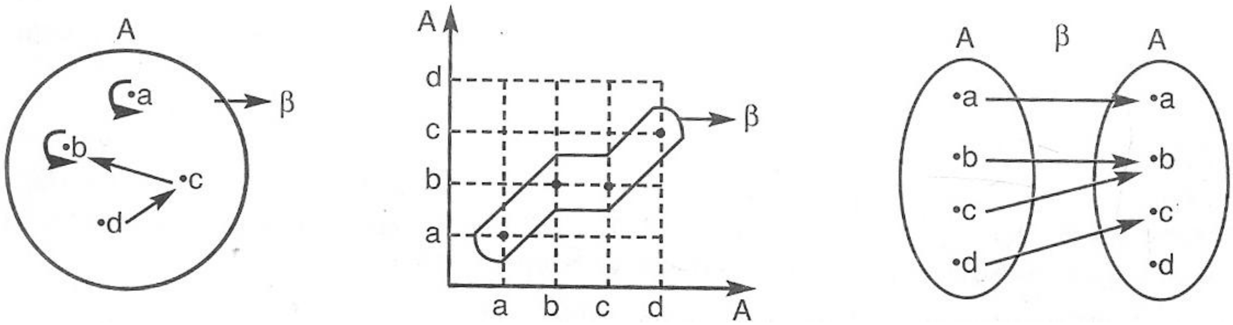
چې د β شکل په دې ډول دی.



- که $A = \{a, b, c, d\}$ او β په A کې یوه رابطه وي:

$\beta = \{(a, a), (b, b), (c, b), (d, c)\}$

د β رابطه په لاندې شکلونو کې وګورئ.



د رابطې معکوس: $\beta \subset A\times B \Rightarrow \beta^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y)\in\beta\}$

مثال: که $A=\{a,b\}$ او $B=(1,2,3)$ وي نو :

$$\beta=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\} \Rightarrow \beta^{-1}=\{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}$$

مثال: که

$$\beta=\{(x,y)\in R\times R \mid x-y<2\}$$
$$\beta^{-1}=\{(x,y)\in R\times R \mid y-x<2\}$$

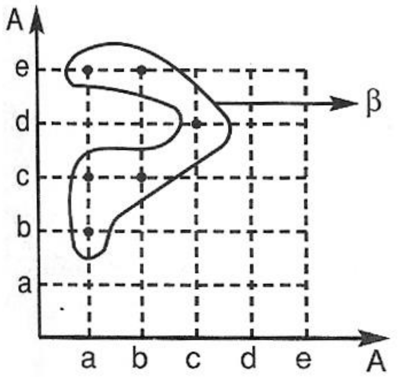
- د $R=\{(x,y) \mid y=2x+1\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي ده R^{-1} عبارت ده له:

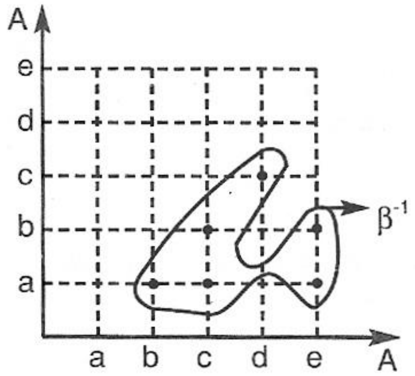
$$y=2x+1 \Rightarrow y-1=2x \Rightarrow x=\frac{y-1}{2}$$
$$R^{-1}=\{(x,y) \mid (x,y)\in R\ ,y=\frac{x-1}{2}\}$$

مثال: که $A=\{a,b,c,d,e\}$ او β یو رابطه وي:

β او β^{-1} په لاندې شکلونو کې وګورئ.

$$\beta=\{(a,b),(a,c),(a,e),(b,c),(b,e),(c,d)\} \Rightarrow \beta^{-1}=\{(b,a),(c,a),(e,a),(c,b),(e,b),(d,c)\}$$

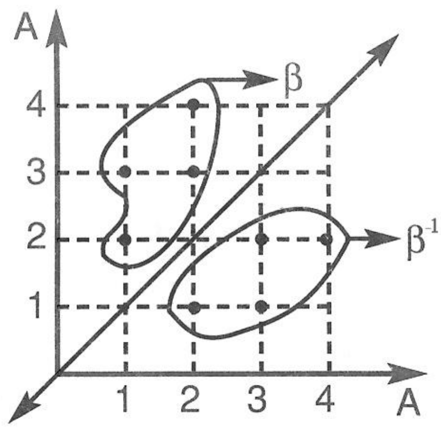




مثال: که $A=\{1,2,3,4\}$ او β له A څخه و A ته یوه رابطه وي:

$$\beta=\{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4)\} \Rightarrow \beta^{-1}=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}$$

د β او β^{-1} شکلونه په دې ډول دی.



مثال: که $\beta = \{(x,y): 3x - y = 4\}$ یوه رابطه وي، نو β^{-1} عبارت ده له:

$\beta^{-1} = \{(x,y): 3y - x = 4\}$

- معادله رابطه:

د A په سټ کې د β رابطې ته معادله رابطه وايي چې:

1- که β په A کې یوه داسې رابطه وي چې د $\forall x \in A$ لپاره $(x,x) \in \beta$ وي. (انعکاسي خاصیت)

2- $\forall (x,y) \in \beta \Rightarrow (y,x) \in \beta$ (تناظري خاصیت)

3- که $x, y, z \in A$ وي $\forall [(x,y) \in \beta \wedge (y,z) \in \beta] \Rightarrow (x,z) \in \beta$ (انتقالي خاصیت)

مثال: په هندسه کې د مثلثونو د انطباق منښې رابطه یوه معادله رابطه ده،

(انعکاسي خاصیت) $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

(تناظري خاصیت) $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF} \Rightarrow \overset{\Delta}{DEF} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

(انتقالي خاصیت) $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{DEF} \sim \overset{\Delta}{KLM} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{KLM}$

د پوښتنو ځوابونه:

1- که $A = \{1,2\}$ و $B = \{0,4,6\}$ وي.

- له A څخه په B کې درې رابطې ولیکئ.
- له B څخه په A کې څلور رابطې ولیکئ.
- په A کې څلور رابطې ولیکئ.

حل:

$$\begin{aligned} &i)\ A \times B = \{(1,0)(1,4)(1,6)(2,0)(2,4)(2,6)\} \\ &\quad R_1 = \{(1,0)(1,4)\} \\ &\quad R_2 = \{(1,6)(2,4)\} \\ &\quad R_3 = \{(2,0)(2,4)(2,6)\} \end{aligned}$$

درې پورتنی رابطې له A څخه په B کې دي.

له B څخه و A ته څلور رابطې عبارت دي له:

$$\begin{aligned} &ii)\ B \times A = \{(0,1)(0,2)(4,1)(4,2)(6,1)(6,2)\} \\ &\quad R_1 = \{(0,1)(0,2)(4,1)\} \\ &\quad R_2 = \{(6,1)\} \\ &\quad R_3 = \{(4,1)(4,2)\} \\ &\quad R_4 = \{(0,1)(0,2)(4,1)(4,2)(6,1)(6,2)\} \end{aligned}$$

په A کې څلور رابطې عبارت دي له:

iii)

$A \times A = \{(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)\}$

$R_1 = \{(1,1)\}$

$R_2 = \{(1,2)\}$

$R_3 = \{(1,1)(1,2)(2,1)\}$

$R_4 = \{(1,1)(2,1)(2,2)\}$

2- که $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{1,3,5\}$ وي او $R = \{(x,y)|y < x\}$ ، له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

حل:

$A \times B = \{(1,1)(1,3)(1,5)(2,1)(2,3)(2,5),(3,1),(3,3),(3,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$

$R = \{(2,1),(3,1),(4,1),(4,3)\}$

3- که $R = \{(x,y)|y+1 = 2x^2\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي او د تعریف ساحه یې ټول طبیعي عددونو وي، د R د قیمتونو ساحه پیدا کړئ

حل: څرنګه چې $R = \{(1,1)(2,7)(3,17)(4,31)(5,49) \ ...\}$ چې ددې رابطې Range مساوي دي په:

$\{1,7,17,31,49 \ ...\}$

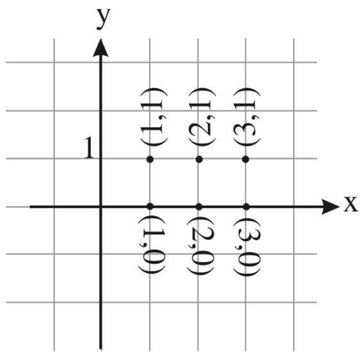
1- که $A=\{1,3,5\}$ او $B=\{2,4,6\}$ وی $A\times B$ ، $B\times A$ او $A\times A$ پیدا کړئ.

حل:

$$A\times B=\{(1,2),(1,4),(1,6),(3,2),(3,4),(3,6),(5,2),(5,4),(5,6)\}$$
$$B\times A=\{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,3),(6,5)\}$$
$$A\times A=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$$

2- که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{0,1\}$ وي $A\times B$ په شکل کې وښایاست.

حل: څرنګه چې $A\times B=\{(1,0)(1,1)(2,0)(2,1)(3,0)(3,1)\}$



3- که چیري $(x-2y,2x+y)=(3,1)$ وي د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$(x-2y,2x+y)=(3,1)$$

$$\begin{cases}x-2y=3\\2x+y=1\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{array}{r}2x-4y=\ \ 6\\ \pm2x\pm\ \ y=\pm1\\ \hline -5y=5\\ y=-1\end{array}$$

$$x+2=3$$
$$x=1$$

4- په $A=\{1,3,5\}$ کې د R رابطه داسې په لاس راوړئ چې R د مساوات رابطه وي.

حل: څرنګه چې $A\times A=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$ دی؛ نو $R=\{(1,1),(3,3),(5,5)\}$ دی.

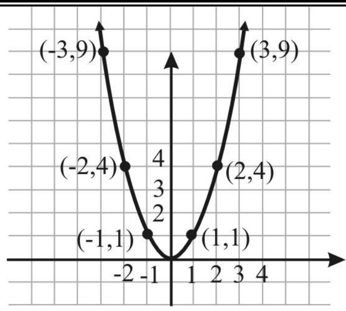
5- که $A=\{a,b\}$ وي د A^2 عناصرو ولیکئ.

حل: $A^2=A\times A=\{a,b\}\times\{a,b\}=\{(a,a)(a,b)(b,a)(b,b)\}$

6- که $R=\{(x,y)|y=x^2\}$ رابطه د حقیقی عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R د رابطی ګراف رسم کړی.

حل: $R=\{(x,y)/y=x^2\}$ د R د رابطې ګراف په لاندې ډول دی:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	...
y	0	1	1	4	4	9	9	...

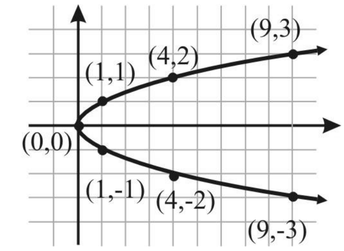


7- که $R=\{(x,y)|y^2=x\}$ رابطه دحقیقی عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R د رابطې ګراف رسم کړئ.

حل: $R=\{(x,y)/y^2=x\}$

x	0	1	4	9
y	0	±1	±2	±3

$y=\pm\sqrt{x}$



8- که $R=\{(1,-1)\ ,\ (2,-2)\ ,\ (3,-3)\}$ وي د R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

حل: $\text{Range}R^{-1}=\{1,2,3\}$ $\qquad$ $\text{Dom}R^{-1}=\{-1,-2,-3\}$ دی.

9- که $R=\{(1,2)\ ,\ (1,3)\ ,\ (1,4)\ ,\ (1,5)\}$ وي د R او R^{-1} د تعریف اوقیمتونو ساحې ولیکئ.

حل:

$\text{Dom}_R=\{1\}$ $\qquad$ $\text{Range}_R=\{2,3,4,5\}$

$\text{Dom}\,R^{-1}=\{2,3,4,5\}$ $\qquad$ $\text{Range}\,R^{-1}=\{1\}$

10- که $A=\{3,6,12\}$ او $B=\{-1,0\}$ وي په A کې د رابطو شمیر او له A څخه په B کې درابطو شمیر پیداکړئ.

حل: له A څخه و B ته د رابطو شمېر مساوي دی؛ په: $2^{2\times3}=2^6=64$ په A کې د رابطو شمېر مساوي دی؛

په: $2^{3\times3}=2^9=2^3\cdot2^3\cdot2^3=8\cdot8\cdot8=512$

11- که د $(4a+1\ ,\ 2b+a)$ او $(5\ ,\ 3a-4b)$ دوه مرتبې جوړې سره مساوي وي د a او b قیمتونو پیدا کړئ.

حل:

$(4a+1,\ 2b+a)=(5,3a-4b)$

$4a+1=5 \qquad 2b+a=3a-4b$

$4a=4 \qquad 2b+1=3-4b$

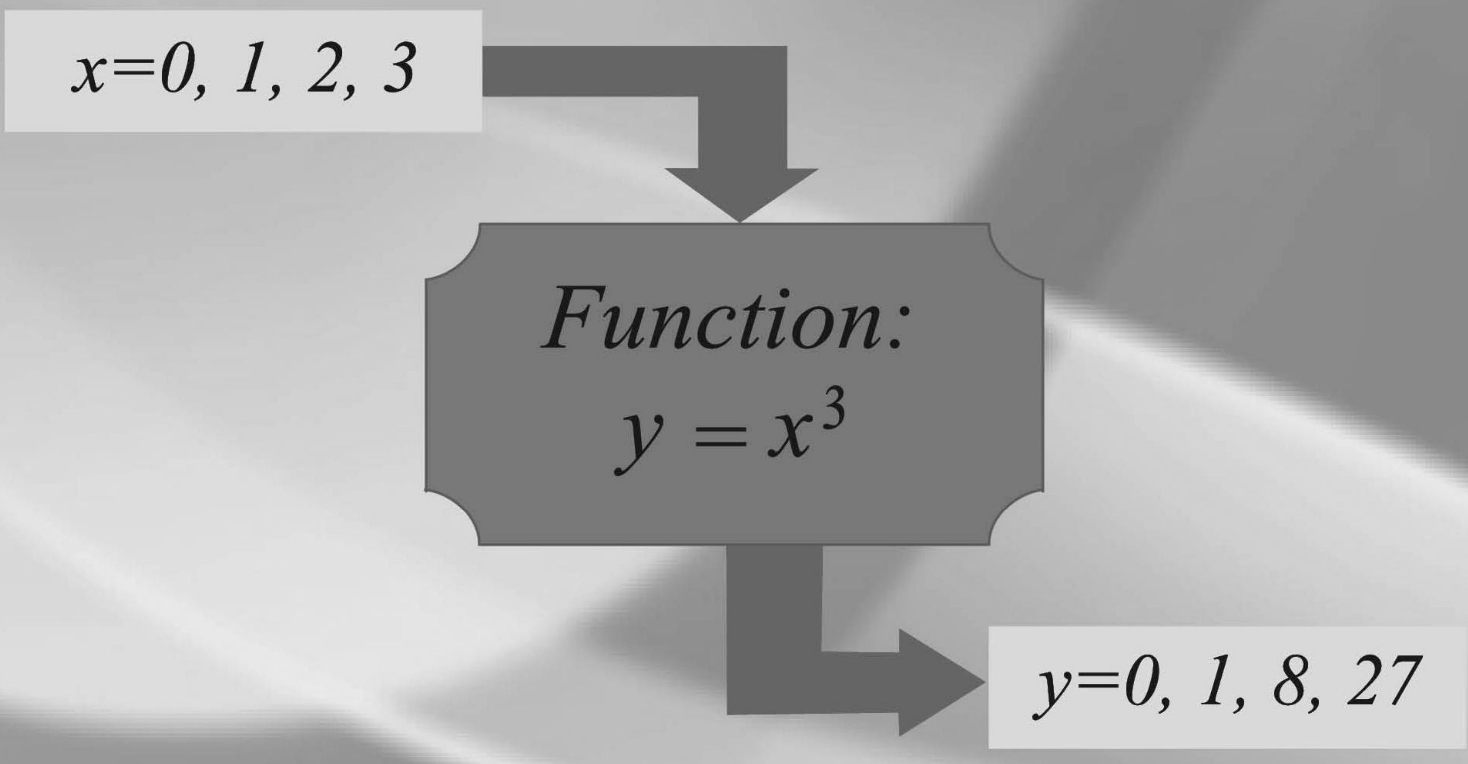
$a=1 \qquad 6b=2$

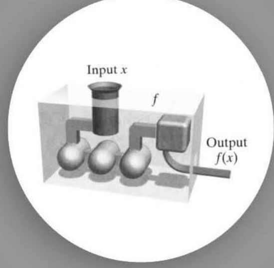
$b=\dfrac{1}{3}$

12- که $A=\{a\ ,\ b\ ,\ c\}$ او $B=\{x\ ,\ y\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پیدا کړئ.

حل: $B\times A=\{(x,a)(x,b)(x,c)(y,a)(y,b)(y,c)\}$ $\qquad$ $A\times B=\{(a,x)(a,y)(b,x)(b,y)(c,x)(c,y)\}$

دریم خچرکی
تابع


x=0, 1, 2, 3
Function:
$y = x^3$
y=0, 1, 8, 27



تابع(Function)

د درسي کتاب (69) **مخ** **د تدریس وخت**(1 **درسي ساعت**)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي بايد ددې لوست په پای کې: • د تابع تعريف زده کړي او ازاد او مقيد متحول وپيژني. • د تابع د تعريف او قيمتونو د ناحيو توپير وکړای شي. • د تابع او رابطې توپير پيدا کړای شي. • زده کړي چې څه وخت يو جدول يا د مرتبو جوړو سټ يوه تابع ښيي. • د رياضي د مسايلو په حل کې د تابع له مفهوم څخه ګټه واخيستلای شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، ګروپي او يوکيسز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت او ...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د ورودي شکل په اړوند دې پوښتنه وشي او په دې ډول دې واضح شي چې زده کوونکي تابع ته د يو ماشين په شان فکر وکړي چې (Input) د ازاد متحول او (output) د مقيد يا مربوطه متحول په حيث وپيژني.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې

ددې لوست فعاليت کولای شي چې په جلا جلا ډول له هر زده کوونکي وپوښتئ او همکاري ورسره وکړي. په ورځني ژوند کې په هندسي مسايلو او د فزيک په برخه کې د تابع مختلف مثالونه ورکړل شي.

د مربع د مساحت جدول او د نړۍ د نفوسو جدول واضح کړي او په هغوی کې ازاد او مقيد متحولونه زده کوونکو ته وښيي د تابع له تعريف څخه وروسته په مرتبو جوړو کې، (Domain) او(Range) وروښودل شي، بيا دې زده کوونکي د (71) مخ فعاليت سرته ورسوي.

محترم ښوونکي دې د زده کوونکو په وړاندې اخيستنې سره لومړی، دويم، او دريم مثالونه په چارت اويا پر تخته حل کړي تر څو زده کوونکي د تابع مفهوم په جدول د مرتبو جوړو په سټ او په دياګراموکې درک کړي .

په هغه وخت کې د مرتبو جوړو سټ يوه تابع ښيي چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي او يا د لومړی سټ هر عنصر د دويم ست له يو عنصر سره اړيکه ولري.

د زده کړې پياوړتيا: (7) دقيقې

د دې لوست د پوښتنو لومړی پوښتنه د تختې پر مخ حل کړي.

د لوست ارزونه: (5) دقيقې

د لوست له لنډيز څخه وروسته د پوښتنو دويمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

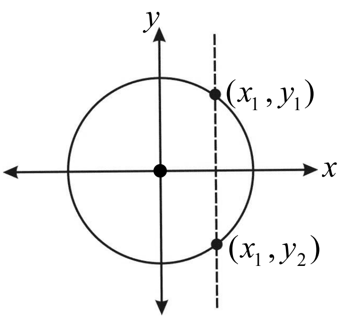
د تابع مفهوم لومړی پلادلایپ نیتز له خوا په 1696م کال کې وړاندې شوه، یوهان برنرلي په 1718م کې د متحولینو په تحلیلولو سره یې د تابع اصطلاح په کار یوړه.

اویلر په (1707-1783م) کال د منحني ګانو په خاصیتونو کې د $F(x)$ علامه وکاروله.

کلیرو په 1734م کال کې دتابع له مهفوم څخه ګټه واخیستله.

دیریکله په (1805-1859م) کې تا بع د تعریف او قیمتونو ناحیې مطرح کړې.

د تابع عمومي مفهوم چې د تعریف او قیمتونو د ناحیو لپاره یو ست په نظر کې نیول کیږي د ریچارد ددګیند له خوا په (1831-1961) کې مطرح شوه، د (1900م) کال په شاوخوا کې د لومړی ځل لپاره تابع د مرتبو جوړو د ست په شکل تعبیر شوه. نن ورځ د ریاضي اساسي موضوعات لکه: لیمټ، مشتق، انتیګرال، تفاضلي معادلې، محاسبوي میتودونه او نور د تابع د خاصیتونو او تحولاتو په اساس مطالعه کیږي.



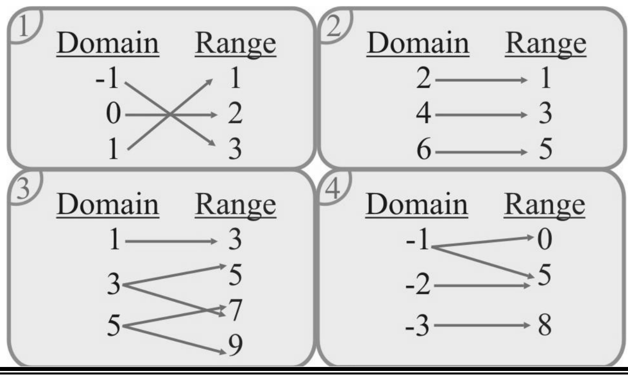
همدارنګه د فزیک فورمولونه او زیاتره طبیعي پېښې د تابع په مرسته توضیح کیږي. تابع د هغه مرتبو جوړو ست دی چې هیڅ دوه مرتبې جوړې یې د لومړنیو مساوي او دویمو مختلفو عناصرو لرونکي نه وي، لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي (x_1, y_1) او (x_1, y_2) مرتبو جوړو لومړني عناصر تکرار شوي دي یا د یو x_1 لپاره د y_1 او y_2 دوه مختلف قیمتونه وجود لري. همدارنګه د y له محور سره موازي خط ګراف د (x_1, y_1) او (x_1, y_2) په نقطو کې قطع کوي، نو داګراف د تابع ګراف نه دی.

- د x له محور سره موازي مستقیم خط یوه تابع ښیي لیکن د y محور سره موازي خط چې د x=c په شکل دی، یوه تابع نه ښیي، همدارنګه $|y| = 2$ یوه تابع نه ده، ځکه y کولای شي چې د 2 او -2 قیمتونه ولري.
- که $f = \{(m,2),(n,p),(m,3a-5)\}$ یوه تابع وښیي د a قیمت مساوي دی په:

$$3a-5=2 \Rightarrow 3a=5+2 \Rightarrow a=\frac{7}{3}$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- کوم یو له لاندینیو جدولونو څخه یوه تابع ښکاره کوي؟





حل: د 5,2,1 او 6 جدولونه یوه تابع ښیي، 3 او 4 جدولونه یوه تابع نه ښیي.

2- د لاندې مرتبو جوړو له سټونو څخه کوم یو یې یوه تابع ښکاره کوي؟ د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې تعین کړي.

$1-\quad \{(2,4)\,,\,(3,6)\,,\,(4,8)\,,\,(5,10)\}$

$2-\quad \{(-1,4)\,,\,(0,3)\,,\,(1,2)\,,\,(2,1)\}$

$3-\quad \{(10,-10)\,,\,(5,-5)\,,\,(0,0)\,,\,(5,5)\,,\,(10,10)\}$

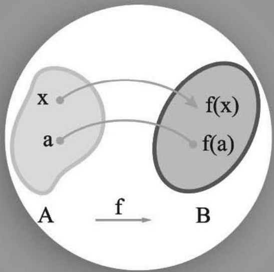
$4-\quad \{(-10,10)\,,\,(-5,5)\,,\,(0,0)\,,\,(5,5)\,,\,(10,10)\}$

$5-\quad \{(0,11),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

$6-\quad \{(1,1)\,,\,(2,1)\,,\,(3,1)\,,\,(1,2)\,,\,(2,2)\,,\,(3,2)\}$

حل:

- د لومړی برخې د مرتبو جوړو سټ یوه تابع ښیي چې د تعریف ناحیه یې $Dom=\{2,3,4,5\}$ او $Range=\{4,6,8,10\}$ دی.
- د دویمې برخې د مرتبو جوړو سټ یوه تابع ښیي چې د تعریف ناحیه یې $Dom=\{-1,0,1,2\}$ او $Range=\{4,3,2,1\}$ دی.
- د دریمې برخې د مرتبو جوړو سټ یوه تابع نه ښیي او یوه رابطه ده چې د تعریف ناحیه یې $Dom=\{10,5,0\}$ او $Range=\{-10,-5,0,5,10\}$ دی.
- د څلورمې برخې د مرتبو جوړو سټ یوه تابع ښیي چې: $Dom=\{-10,-5,0,5,10\}$ او $Range=\{10,5,0\}$ دی.
- د پنځمې برخې د مرتبو جوړو سټ یوه تابع ښیي چې: $Dom=\{0,1,2,3,4,5\}$ او $Range=\{11,1,2\}$ دی.
- د شپږمې برخې د مرتبو جوړو سټ یوه تابع نه ښیي، بلکې یوه رابطه ښکاره کوي چې: $Dom=\{1,2,3\}$ او $Range=\{1,2\}$ دی.



د يوې تابع د ليکلو طريقې او د تابع قيمت

د کتاب (73) مخ   د تدريس وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي بايد ددې لوست په پای کې: • دتابع د ليکلو طريقې او د تابع د قيمت پيداکول زده کړي. • د يوې تابع د ښودلو مختلف ډولونه وپيژني. • د مختلفو تابعګانو قيمت د x د مختلفو قيمتونو لپاره پيداکړای شي. • وپوهيږي چې يوه معادله څه وخت يوه تابع ښيي. • د رياضي د مسايلو په حل کې د يوې تابع د قيمت د پيداکولو اهميت درک کړي.
د تدريس طريقې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او ...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشير، چارت او ...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د انګيزې د پيداکولو لپاره د ورودي برخې پوښتنې له زده کوونکو وپوښتئ، يوه معادله هغه وخت د يوې تابع ښودونکې ده چې د هر x لپاره يوه y وجود ولري. همدارنګه يوه رابطه ا و يا يو جدول په هغه صورت کې د يوې تابع ښودونکې دی چې د تعريف د ناحيې هر عنصر يوازې د قيمتونو د سټ له يو عنصر سره اړيکه ولري.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې

د تابع د ښودلو د طريقو له توضيح کولو وروسته دې زده کوونکي فعاليتونه سر ته ورسوي او محترم ښوونکي دې د دوی د کارونو څارنه وکړي، بيا دې د زده کوونکو په ونډه اخيستنه لومړی او دويم مثال حل شي او د (74) مخ د فعاليت پوښتنې يا له زده کوونکو څخه په جلا جلا ډول و پوښتني او يا دا چې په ګروپونو کې دې کار کړي او د ګروپونو نماينده ګان دې خپل کار د تختې پر مخ توضيح کړي. زده کوونکو ته په ونډه ورکولو سره دريم، څلورم او پنځم مثال حل کړي، بيا دې د (76) مخ فعاليت زده کوونکي سرته ورسوي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) دقيقې

که $f(x)=3x-1$ او $g(x)=x^2$ وي؛ $F(0), F(a), F(5a-2), F[F(1)]$ او $g(5p-2)$ پيداکړئ:

$F(0)=1$ $F(a)=3a-1$ $F[F(1)]=5$

$f(5a-2)=15a-7$

$g(5p-2)=25p^2-20p+4$

د لوست ارزونه: (5) دقيقې

د لوست له لنډيز څخه وروسته کولای شئ د ارزيابي لپاره د پوښتنو دويمه پوښتنه په جلا، جلا ډول له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- که $F(x)=x^2-4$ او $F(x)=6x+2$ وي؛ a) $F(x+h)$, b) $F(x+h)-F(x)$ او c) $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ مساوي دی په

a) $F(x+h)=x^2+2xh+h^2-4$ b) $2xh+h^2$ c) $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=2x+h$

a) $6x+6h+2$ b) $6h$ c) 6

- په لاندې معادلو کې کومه یوه یې یوه تابع ښیي؟

$a:\quad 4x-2y^3+5=0$ $b:\quad y^2-x+1=0$

حل:

a :

$2y^3=4x+5$ $y^3=2x+\frac{5}{2}$ $y=\sqrt[3]{2x+\frac{5}{2}}$

نو پورتنی معادله یوه تابع ښیي.

$b:\quad y^2=x-1\Rightarrow y=\pm\sqrt{x-1}$

چې یوه تابع نه ده ځکه چې د x د یو قیمت لپاره د y دوه قیمتونه موجود دي.

د مثال په ډول که x=5 وي y=2 او y=-2 کیږي.

- په لاندې تابعګانو کې د $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ قیمت پیدا کړئ.

$f(x)=x+1 \qquad \to 1$

$f(x)=3x+7 \qquad \to 3$

$f(x)=x-x^2 \qquad \to -2x-h+1$

$f(x)=\sqrt{x} \qquad \to \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$

- له لاندنیو معادلو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښیي؟

1: $y=3x^2-12$: (یوه تابع ده)

2: $y^2=4x+1$: (y د x تابع نه ده)

3: $3x+2y=12$: (یوه تابع ده)

4: $x^2+y^2=9$: (y د x تابع نه ده)

- که $f(x+\frac{1}{x})=x^3+\frac{1}{x^3}$ وي $f(\frac{1}{x})$ عبارت دی له:

$$f(x+\frac{1}{x})=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$$

د $x+\frac{1}{x}$ پرځای $\frac{1}{x}$ عوض کوو:

$$f(\frac{1}{x})=(\frac{1}{x})^3-3\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x^3}-\frac{3}{x}\Rightarrow f(\frac{1}{x})=\frac{1-3x^2}{x^3}$$

- که $f(x)=x^2+2x+3$ وي $f(2x-1)$ عبارت دی له:

$$f(2x-1)=(2x-1)^2+2(2x-1)+3=4x^2+2$$

- که$f(2x-3)=x^2-1$ وي، $f(x)$ عبارت دی له:

$$2x-3=t\Rightarrow x=\frac{t+3}{2}\ ,\ f(2x-3)=x^2-1\Rightarrow f(t)=(\frac{t+3}{2})^2-1=\frac{t^2+6t+9}{4}-1$$
$$=\frac{t^2+6t+9-4}{4}=\frac{t^2+6t+5}{4}$$

د پوښتنو ځوابونه

1- که $g(x)=x^2+x-2$ او $f(x)=2x^2+3x-1$ وي $g(-2), f(-3)\ , g(2)-g(-3)$ او $\frac{f(0)\cdot g(-2)}{f(-3)}$ پیدا کړئ.

حل:

$$g(-2)=(-2)^2-2-2=4-4=0$$
$$F(-3)=2(-3)^2+3(-3)-1=18-9-1=8$$
$$g(2)-g(-3)=?$$
$$g(2)=2^2+2-2=4$$
$$g(-3)=(-3)^2-3-2=9-5=4$$
$$g(2)-g(-3)=4-4=0$$
$$\frac{F(0)\cdot g(2)}{F(-3)}=\frac{(-1)(0)}{8}=\frac{0}{8}=0$$

2- که $f(x)=x^2-x$ او $g(x)=\sqrt{x+4}$ وي، $g(0), f(-2)$او $f(x-1)$ پیدا کړئ.

حل:

$$F(-2)=(-2)^2-(-2)=4+2=6$$
$$g(0)=\sqrt{0+4}=\sqrt{4}=2$$
$$F(x-1)=(x-1)^2-(x-1)=x^2-2x+1-x+1=x^2-3x+2$$

3- که $g(x)=3\sqrt{x}$ او $h(x)=1+4x$ وي، $h(-3), h(16)$ او $g(-4)$ پیدا کړئ.

حل:

$$h(16)=1+4(16)=1+64=65$$
$$h(-3)=1+4(-3)=1-12=-11$$
$g(-4)=3\sqrt{-4}$ (د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوی نه دی)

4- که $f(x)=\frac{15}{x-3}$, $g(x)=16+3x-x^2$ او $h(x)=\sqrt{25-x^2}$ وي، نو $g(-7), f(6)$ او $f(0)+g(4)-h(-3)$ پیدا کړئ.

حل:

$$F(6)=\frac{15}{6-3}=\frac{15}{3}=5$$
$$g(-7)=16+3(-7)-(-7)^2=16-21-49=16-70=-54$$

$F(0)+g(4)-h(-3)=?$

$F(0)=\frac{15}{0-3}=-5$

$g(4)=16+3(4)-4^2=16+12-16=12$

$h(-3)=\sqrt{25-(3)^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

$F(0)+g(4)-h(-3)=-5+12-4=3$

5- که $g(x)=\sqrt{x+40}-2$ وي، $g(12)$, $g(5)$, $g(4)$, $g(0)$ او $g(-2)$ پيدا کړئ.

حل:

$g(12)=\sqrt{12+40}-2=\sqrt{52}-2$

$g(5)=\sqrt{5+40}-2=\sqrt{45}-2$

$g(4)=\sqrt{4+40}-2=\sqrt{44}-2$

$g(0)=\sqrt{0+40}-2=\sqrt{40}-2$

$g(-2)=\sqrt{-2+40}-2=\sqrt{38}-2$

6- ايا د $x^2+xy=1$ معادله يوه تابع ښيي؟

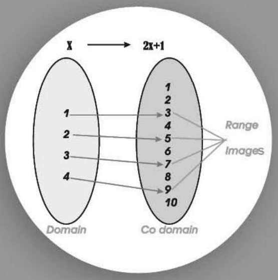
حل:

$x^2+xy=1$

$xy=1-x^2$

$y=\frac{1-x^2}{x}=\frac{1}{x}-x$

څرنگه چې د هر x لپاره يو y وجود لري، نو د $x^2+xy=1$ معادله د يوې تابع ښودونکې ده.



د یوې تابع د تعریف د ناحیې پیدا کول،
د یوې تابع ګراف او د ګراف له مخې د تابع پیژندنه

د کتاب (77)مخ **د لوست وخت (2 درسي ساعت)**

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	زده کوونکي باید ددې لوست په پای کې: • د یوې تابع د تعریف د ناحیې پیدا کول زده کړي. • د ګراف له مخې د تابع پیژندل او د یوې تابع د ګراف رسمول زده کړي. • د تابعګانو د تعریف ناحیې پیدا کړای شي. • د تابعګانو ګرافونه رسم کړای شي. • د تابع ګراف وپیژني. • د ریاضي د مسایلو په حل کې د تابع د ګراف د رسمولو اهمیت درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	فعاله زده کړه (پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه، بحثونه...)
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشیر، چارت او... .
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د انګیزې د پیدا کولو لپاره ورودي پوښتنه له زده کوونکو وپوښتې، څرنګه چې زموږ د بحث لاندې تابعګانې حقیقي تابعګاني دي، نو د هرې تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه نه وي. د مثال په ډول د $F(x)=2x-1$ د تابع تعریف په ناحیه کې ټول حقیقي عددونه شامل دي، خو د $h(x)=\dfrac{3}{x-5}$ د تابع د تعریف په ناحیه کې د (5) عدد شامل نه دی.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې

د لوست لومړنی فعالیت کیدای شي چې په جلا جلا توګه له زده کوونکو وپوښتل شي، محترم ښوونکي دې لارښوونه وکړي او لومړی مثال دې د زده کوونکو په ونډوه اخیستنه سره حل کړي .

د(78) مخ فعالیت دې زده کوونکي په مناسبو ګروپونو کې حل کړي، د (79) مخ د څلورو شکلونو په برخه کې له زده کوونکو وپوښتئ، محترم ښوونکي دې لارښوونه وکړي، د (79) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي لومړی، دویم مثالونه یا پر تخته او یا په یو چارت کې رسم کړئ، د (81) مخ فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې حل کړي د دریم او څلورم مثال ګرافونه دې یا په چارت او یا د تختې پر مخ توضیح کړي.

د لوست تحکیم: (7) دقیقې

د $g(x)=-\sqrt{\dfrac{2}{x^2+9}}$ د تعریف ناحیه وټاکي.

حل: د $g(x)$ تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه یا $\text{Dom}\,g(x)=(-\infty,+\infty)$ دی.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

د ارزونې لپاره د لاندینو پوښتنو په شان پوښتنې له زده کوونکو وکړئ:

- د $F(x) = (3x+5)^{\frac{1}{2}}$ د تعریف ناحیه پیدا کړئ.
- د $g(x) = x+6$ د تعریف ناحیه پیدا کړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د لاندې تابعګانو د تعریف ناحیه (Domain) پیدا کړئ.

a) $F(x) = x^4$ b) $F(x)\sqrt{16-x^2}$ c) $F(x) = (x-3)^{\frac{1}{2}}$

d) $F(x) = \sqrt{\frac{3}{x^2+25}}$ e) $F(x) = \sqrt{x^2-4x-5}$

حل:

a) $domF(x) = (-\infty, +\infty)$ b) $domF(x) = [-4, 4]$ c) $domF(x) = [3, +\infty]$

d) $domF(x) = (-\infty, +\infty)$ e) $domF(x) = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

د تابع ګراف F د $= \{(x, y), y = F(x), x \in Dom_F\}$

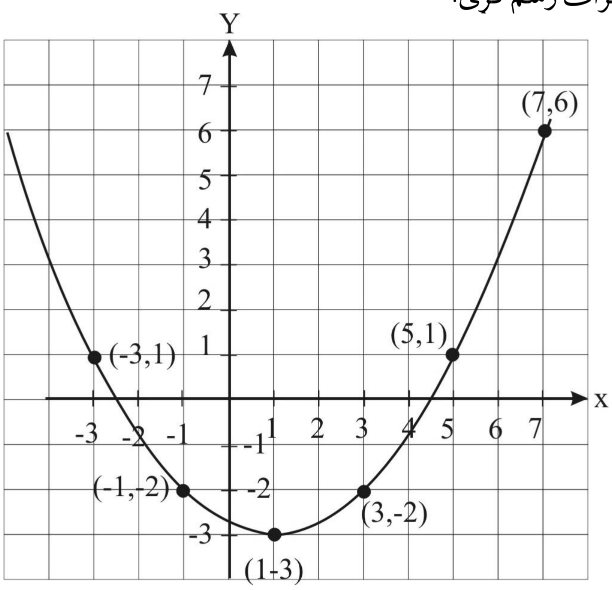
- د پارامتریک معادلې ګراف (Parametric Graphing) په دې ډول ګرافونو کې x او y د یو بل دریم متحول مثلا t تابع وي چې t ته پارامتر وایي او دې معادلې ته پارامتریک معادله وایي د مثال په ډول:

$f(t) = (x, y) \quad x = x(t) \quad y = y(t)$

مثال: لاندې ګراف رسم کړئ.

$x = 2t+1$
$y = t^2 - 3$

حل:



t	$x = 2t+1$	$y = t^2 - 3$	(x, y)
-2	-3	1	$(-3,1)$
-1	-1	-2	$(-1,-2)$
0	1	-3	$(1,-3)$
1	3	-2	$(3,-2)$
2	5	1	$(5,1)$
3	7	6	$(7,6)$

- د هرې درجې لرونکې پولینومي تابع یا هره ترجذر لاندې پولینومي تابع چې د جذر درجه یې تاقه وي او یا د ساین او کوساین د تابعګانو د تعریف ناحیې ټول حقیقي عددونه دي، د مثال په ډول د لاندې تابعګانو د تعریف ناحیې ټول حقیقي عددونه دي.

$g(x) = \frac{1}{5}x^4 - x^3 - |x| \qquad P(x) = \sin x - \cos x^2 + 1 \qquad h(x) = \sqrt[3]{x-1}$

• د لوګاریتمي تابعګانو د تعریف ناحیه چې د $f(x)=k\log_v u$ شکل ولري، عبارت ده له:

$u>0$
$v>0$
$v\neq 1$

د مثال په ډول: د $y=2\log_x(x+2)$ د تعریف ناحیه عبارت ده له:

$x+2>0\Rightarrow x>-2 \quad , \quad x>0 \quad\quad x\neq 1$
$\Rightarrow (0,1)\cup(1,+\infty)$

د $g(x)=\log_{x-1}(9-x^2)$ د تعریف ناحیه عبارت ده له:

$dom_g=(1,2)\cup(2,3)$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د لاندې تابعګانو د تعریف ساحې (Domain) وټاکئ.

$f(x)=\sqrt{x^2-9} \qquad g(x)=2x-5 \qquad h(x)=\sqrt{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{x+1} \qquad g(x)=|x-3| \qquad h(x)=\dfrac{3}{x-4}$

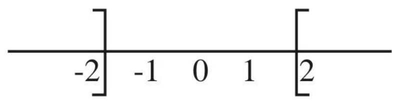
$f(x)=\dfrac{7x}{x^2-16} \qquad g(x)=\dfrac{2}{(x+3)(x-7)} \qquad h(x)=\dfrac{4}{x^2+11x+24} \qquad f(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$

حل: $x^2-9\geq 0 \;\Rightarrow\; x^2-3^2\geq 0 \;,\; (x-3)(x+3)\geq 0 \;\Rightarrow\; (-\infty,-3]\cup[3+\infty)$

نو ددې تابع د تعریف ناحیه $Dom_f=(-\infty,-3]\cup[3+\infty)$

$g(x)=2x-3 \qquad Dom_g=IR=(-\infty,+\infty)$

$h(x)=\sqrt{x^2-4} \;\Rightarrow\; x^2-4\geq 0 \;\Rightarrow\; (x-2)(x+2)\geq 0$



$Domh(x)=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

$F(x)=\sqrt{x+1} \;\Rightarrow\; x+1\geq 0 \;\Rightarrow\; x\geq -1$

$DomF(x)=[-1,+\infty) \qquad Dom\,F(x)=\{x\in IR/x\geq -1\}$

$g(x)=|x-3| \;\Rightarrow\; Dom\,g(x)=IR \;\vee\; Dom\,g(x)=(-\infty,+\infty)$

$h(x)=\dfrac{3}{x-4} \;\Rightarrow\; Dom\,h(x)=IR-\{4\}$

$Dom\,h(x)=(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$

$F(x)=\dfrac{7x}{x^2-16}=\dfrac{7x}{(x-4)(x+4)} \qquad Dom\,F(x)=IR\setminus\{-4,4\}$

$DomF(x)\{x\in IR/x\neq -4\wedge x\neq 4\}$ یا

$g(x)=\dfrac{2}{(x+3)(x-7)} \qquad Domg(x)=IR-\{-3,7\}$

$Domg(x)=\{x\in IR/x\neq -3\wedge x\neq 7\}$ یا

$h(x)=\dfrac{4}{x^2+11x+24}=\dfrac{4}{(x+3)(x+8)} \;\Rightarrow\; Domh(x)=IR-\{-3,-8\}$

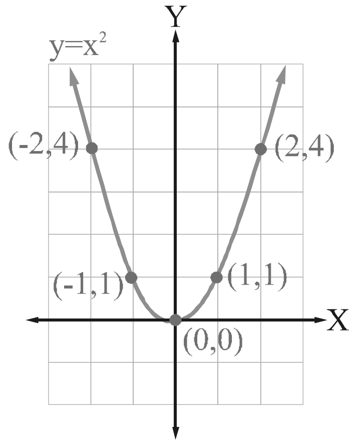
$F(x)=\frac{3}{x^2+4} \Rightarrow DomF(x)=IR$ یا $Dom\,F(x)=(-\infty,+\infty)$

ځکه چې د x په هیڅ قیمت د تابع مخرج نه صفر کیږي.

2- د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ د تابعگانو گرافونه رسم کړئ.

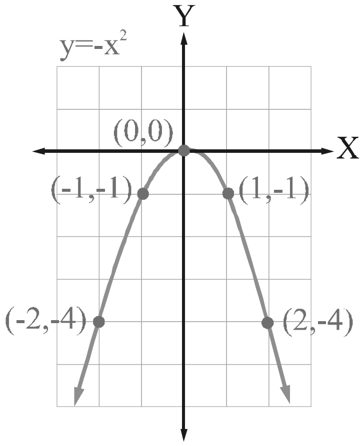
حل: د $F(x)=x^2$ د تابع گراف

x	0	1	-1	2	-2
$f(x)$	0	-1	-1	-4	-4



د $f(x)=-x^2$ تابع گراف

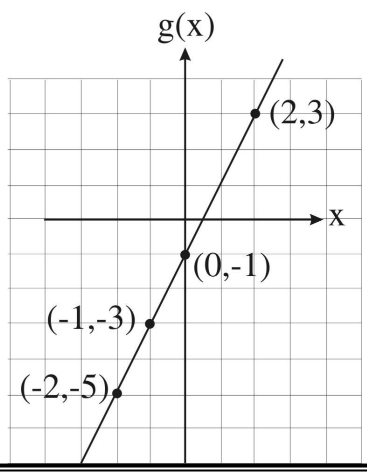
x	0	1	-1	2	-2	3	-3
f(x)	0	-1	-1	-4	-4	9	9



3- د $g(x)=2x-1$ تابع گراف رسم کړي که $x=-3\,,-2\,,-1\,,0,1,2,3,$ وي.

حل: د $g(x)=2x-1$ تابع گراف

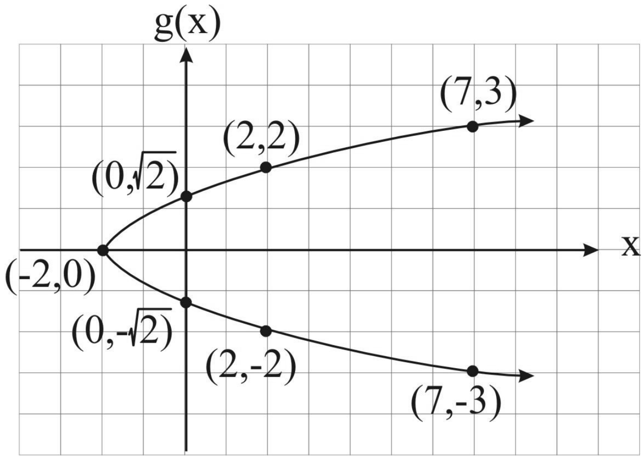
x	0	1	2	3	-1	-2	-3
$g(x)$	-1	1	3	5	-3	-5	-7



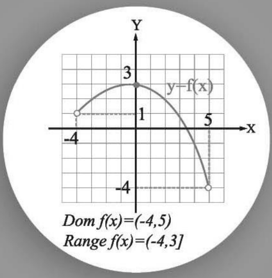
4- د $x = y^2 - 2$ ګراف رسم کړي او آيا دا د يوې تابع ګراف دى؟ ولې؟

حل: د $x = y^2 - 2$ رابطې ګراف رسم کړئ.

x	0	2	-2	7
y	$\pm\sqrt{2}$	± 2	0	± 3



څرنګه چې د يو x لپاره دوه y وجود لري، نو د $x = y^2 - 2$ معادله يو تابع نه ښيي، له بلې خوا له y محور سره موازي خط دا ګراف په دوو نقطو کې قطع کوي، نو دا ګراف د يوې تابع ګراف نه دى.



د تابع د ګراف له مخې د تابع د قیمتونو،
د تابع د تعریف ناحیې او قیمتونو د ناحیو پیدا کول

د کتاب (83)مخ — د تدریس وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي بايد ددې لوست په پای کې: • د تابع دګرا ف له مخې د تابع د تعريف او قيمتونو د ناحيو پيدا کول زده کړي . • دګراف له مخې د يوې تابع قيمتونه پيدا کړای شي. • دګراف له مخې د x په راکړل شوو قيمتونو کې دتابع قيمت پيدا کړای شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې د تابع د تعريف او قيمتونو له ناحيو څخه ګټه واخيستلای شي او اهميت يې درک کړي.
د تدريس لارې ميتودونه	فعاله زده کړه (پوښتنې او ځوابونه، يو کسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول)
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشير، چارت... .
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د انګيزې د پيداکولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ او د شکل له مخې د تابع د تعريف او قيمتونو ناحيه پيداکړئ: $\text{Dom}F(x)=(4,5)$ $\text{Rang}F(x)=(-4,3]$

د لوست د بهير فعاليتونه: (28) دقيقې

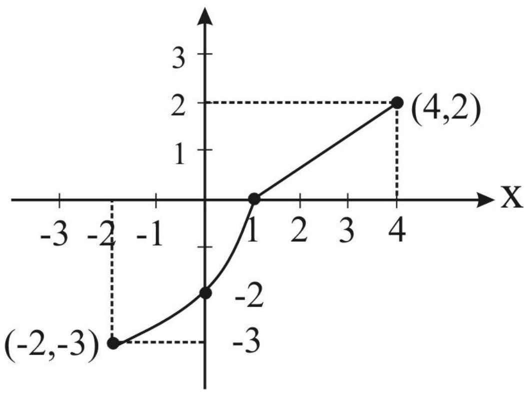
په داسې حالت کې چې د دوو راکړل شوو شکلونو چارت موجود وي *Dom* او *Range* په دواړو شکلونو کې وښودل شي، بيا دې د(83) مخ فعاليت زده کوونکي سرته ورسوي او خپل کار دې نورو ته توضيح کړي، د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره د لومړي او دويم مثالونو شکلونه دې توضيح شي، په دويم شکل کې دګراف د تقاطع نقطې د X له محور سره پيداکړئ چې $F(-2),F(3)$ او $F(5)$ دي چې $F(5)=F(3)=F(-2)=0$ دي.

په پای کې د دريم مثال په شکل کې دې د تعريف او قيمتونو ناحيې وټاکل شي.

د لوست تحکيم: (7) دقيقې

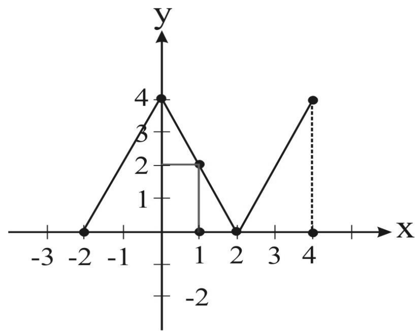
په لاندې شکل کې $F(-2),F(0),F(1)$ و $F(4)$ پيداکړئ.

$F(-2)=-3$
$F(0)=-2$
$F(1)=0$
$F(4)=2$



د لوست ارزونه: (5) **دقيقې**

په لاندې شکل کې $F(1), F(0), F(-2)$ او $F(4)$ پيدا کړئ.



په لاندنيو تابعگانو کې $f(1)$, $f(-1)$ او $f(0)$ قيمتونه پيدا کړئ.

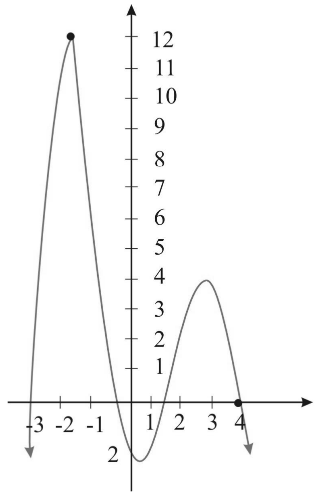
$f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ $\qquad$ $f(x) = x^2 + 15x - 4$

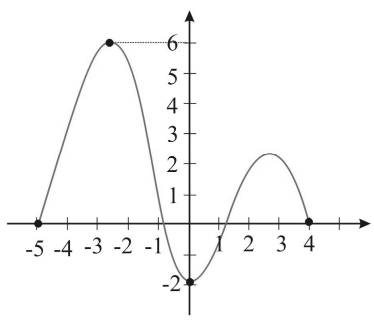
$f(x) = 3(x-9)^2$ $\qquad$ $f(x) = 2x^3 - 6x - 2$

$f(x) = (x-5)(x+7)$ $\qquad$ $f(x) = -144x^2 - 64x$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

$Dom = (-\infty, +\infty) \quad Range = (-\infty, 12]$





$\text{Dom} = [-5, 4]$ او $\text{Range} = [-2, 6]$

- د $f(x)$ او $g(x)$ دوې تابعگانې هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو تابعگانو د تعريف او قيمتونو ناحيې سره مساوي وي، د مثال په ډول $f(x) = x^6$ او $g(x) = |x|$ که فرض کړو چې د دواړو تابعگانو د تعريف ناحيه $\{-1, 0, 1\}$ وي چې د $x = -1$ لپاره د تابع قيمت $f(x) = (-1)^6 = 1$ او $g(x) = |-1| = 1$ کيږي.

$f(x) = g(x)$ او $x = 1$ لپاره د تابع قيمت $f(x) = 1$ او $g(x) = 1$ او د $x = 0$ لپاره د تابع قيمت $f(x) = 0$ او $g(x) = 0$ ده، په نتيجه کې په راکړل شوي د تعريف په ناحيه کې د $f(x)$ او $g(x)$ تابعگانې سره مساوي دي.

- د $f(x) = \frac{x}{x}$ او $g(x) = 1$ دوې تابعگانې سره مساوي نه دي، ځکه چې $domf(x) = R - \{0\}$ او د هرې يوې ثابتې تابع د تعريف ناحيه د حقيقي عددونو سټ دی

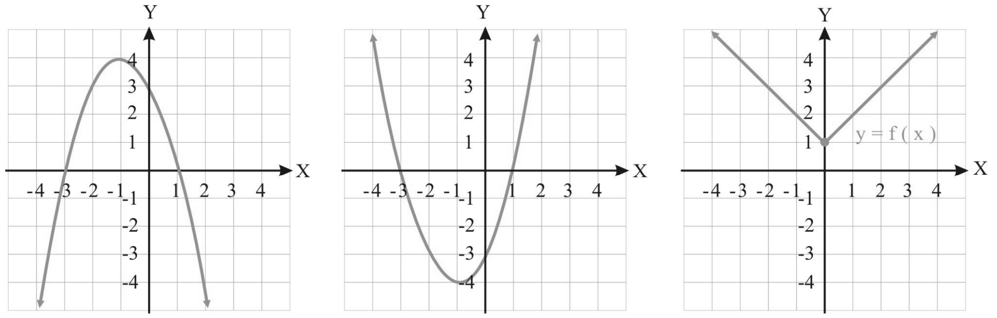
- د $f(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$ او $g(x)=\cos x$ دوې تابعګاني یو له بله سره مساوي نه دي، ځکه چې $D_f=D_g=IR$ لیکن $f(x)=|\cos x|$ او $g(x)=\cos x$ دي، نو $f(x)\neq g(x)$ دي.

د پوښتنو ځوابونه

په راکړل شوو شکلونو کې:

a- د تابع د تعریف ساحه b- د تابع د قیمتونو ساحه c- د x له محور سره د ګراف تقاطع ټکي

d- د y له محور سره دتقاطع ټکي او په دریم شکل کې د تابع غوښتل شوي قیمتونه پیدا کړئ.



$f(-1)=?\quad f(3)=?$

حل:

له لومړي شکل کې:

a) د لومړي شکل د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه $(-\infty,+\infty)$ دي.

b) دلومړي شکل د قیمتونو ناحیه $[-4,+\infty)$ ده.

c) ګراف د X محور $(1,0)$ او $(-3,0)$ په نقطو کې قطع کوي.

d) د y محور د $(0,-3)$ په نقطه کې قطع کوي.

په دویم شکل کې:

a) د تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه یا $(-\infty,+\infty)$ دي.

b) د تابع د قیمتونو ناحیه $(-\infty,+4]$ یا $\{y\in IR/\,y\leq 4\}$ ده.

c) د X محور د $(1,0)$ او $(-3,0)$ په نقطو کې قطع کوي.

d) د y محور د $(0,3)$ په نقطه کې قطع کوي.

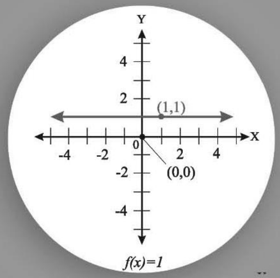
په دریم شکل کې:

a) د تابع د تعریف ناحیه د ټولو حقیقي عددونو سټ دی.

b) د تابع د قیمتونو ناحیه $[1,\infty)$ ده یا $\{y\in IR/\,y\geq 1\}$ ده.

c) د x له محور سره تقاطع نه لري.

d) د y محور د $(0,1)$ په نقطه کې قطع کوي $F(3)=4$ او $F(-1)=2$



ځینې خاصې تابعګانې

د کتاب (87)مخ　　　د تدریس وخت (2 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	• د ثابتې، عینیت او مطلقه قیمت د تابعګانو تعریفونه زده کړي. • د ثابتې، عینیت، مطلقه قیمت او څو معادله یې تابعګانو ګرافونه رسم کړای شي. • د ګراف له مخې د تابع ډول وپیژني. • د ریاضي د مسایلو په حل کې له دې تابعګانو څخه استفاده وکړای شي او اهمیت یې درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	فعاله زده کړه (پوښتنې او ځوابونه، یو کسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول)
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشیر، چارت... .
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته په داسې حل کې چې د ورودي برخې ګرافونه (د ثابتې تابع، ګراف، د عینیت او مطلقه قیمت تابعګانو ګرافونه) موجود وي، په دې برخه کې له زده کوونکو وپوښتئ.

د لوست بهیر او فعالیتونه(28) دقیقې

د (87) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي، بیا دې ثابته تابع تعریف شي، لومړی مثال د زده کوونکو په ونډه اخیستنه سره حل ا وګراف یې رسم کړي. د عینیت او مطلقه قیمت د تابع ګانو له تعریفولو څخه وروسته دې د دوی مثالونه حل شي د څو معادله یې تابع لومړی مثال دې حل شي او د (90) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي بیا دې محترم ښوونکي د څو معادله یې تابع ګراف رسم کړي او د (91) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي د علامې تابع (signFunction) له تعریفولو څخه وروسته ددې تابع ګراف رسم کړئ.

د لوست پیاوړتیا: (7) دقیقې

له پوښتنو څخه لومړنی پوښتنه حل کړئ.

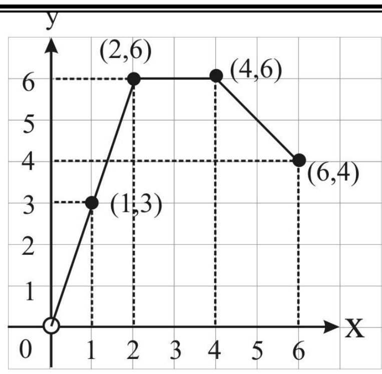
د لوست ارزونه: (5) دقیقې

د لوست د ارزونې لپاره د پوښتنو دویمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

• د لاندې څو معادله یې تابع ګراف رسم کړئ:

$$F(x)=\begin{cases}3x & : 0<x\le 2\\ 6 & : 2<x\le 4\\ -x+10 & : 4<x\le 6\end{cases}$$



• که چیرې د یوې تابع د تعریف ناحیه د څو سټونو په واسطه تقسیم شوي وي، په دې ډول چې ددې سټونو اتحاد د تابع د تعریف له ناحیې سره مساوي وي او د محور پر مخ د هر سټ لپاره د ځانګړې معادلې په واسطه تعریف شوي وي، نو په دې حالت کې څو معادله یې تابع لاس ته راځي یعنې :

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & : \quad x\in D_1 \\ f_2(x) & : \quad x\in D_2 \\ \vdots & \qquad \vdots \\ f_n(x) & \qquad x\in D_n \end{cases}$$

$$\forall_i \in N : D_i \bigcap D_j = \phi \qquad\qquad D_1 \bigcup D_2 \ldots \bigcup D_n = D_f$$

مثال: د f تابع په لاندې ډول تعریف شوي ده، ګراف یې رسم، د تعریف او قیمتونو ناحیې یې هم وټاکئ

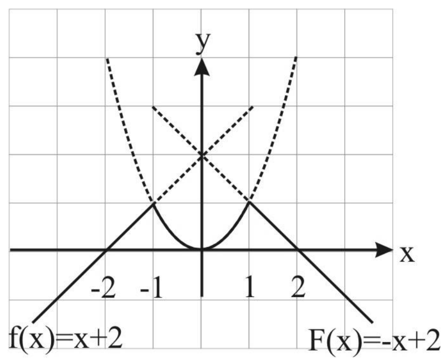
$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & : \quad x>1 \\ x^2 & : \quad -1\le x\le 1 \\ x+2 & : \quad x<-1 \end{cases}$$

حل:

x	2	3	4
f(x)	0	−1	−2

x	−2	−3	−4
f(x)	0	−1	−2

x	0	1	−1
f(x)	0	1	1



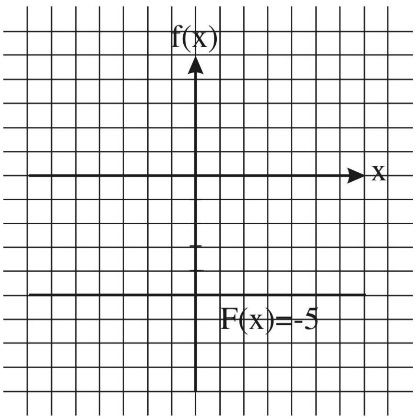
• ایا د $\begin{cases} 2 & , \quad x\ge 1 \\ x-1 & , \quad x<2 \end{cases}$ رابطه یوه تابع ښیي؟

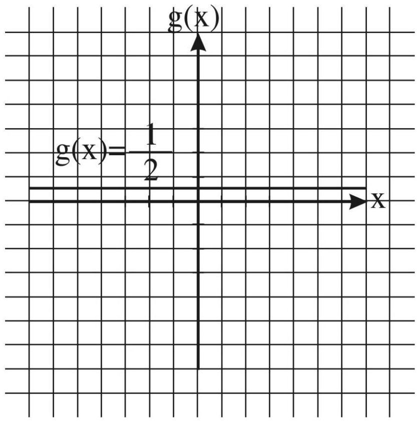
حل: دا رابطه یوه تابع نه ده، د مثال په ډول که $x=1.5$ وي له لومړۍ معادلې څخه y=2 او له دویمې معادلې څخه $y=\frac{1}{2}$ په لاس راځي، په دې معنا چې د یو x لپاره د y دوه قیمتونه موجودیږي.

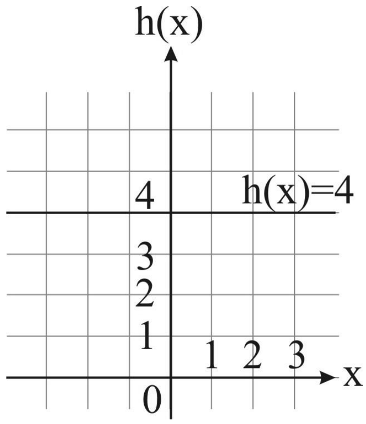
د پوښتنو ځوابونه

1- د $f(x)=-5$, $g(x)=\frac{1}{2}$ او $h(x)=4$ تابعگانو گرافونه رسم کړئ.

حل:



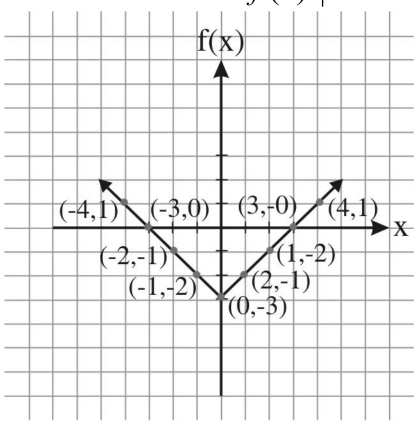




2- د $f(x)=|x|-3$ تابع گراف رسم کړئ.

حل:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
$f(x)$	−3	−2	−2	−1	−1	0	0



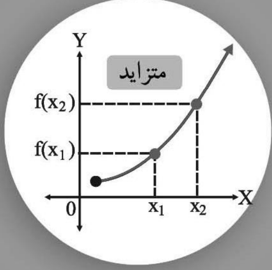
3- که $f(x)=\begin{cases}-x \Leftarrow x<0\\ x \Leftarrow x\geq 0\end{cases}$ وي، د $f(16), f(-3,2), f(0)$ پیدا کړئ.

حل:

$F(0)=0$
$F(-3.2)=-(-3.2)=3.2$
$F(16)=16$

4- که $h(x)=\begin{cases} x+1 \Leftarrow -1\le x<0 \\ -x+1 \Leftarrow 0\le x\le 1 \end{cases}$ وي د $h(x)$ د تعریف ناحیه وټاکئ.

حل: $Dom\, h(x)=[-1,1]$



متزايدې او متناقصې تابعګانې

د کتاب مخ (93) **د تدريس وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • د متزايدي او متناقصې تابع تعريف زده کړي • د جفتې او طاقې تابع په تعریف پوه شي. • د تابع د ګراف له مخې تعين کړای شي چې تابع په کومه برخه کې متزايده او په کومه برخه کې متناقصه ده. • د ګراف له مخې جفته او طاقه تابع وپیژني. • د رياضي د مسايلو په حل کې د متزايدو او متناقصو تابعګانو اهميت درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يو کسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او …
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشير، چارت او … .
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته په داسې حال کې چې د (93) مخ د دريو شکلونو چارت موجود وي او يا د تختې پر مخ رسم شوي وي له زده کوونکو څخه د ورودي پوښتنه وپوښتل شي لومړی شکل د متزايدې تابع، دويم شکل د متناقصې تابع او دريم شکل نه متزايده او نه متناقصه (ثابته تابع) ده.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**

د متزايدې او متناقصې تابع له تعريفولو څخه وروسته د $F(x) = x^2$ او $F(x) = -x^2$ مثال د شکل له مخې توضيح شي چې په کومو انټروالونو دا تابعګانې متزايدې اوپه کومو کې متناقصې دي.

د (94) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي. محترم ښوونکي دې لارښوونه وکړئ، د جفتې او طاقې تابع له تعريف کولو څخه وروسته لومړی او دويم مثال په داسې حال کې چې د شکلونو چارت موجود وي او يا د تختې پر مخ رسم شوي وي، واضح کړي.

دريم مثال چې د طاقې تابع د لا ښې پيژندنې لپاره راوړل شوي دي محترم ښوونکي دې حل کړي

د لوست پياوړتيا: (7) **دقيقې**

له لاندې تابعګانو څخه کومه يوه يې جفته، کومه يوه طاقه او کومه يوه يې نه طاقه او نه جفته ده؟

$F(x) = x^2$ يوه جفته تابع ده

$F(x) = x^4 + x^2 + 5$ يوه جفته تابع ده

$F(x) = 2x + 3$ نه جفته او نه طاقه تابع ده

$F(x) = \dfrac{2}{x-6}$ نه جفته او نه طاقه تابع ده

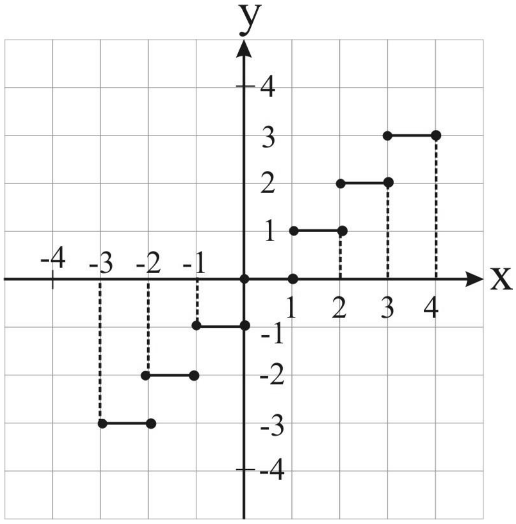
د لوست ارزونه: (5) **دقيقې**

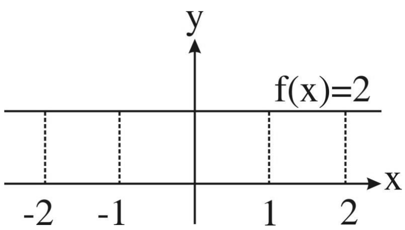
د لوست له لنډيز وروسته لومړی پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ .

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- که د تابع گراف نظر د Y محور ته متناظر وي، نو تابع جفته ده او که گراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدا ته متناظر وي، نو تابع طاقه ده له دې پرته تابع نه طاقه او نه جفته ده. ثابته تابع هر وخت جفته تابع ده او د $F(x) = 0$ تابع هم جفته ده او هم طاقه.
- د $F(x)=[x]$ تابع د لوی تام عدد یا زینه یي تابع په نوم یادیږي، هغه عدد ښیي چې له x کوچنی او یا ورسره مساوي وي د مثال په ډول: $[\pi]=3$, $[-6.9]=-7$, $[-5]=-5$, $[8.4]=8$

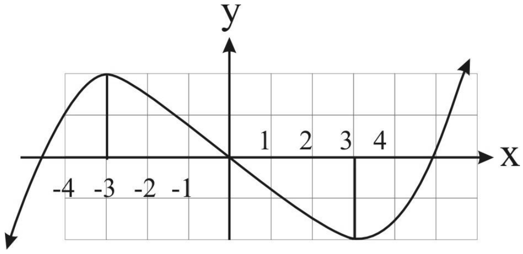
د $f(x)=[x]$ تابع گراف د $(-3,3)$ په انټروال کې رسم شوي دي چې په هیڅ انټروال کې دا تابع نه متزایده او نه متناقصه ده، همدارنگه ثابته تابع نه متزایده ده او نه متناقصه، د مثال په ډول: $F(x) = 2$

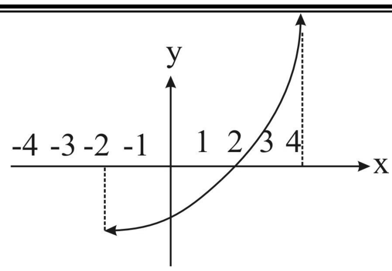




- لاندې تابع گانې په کوم انټروال کې متزایدې او په کوم انټروال کې متناقصې دي.

د $(-\infty,-3]$ او $[3,+\infty)$ په انټروال کې متزایده او $[-3,3]$ په انټروال کې متناقصه ده.





د $(-\infty,+\infty)$ په انټروال کې متزايده ده، هيڅکله هم متناقصه نه ده.

- د $y=-4x+2 \longrightarrow$ د $(-\infty,+\infty)$ په انټروال کې متناقصه ده.

د $y=x^2+4 \longrightarrow$ د $[0,+\infty)$ په انټروال کې متزايده او د $(-\infty,0]$ په انټروال کې متناقصه ده.

د $y=-|x+2| \longrightarrow$ د $(-\infty,-2]$ په انټروال کې متزايده او د $[-2,+\infty)$ په انټروال کې متناقصه ده.

د $y=x+|x| \longrightarrow$ تابع د $[0,\infty)$ په انټروال کې متزايده ده.

جفتي او طاقې تابعګانې

1- د f تابع د جفتې تابع په نامه يادېږي. که د هر $x\in D_f$ لپاره $-x$ هم د تابع د تعريف په ناحيه کې شامل وي او د $f(-x)=f(x)$ رابطه صدق وکړي.

2- د f تابع طاقه ده، که د هر $x\in D_f$ لپاره $-x$ هم د تابع د تعريف په ناحيه کې شامل وي او $f(-x)=-f(x)$ رابطه صدق کړي، د مثال په ډول د $F(x)=3x^2$ يوه جفته او $g(x)=x^3+9x$ يوه طاقه تابع ده.

3- د $F(x)=0$ هم جفته او هم طاقه تابع ده ځکه چې $F(-x)$ هم صفر کيږي.

4- د څو طاقو تابعګانو الجبري مجموعه طاقه ا و د څو جفتو تابعګانو الجبري مجموعه جفته ده.

5- د طاقې او جفتې تابع د جمعې او تفريق حاصل نه طاق دی او نه جفت.

6- د دوو طاقو تابعګانو ترکيب طاقه تابع ده، خو د دوو جفتو تابعګانو ترکيب او يا د يوې جفتې او يوې طاقې تابع ترکيب جفته تابع ده.

7- د طاقې تابع مشتق او انتيګرال جفته تابع ده او د هرې جفتې تابع مشتق طاقه تابع ده.

د پوښتنو ځوابونه

1- د لاندينيو تابعګانو څخه کومه يوه يې متزايده، کومه يوه يې متناقصه او کومه يوه نه متزايده او نه متناقصه ده؟

$f(x)=x^3+x \quad , \quad f(x)=x^2+x \quad , \quad f(x)=x^2-x^4$

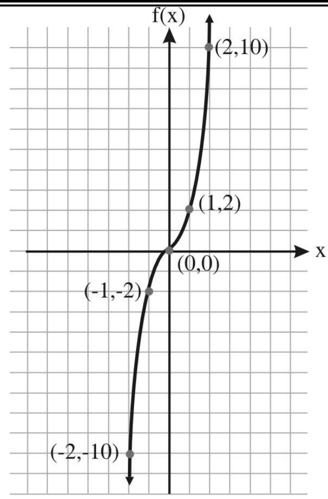
حل: د $f(x)=x^3+x$ په تابع کې که $x_1=2$ او $x_2=3$ وي، نو څرنګه چې $F(x_1)<F(x_2)$ ده يا $10<29$ دی، نو د $f(x)$ دتابع د $(-\infty,+\infty)$ په انټروال کې متزايده ده.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-10	-2	0	2	10

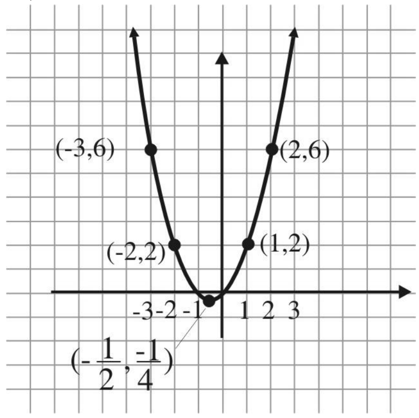
د $F(x)=x^2+x$ تابع

$F(2)=2^3+2=8+2=10$

$F(3)=3^3+2=27+2=29$

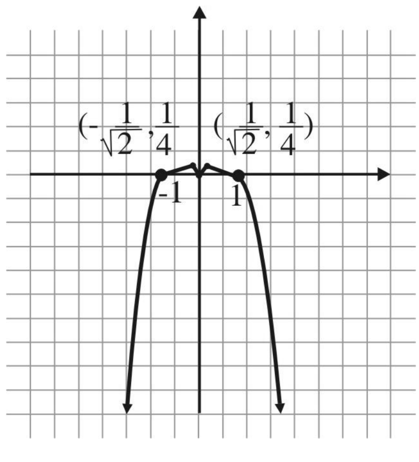


x	0	1	2	-1	$-1/2$	-2	-3
$f(x)$	0	2	6	0	$-1/4$	2	6



د $(-\infty,-\frac{1}{2})$ په انتروال کې تابع متناقصه او د $(-\frac{1}{2},\infty)$ په انتروال کې متزایده ده.

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
f(x)	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0



تابع $F(x)=x^2-x^4$

دا تابع د $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ په انټروال کې متزایده او د $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ په انتروال کې متزایده او د $(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ په انتروال کې متناقصه ده.

2- د لاندینیو راکړل شوو تابعگانو څخه کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

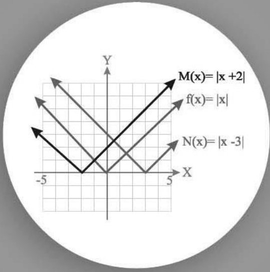
$f(x)=x \quad , \quad f(x)=|x| \quad , \quad f(x)=x^4 \quad , \quad f(x)=x^5$

حل: د $F(x)=x$ تابع طاقه ده ځکه چې $F(-x)=-x$ ده.

$F|-x|=|-x|=x=|x|$ ده، نو $F(x)=|x|$ جفته ده.

$F(x)=x^4$ تابع هم جفته تابع ده $F(-x)=(-x)^4=x=F(x)$

$F(x)=x^5$ یوه طاقه تابع ده، ځکه چې $F(-x)=(-x)^5=-x=-f(x)$



انتقال(Translation)

د درسي کتاب (97)**مخ** **د تدریس وخت** (2 **درسي ساعتونه**)

د زده کړې (**پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي**) **موخې**	زده کوونکي باید ددې لوست په پای کې: • دګراف د انتقال په مفهوم وپوهیږي. • د عمودي او افقي انتقال په مفهوم پوه شي. • د یوې تابع دګراف له مخې انتقال شوي ګرافونه رسم کړای شي. • د عمودي او افقي انتقال په توپیر وپوهیږي. • د عمودي او افقي انتقالونو ترکیب درک کړي. • دګرافونو په رسمولو کې د انتقال او د انتقالونو له ترکیب څخه ګټه واخیستلای شي.
د تدریس لارې (**میتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، یو کسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشیر، چارت او ... .
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته په داسې حال کې چې چارت او یا ورودي شکل پرتخته رسم شوي وي، ورودي پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ. ترڅو زده کوونکي فکر کولو ته مجبور شي، په لومړي شکل کې د مطلقه قیمت د تابع ګراف درې واحده ښیي، خواته او دوه واحده کیڼې خواته په افقي ډول انتقال شوي دي. په دویم شکل کې د مطلقه قیمت تابع ګراف په افقي ډول د څلورو واحدو په اندازه ښیي خواته انتقال شوي دي.
د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې** ددې لوست د (97) مخ لومړني فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي او محترم ښوونکي دې لارښوونه وکړي. د عمودي انتقال له تعریفولو وروسته دې لومړی او دویم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستې سره حل شي، په داسې حال کې چې د شکلونو چارت موجود وي او یاپر تخته رسم شوي وي، د افقي انتقال یا(Horizitan Transalation) له تعریفولو وروسته دې دریم مثال حل شي او د (100) مخ دویم فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي. محترم ښوونکي دې کوښښ وکړي چې په ګروپونو کې د زده کوونکو د کار کولو په وخت کې د دوی له کار څخه څارنه وکړي، تر څو ټول زده کوونکي یو له بله سره په مشوره کولو کې فعاله ونډه واخلي او د ستونزې د پیدا کیدو په صورت کې دې هغوی ته لارښوونه وشي. ددې لپاره چې دګراف د عمودي او افقي انتقال د ترکیب مفهوم ښه واضح شي، څلورم او پنځم مثال دې محترم ښوونکي کار کړي.	

د لوست پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

د $F(x)=|x|$ تابع دګراف له انتقال څخه د $g(x)=3|x|-1$ تابع ګراف رسم کړئ.

x	$f(x)=\|x\|$	$g(x)=3\|x\|-1$
-2	2	$3\|-2\|-1=5$
-1	1	$3\|-1\|-1=2$
0	0	$3\|0\|-1=-1$
1	1	$3\|1\|-1=2$
2	2	$3\|2\|-1=5$

محترم ښوونکي دې داګراف رسم کړي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

د لوست د ارزونې لپاره کولای شي چې د لومړي پوښتنې یوه برخه له زده کوونکو وپوښتي.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- په عمودي او افقي ډول دګراف کش کول او انعکاس چې $c>1$ وي:

- که د $y=f(x)$ د تابع ګراف د c د عامل په اندازه په عمودي ډول کش شي، د $y=cf(x)$ ګراف لاس ته راځي.
- د c د عامل په اندازه په عمودي ډول د $y=f(x)$ د تابع ګراف له فشار ورکولو څخه د $y=(\frac{1}{c})f(x)$ تابع ګراف لاس ته راځي.
- د c د عامل په اندازه په افقي ډول د $y=f(x)$ د تابع ګراف له فشار ورکولو څخه د $y=f(cx)$ تابع ګراف لاس ته راځي.
- په عمودي ډول د c د ضربي عامل په اندازه $y=f(x)$ تابع ګراف له کش کولو څخه د $y=f(\frac{x}{c})$ ګراف لاس ته راځي.
- د x د محور پر شاوخوا د $y=f(x)$ تابع له انعکاس څخه د $y=-f(x)$ تابع ګراف لاس ته راځي.
- د y محور پر شاوخوا د $y=F(x)$ تابع له انعکاس څخه د $y=f(-x)$ تابع ګراف لاس ته راځي.

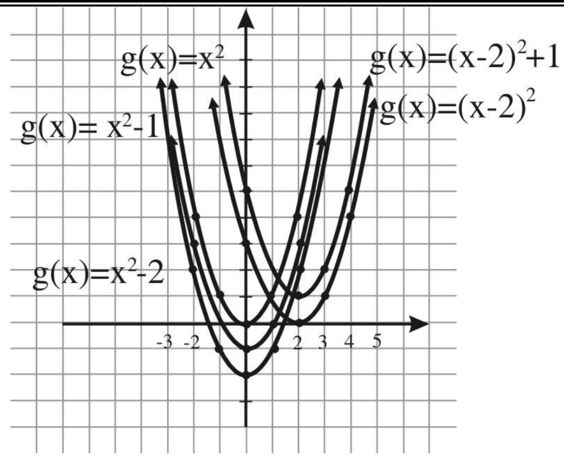
د پوښتنو ځوابونه

1- د $y=x^2$ دګراف له انتقال څخه د لاندینیو تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

$g(x)=x^2-2\ ,\ g(x)=(x-2)^2\ ,\ g(x)=x^2-1\ ,\ g(x)=(x-2)^2+1$

حل:

x	$y=x^2$	$g(x)=x^2-2$	$g(x)=(x-2)^2$	$g(x)=(x-2)^2+1$	$g(x)=x^2-1$
0	0	−2	4	5	−1
1	1	−1	1	2	0
−1	1	−1	9	10	0
2	4	2	0	1	3
−2	4	2	16	17	3
3	9	7	1	2	8
4	16	14	4	5	15



2– د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع گراف رسم کړئ او ددې گراف له انتقال څخه د $f(x)=\sqrt{x}+2$ او $f(x)=\sqrt{x+2}$ تابعگانو گرافونه رسم کړئ.

حل:

$F(x)=\sqrt{x}$

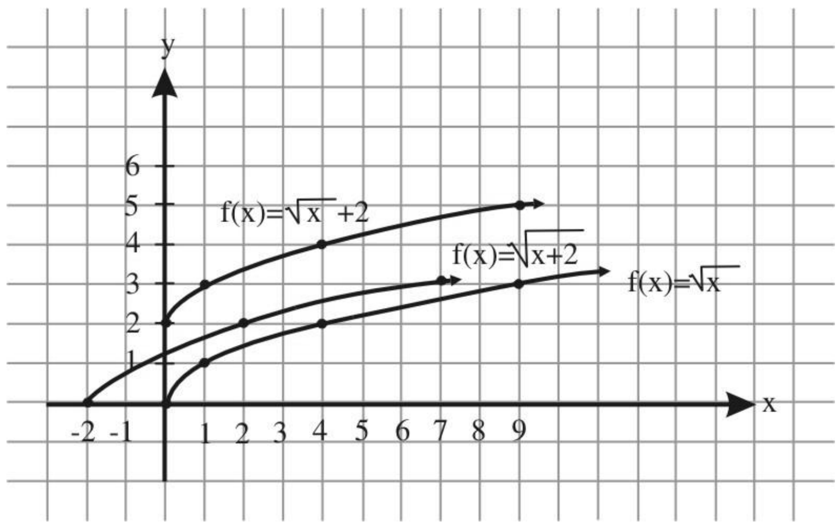
x	0	1	4	9
$f(x)$	0	1	2	3

$F(x)=\sqrt{x+2}$

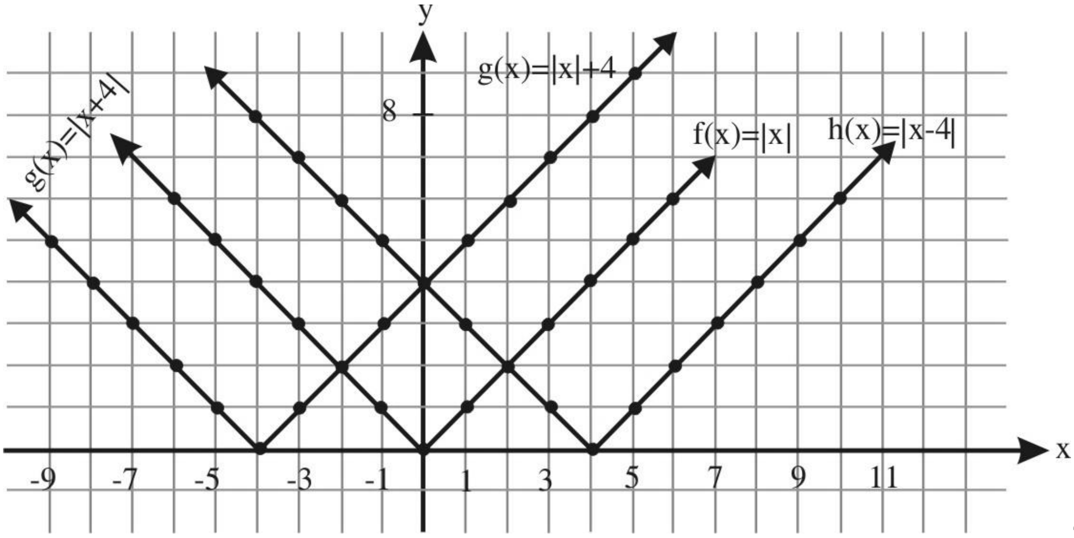
x	−2	2	7
f(x)	0	2	3

$F(x)=\sqrt{x}+2$

x	0	1	4	9
f(x)	2	3	4	5



3: د $f(x)=|x|$ د تابع گراف رسم کړئ او ددې گراف له انتقال څخه د $g(x)=|x|+4$, $g(x)=|x+4|$ او $h(x)=|x-4|$ تابعگانو گرافونه رسم کړئ.



ذ

x	0	1	3	5	-1	-2	-3
$f(x)=\|x\|$	0	1	3	5	1	2	3

x	0	1	-1	2	-2	3
$\|x\|+4$	4	5	5	6	6	7

x	0	1	6	9
$\|x-4\|$	4	3	2	5

x	0	-1	1	-2	-6
$\|x+4\|$	4	3	5	2	2

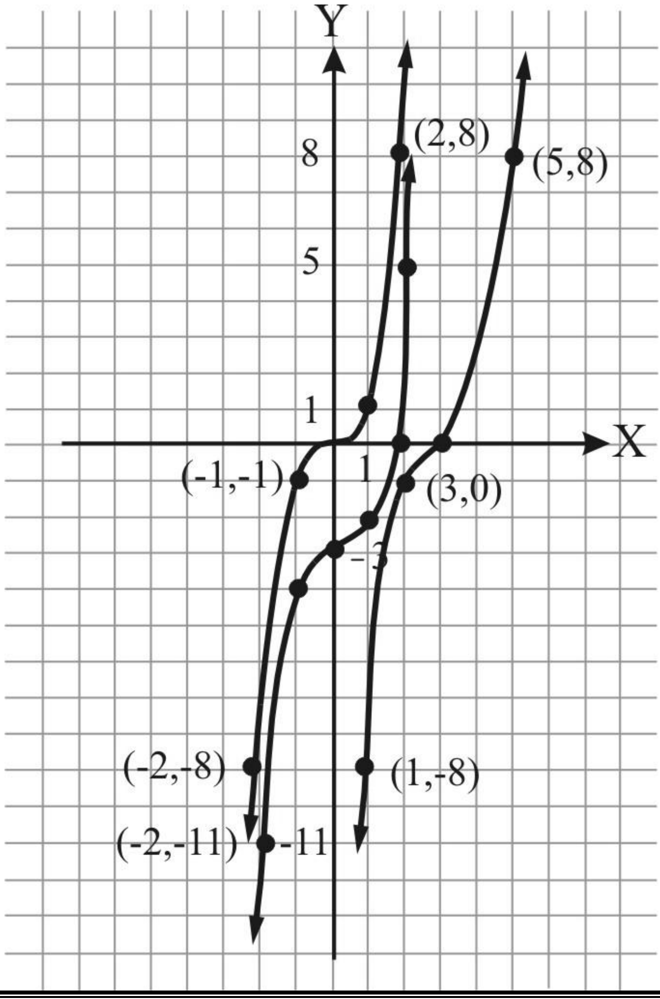
4: د $f(x)=x^3$ د تابع گراف له انتقال څخه د $g(x)=x^3-3$ او $g(x)=(x-3)^3$ تابعگانو گرافونه رسم کړئ.

حل:

x	0	1	2	-1	-2
$f(x)$	0	1	8	-1	-8

x	0	1	2	-1	-2
$g(x)=x^3-3$	-3	-2	5	-4	-11

x	0	1	2	3	5
$g(x)=(x-3)^3$	-27	-8	-1	0	8



$f(x)=\sqrt{4-x}$
$g(x)=\sqrt{3+x}$
$(f+g)(x)=?$

د تابعګانو عملیې

د کتاب (103)مخ **د تدریس وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې (**پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي**) **موخې**	زده کوونکي باید ددې لوست په پای کې: • د تابعګانو د جمعې، تفریق، ضرب او وېش عملیې زده کړي. • د تابعګانو د جمعې، تفریق، ضرب او وېش د حاصلونو د تعریف ناحیې وټاکلای شي. • تابعګاني سره جمع، تفریق، ضرب او یوه پر بله وویشلای شي. • د ریاضي د مسایلو په حلولو کې دتابعګانو د څلورګونو عملیو اهمیت درک او له زده کړې څخه یې د ریاضي له مضمون سره علاقه پیدا شي.
د تدریس لارې (**میتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، یو کسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت او ... .
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د انګیزې د پیداکولو لپاره باید ورودي پوښتنه له زده کوونکو وپوښتل شي: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+2+2x+11=3x+13$ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+2-(2x+11)=x+2-2x-11=-x-9$

د لوست بیهر او فعالیت: (28) **دقیقې**

د تابعګانو د عملیو له تعریف کولو او د دوي د تعریف د ناحیو له ټاکلو وروسته دې د زده کوونکو په وړاندې اخیستنې سره لومړی او دویم مثال د تختې پر مخ حل شي، بیا دې ددې لوست لومړی فعالیت زده کوونکي سرته ورسوي، تر څو چې زده کوونکي د تابعګانو د ناحیو ټاکنه چې ددې څېرکې په لومړنیو لوستونو کې ویلي دي، زده کړي. له دې وروسته چې ښوونکي دریم مثال حل کړي، ددې لوست فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي، بیا دې محترم ښوونکي د زده کوونکو په وړاندې اخیستنې سره څلورم او پنځم مثالونه حل کړي او دتعریف ناحیې دې یې د عددونو پر محور وښودل شي. ددې لپاره چې وپوهیږي چې یوه تابع څرنګه په یو ثابت عدد کې ضرب کړو، شپږم مثال دې حل شي.

د لوست پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

د موضوع د لا ښې زده کړې لپاره د پوښتنو د (a) برخه دې حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

د لوست د ارزونې لپاره لاندې پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

که $f(x)=5x^2$ او $g(x)=3x-1$ وي نو $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $f\cdot g$ او $\frac{f}{g}$ پیداکړئ؟

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

دتابعگانو د عملیو خاصیتونه

- اگر g, h و f توابع و t, n, m و p اعداد ثابت باشند؛ داریم که:

1) $h + g = g + h$ 2) $f \cdot g = g \cdot f$

3) $(f + g) + h = (f + g) + h$ 4) $(f \cdot g)h = (f \cdot g)h$

د $\alpha(x) = 0$ او $k(x) = 1$ تابعگانو لپاره لرو چې:

5) $f + \alpha = f$

6) $f \cdot k = f$

7) $f + (g + h) = l(f + g) + h$

8) $f(g + h) = fg + fh$ $m(f + g) = mf + mg$

9) $(m + n)f = mf + nf$

10) $m(fg) = (mf)g$

11) $(pt)f = P(tf)$

- پام مو وي چې $\text{dom}(\frac{f}{g})(x)$ د درسي کتاب د (104) مخ په دریم مثال کې په لاندې ډول لیکل شوي دي.

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x) = \{x / x \neq 2 \ , \quad x \neq 1\}$$

د انتروال په شکل یې په دې ډول هم لیکلای شو:

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x) = (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$$

- که $f(x) = x + 3$ او $g(x) = -x - 1$ وي، د $f + g$ او $f - g$ گرافونه رسم کړئ.

حل:

$(f + g)(x) = x + 3 - x - 1 = 2$

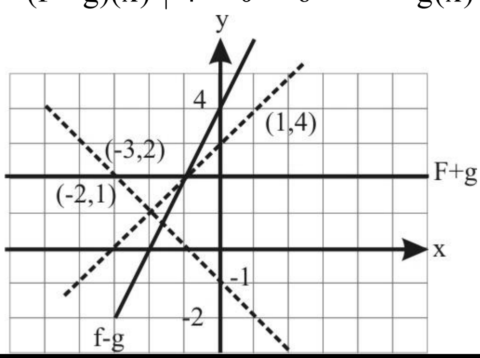
$(f - g)(x) = x + 3 + x + 1 = 2x + 4$

$y = x + 3$

x	0	−1	−2	−3	1
f(x)	3	2	1	0	4

x	0	−2	1
(f − g)(x)	4	0	6

x	0	−1	−2	−3
g(x)	−1	0	1	2



د پوښتنو ځوابونه

لاندې تابعګانې په پام کې ونیسئ:

1 - $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ و $(\frac{f}{g})(x)$ پیدا کړئ.

2- د تعریف ناحیې هم وټاکئ.

$a: f(x)=2x+3 \qquad g(x)=x-1$

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(2x+3)+(x-1)=3x+2$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(2x+3)-(x-1)=x+4$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(2x+3)(x-1)=2x^2-2x+3x-3=2x^2+x-3$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2x+3}{x-1}$$

$b: f(x)=x-5 \qquad g(x)=3x^2$

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x-5)+(3x^2)=3x^2+x-5$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=(x-5)-(3x^2)=-3x^2+x-5$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x-5)(3x^2)=3x^3-15x^2$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x-5}{3x^2}$$

$c: f(x)=2x^2-x-3 \qquad g(x)=x+1$

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=2x^2-x-3+x+1=2x^2-2$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=2x^2-x-3-(x+1)=2x^2-2x-2$$
$$(f-g)(x)=2x^3+4x^2-4x-3$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{2x^2-x-3}{x+1}=2x-3$$

$d: f(x)=\sqrt{x} \qquad g(x)=x-5$

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+(g)=\sqrt{x}+x-5$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x}-x+5$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x}(x-5)=x\sqrt{x}-5\sqrt{x}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x}}{x-5}$$

$e: f(x)=\sqrt{x+4} \qquad g(x)=\sqrt{x-1}$

حل:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{x+4})(\sqrt{x-1}=\sqrt{(x+4)(x-1)}=\sqrt{x^2+3x-4}$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-1}}$

$f: f(x)=\sqrt{3x} \qquad g(x)=\sqrt{x^2-1}$

حل:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{3x^2}+\sqrt{x^2-1}$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{3x}-\sqrt{x^2-1}$

$(f-g)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{3x}(\sqrt{x^2-1})=\sqrt{3x^3-3x}$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x^2-1}}$

د دویم جز حل: $(-\infty,\infty)$ یا $dom\, g = IR \qquad dom\, f = IR$

$:a$

$dom(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$

$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$

$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$

$dom(\frac{f}{g})(x)IR\cap IR\setminus\{x/g(x)\neq 0\}=IR\setminus\{-1\}=\{x\in IR/x\neq -1\}=(-\infty,-1\cup(-1,\infty)$

$:b$

$dom(f+g)(x)=dom(f-g)(x)=dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$

$dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq 0\}$

$:c$

$dom(f+g)(x)=dom(f-g)(x)=dom(f\cdot g)(x) \qquad dom(\frac{f}{g})(x)=IR\cap IR\setminus\{-1\}$

$dom\frac{f}{g}(x)=\{x\in IR \mid x\neq -1\}$

$:d$

$dom\, f=\{x\in IR/x\geq 0\} \qquad dom\, g=IR$

$dom(f+g)(x)=dom(f-g)(x)=dom(f\cdot g)(x)$

$[0,\infty)\cap IR=[0,\infty) \qquad dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\geq 0\ ,\ x\neq 5\}$

$[0,5)\cup(5,\infty)$ يا $[0,\infty)-\{5\}$ يا

$:e$

$dom\, f=\{x/x+4\geq 0\ ,\ x\geq -4\}$ يا $[-4,\infty]$

$dom\, g=\{x/x-1\geq 0\ ,\ x\geq 1\}$ يا $[1,\infty]$

$\mathrm{dom}(f+g)(x)=\mathrm{dom}(f-g)(x)=\mathrm{dom}(f\cdot g)(x)=[-4,\infty)\cap[1,\infty)=[1,\infty)$

يا

$\{x\in IR/\ 1\leq x\}$

$\mathrm{dom}(\frac{f}{g})(x)=(1,\infty)$

$:f$

$\mathrm{dom}\, f=[0,\infty)\qquad ,\qquad \mathrm{dom}\, g=\{x\in IR/x\leq -1$ يا $x\geq 1\}$

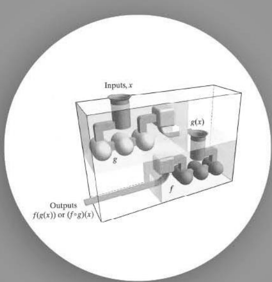
$dom(f+g)(x)=dom(f-g)(x)=dom(f\cdot g)(x)=[0,\infty)\cap[1,\infty)\cap(-\infty,-1]=[1,+\infty)$

$dom(\frac{f}{g})(x)=dom\, f\cap dom\, g\setminus\{x/g(x)\neq 0\}$

$dom\, f=[0,\infty)$

$dom\, g=\{x/x\in IR, x<-1\ ,x>1\}$

$dom\, f\cap domg=(-\infty,-1)\cap[0,\infty)\cap(1,\infty)=(1,\infty)$



د تابعګانو ترکیب یا مرکبې تابعګانې

د درسي کتاب (107) مخ   د تدریس وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د مرکبو تابعګانو په تعریف وپوهیږي • تابعګاني یوه له بلې سره ترکیب کړای شي. • د تابعګانو د ترکیب مفهوم درک کړای شي. • د مرکبو تابعګانو د تعریف ناحیې پیدا کړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حلولو کې د مرکبو تابعګانو د خاصیتونو اهمیت درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یو کسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او ...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت او ... .
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د ورودي شکل په برخه کې له زده کوونکو وپوښتئ د وورودي شکل مفهوم دا دی چې که تابع ته د یو ماشین په شان فکر وکړو په لومړني ماشین کې input یا x د $g(x)$ د تابع د تعریف ناحیه ده او په دویم ماشین کې $g(x)$ د F د تابع د تعریف ناحیه ده چې له ترکیب څخه وروسته تابع د $(Fog)(x)$ یا $F(g(x))$ او یا د F[g(x)] په شکل ښودل کیږي.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې

ددې لوست فعالیت دې د ښوونکي په مرسته زده کوونکي سرته ورسوي او متحرم ښوونکي دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره لومړی او دویم مثالونه حل کړي. د (108)مخ فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي او خپل کار دې نورو ته توضیح کړي. ددې لوست دریم او څلورم مثال دې ښوونکي حل کړي او د Fog د تعریف ناحیه دې په شکل کې وښودل شي. په همدې ډول دې پنځم مثال حل شي او د x په یو مشخص قیمت کې دې د دوو تابعګانو د ترکیب طریقه زده کوونکو ته توضیح شي او زده کوونکي دې د (110) مخ فعالیت سرته ورسوي.

د لوست پیاوړتیا: (7) دقیقې

که $F(x)=5x^2$ او $g(x)=3x-1$ وي؛ gof او gog پیدا کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

که $f(x)=3x-4$ او $g(x)=-x^2$ وي؛ $(fog)(2)$, $(gog)(2)$ او $(fof)(-2)$ پیدا کړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

که $f(x)=4x^2+1$ او $g(x)=\frac{1}{x+2}$ وي.

$(fog)(-1)$ $\quad$ $(gof)(2)$ عبارت دي له:

حل:

$$f(2)=4(2)^2+1=17$$
$$g(17)=\frac{1}{17+2}=\frac{1}{19}\Rightarrow(gof)(2)=\frac{1}{19}\Rightarrow(gof)(2)=\frac{1}{19}$$

د $(fog)(-1)$ د پیداکولو لپاره لومړی $g(-1)$ پیداکړئ:

$$g(-1)=\frac{1}{-1+2}=1$$
$$f(1)=4(1)^2+1=5\Rightarrow(fog)(-1)=5$$

- که $x=0.25$ او $f(x)=\sqrt{x}$ وي

$$f(0.25)=\sqrt{0.25}\approx 0.5$$
$$f^2(0.25)=\sqrt{\sqrt{0.25}}\approx 0.7071$$
$$f^3(0.25)=\sqrt{\sqrt{\sqrt{0.25}}}\approx 0.8409$$
$$f^4(0.25)=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{0.25}}}}\approx 0.9170$$

- که $g(2x-1)=2x+3$ وي، نو $g(x)$ عبارت دی له:
- بڼې خوا $2x+3$ د $2x+3=2x-1+4$ په شکل لیکو، اوس که د $2x-1$ پر ځای x وضع کړو، نو $g(x)=x+4$ کیږي.
- که د A له سټ څخه د B سټ ته f یوه تابع وي چې د تعریف ناحیه یې $\{1,2\}$ او د قیمتونو ناحیه یې $\{a,c\}$ وي او g د C له سټ څخه و D ته یوه داسې تابع وي چې د تعریف ناحیه یې $\{a\}$ او د قیمتونو ناحیه یې $\{n\}$ وي، نو د gof مرکبه تابع به له A څخه وD ته وي چې ددې مرکبې تابع د تشکیل شرط دا دی چې د f د تابع د قیمتونو ناحیه (د f د قیمتونو یوه برخه) د g د تابع د تعریف ناحیې فرعي سټ وي. D_{gof} د f د تابع د تعریف د ناحیې عناصر دي یا $D_{gof}=\{x\in D_f\}$ دي، په دې شرط چې مرکبه تابع موجود وي یعنې د f د تابع د قیمتونو ناحیه (اویا یوه برخه یې) چې په دې مثال کې یوازې $\{a\}$ هر عنصر یا د g د تعریف ناحیه ده نو:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\ /\ f(x)\in D_g\}$$

یعنې د gof په مرکبه تابع کې د تعریف ناحیه له f او د قیمتونو ناحیه له g څخه ټاکو.

مثال: که د $f(x)=2x+1$ د تابع د تعریف ناحیه $x\geq 0$ او د $g(x)=3x-2$ د تعریف ناحیه $-3<x<5$ وي، د gof تابع د تعریف ناحیه عبارت ده له:

د تعریف په اساس $D_{gof}=\{x\in D_f\ |\ f(x)\in D_g\}$ لومړی D_g پیداکوو او د x پرځای د f د تابع په D_g کې لیکو

$$D_g\Rightarrow -3<x<5\Rightarrow -3<f(x)<5$$
$$-3<2x+1<5\Rightarrow -4<2x<4\longrightarrow -2<x<2$$

او ددې نتیجې تقاطع له D_f سره پیداکوو:

$$-2<x<2\cap x\geq 0$$

چې ددې ځواب $2 \leq x \leq 0$ د $(gof)_{(x)}$ تابع د تعریف ناحیه ده.

یا کولای شو په پورتني مثال کې د fog د تعریف ناحیې د پیداکولو لپاره په دې ډول عمل کوو:

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

لومړی د f تابع ناحیه پیداکوو، بیا د x پر ځای باید g(x) ولیکو او تقاطع یې له D_g سره په لاس راوړو:

$$D_f =: \longrightarrow x \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq 0 \Rightarrow 3x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \cap D_g$$

نو د fog د تابع د تعریف ناحیه له $\frac{2}{3} \leq x < 5$ څخه عبارت ده.

- که $f(x) = \frac{2}{x-3}$ او $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$ وي، fog او د تعریف ناحیه یې پیداکړئ.

$D_f = IR - \{3\}$

$D_g = R - \{-1\}$

$$D_{fog} = \{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \mid x \in IR, x \neq -1, \frac{x-2}{x+1} \neq 3\}$$

$$= \{x \mid x \in IR, x \neq -\frac{5}{2}\} = IR - \{-\frac{5}{2}, -1\}$$

$$(fog)(x) = f(\frac{x-2}{x+1}) = \frac{2}{\frac{x-2}{x+1} - 3} = \frac{2x+2}{-2x-5}$$

- که چیرې (fog)ولرو او وغواړو چې f(x) په لاس راوړو، د g(x)=t مساوات د t له جنسه پیداکوو او په $(fog)_{(x)}$ کې یې د x پر ځای وضع کوو.

د مثال په ډول که $(fog)_{(x)} = 6x-3$ وي، غواړو f(x) په لاس راوړو او که $g(x) = 3x-2$ وي.

$$g(x) = t \longrightarrow 3x-2 = t \longrightarrow 3x = t+2 \longrightarrow x = \frac{t+2}{3}$$

اوس که $\frac{x+2}{3}$ د x پرځای په 6x-3 کې عوض کړو، f(x) په لاس راځي:

$$f(x) = 6(\frac{x+2}{3}) - 3 = 2(x+2) - 3 = 2x+4-3 = 2x+1$$

مثال: که $g(4x+1) = 2x-11$ وي، $g_{(x)}$ او $g(-1)$ پیداکړئ.

$$4x+1 = t \Rightarrow 4x = t-1 \Rightarrow x = \frac{t-1}{4}$$

اوس په 2x-11 کې د x پر ځای قیمت یې $\frac{t-1}{4}$ عوض کوو، البته د $\frac{t-1}{4}$ پر ځای د $\frac{x-1}{4}$ بردو لرو چې:

$$g(x) = 2(\frac{x-1}{4}) - 11 = \frac{x-1}{2} - 11 = \frac{x-1-22}{2} = \frac{x-23}{2} \Rightarrow g(-1) = \frac{-1-23}{2} = -12$$

ځینې وختونه په لنډ ډول داسې په لاس راځي:

مثال: که $g(2x-1) = 2x+3$ وي، $g(x)$ پیداکړئ.

د مساوات ښي خوا یا له 2x+3 څخه 2x-1 جوړوو:

$2x+3=2x-1+4$

اوس د $2x-1$ پر ځای که x عوض کړو، $g(x)=x+4$ کیږي.

- که $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}$ وي $f(x)$ پیدا کړئ.

حل: لومړی باید له $x^2+\frac{1}{x^2}$ څخه $x+\frac{1}{x}$ جوړ کړو او بیا د $x+\frac{1}{x}$ پر ځای د x متحول ولیکل شي.

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2-2=(x+\frac{1}{x})^2-2 \Rightarrow f(x)=x^2-2$$

- که $f(x)-3f(-x)=3x$ وي، $f(x)$ په لاس راوړئ، د x پر ځای $-x$ عوض کوو لرو چې:

$F(-x)=-3f(x)=-3x$

ددې لپاره چې $f(-x)$ له منځه یوسو، دویمه معادله د 3 په عدد کې ضربوو:

$$\begin{cases} f(x)-3f(-x)=3x \\ f(-x)-3f(x)=-3x \end{cases}$$

$$f(x)-9f(x)=3x-9x \Rightarrow -8f(x)=-6x \Rightarrow f(x)=\frac{6x}{8}=\frac{3x}{4}$$

- که $f(x)+2f(\frac{1}{x})=2x+1$ وي $f(x)$ پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې x او $\frac{1}{x}$ لرو نو، په راکړل شوي رابطه کې د x پر ځای $\frac{1}{x}$ لیکو چې د $f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{2}{x}+1$ رابطه په لاس راځي:

$$f(x)+2f(\frac{1}{x})=2x+1 \qquad f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{2}{x}+1$$

ددې لپاره چې $f(\frac{1}{x})$ مو حذف کړی وي، دویمه معادله د (-2) په عدد کې ضربوو او دواړه رابطې سره جمع کوو:

$$f(x)+2f(\frac{1}{x})=2x+1$$

$$-2f(x)-4f(x)=\frac{-4}{x}-2$$

$$-3f(x)=2x+1-\frac{4}{x}-2=2x-\frac{4}{x}-1$$

نو $f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3x}+\frac{1}{3}$ کیږي.

د پوښتنو ځوابونه

1- که $f(x)=-3x+2$ او $g(x)=x^3$ وي:

$$(f+g)(x) \quad , \quad (f-g)(x) \quad , \quad (g\cdot f)(x) \quad , \quad (\frac{g}{f})(x) \quad , \quad (g-f)(x)$$

په لاس راوړئ او هم یې د تعریف ناحیې وټاکئ.

حل:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=-3x+2+x^3$

$\operatorname{dom} f=IR \quad , \quad \operatorname{dom} g=IR \Rightarrow \operatorname{dom}(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$

$(g-f)(x)=x^3-(-3x+2)=x^3+3x-2$

$\operatorname{dom}(g-f)(x)=IR$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=x^3(-3x+2)=-3x^4+2x^3 \quad \operatorname{dom}(f\cdot g)(x)=IR$

$(\frac{g}{f})(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^3}{-3x+2}$

$-3x+2=0\Rightarrow 3x=2\Rightarrow x=\frac{2}{3}$

$\operatorname{dom}(\frac{g}{f})(x)=\left\{x\in IR / x\neq\frac{2}{3}\right\}=(-\infty,\frac{2}{3})\cup(\frac{2}{3},\infty) \qquad IR\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$

$(f-g)(x)=-3x+2-x^3$

$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$

2- که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=\sqrt{x-3}$ وي، $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ او $(\frac{g}{f})(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$(f\cdot g)(x)=(x^2-3)(\sqrt{x-3})$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-3}{\sqrt{x-3}}$

$(\frac{g}{f})(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{x^2-3}$

3- که $f(x)=x^2+1$ او $g(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=\sqrt{4-x^2}$ او $k(x)=\sqrt{3x+4}$ وي

$(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$, $(h\cdot k)(x)$ او $(\frac{h}{k})(x)$ د تابعګانو د تعریف ناحیې پیدا کړئ.

د I جز حل:

$\operatorname{dom} f=IR \quad \operatorname{dom} g(x)=IR-\{0\}$

$\operatorname{dom}(f\cdot g)(x)=IR\setminus\{0\}$

د II جز حل:

$dom\ f=IR \quad dom\ g=IR-\{0\}$

$dom(\frac{f}{g})(x)=IR\setminus\{0\}$

د III جز حل:

$\operatorname{dom} h=\{x\in IR / -2\leq x\leq 2\}=[-2,2]$

$\operatorname{dom} h=4-x^2\geq 0$ یا

$\operatorname{dom} k=3x+4\geq 0\Rightarrow x\geq-\frac{4}{3}$

$$\mathrm{dom}\,k=[-\frac{4}{3},\infty)$$

$$dom(h\cdot k)(x)=\left[-2,2\right]\cap[-\frac{4}{3},\infty)=[-\frac{4}{3},2]$$

$$\mathrm{dom}(\frac{h}{k})(x)=\left[-2,2\right]\cap[-\frac{4}{3},\infty)-\{\frac{4}{3}\}=(-\frac{4}{3},2]$$

یا:

$$\mathrm{dom}(\frac{h}{k})(x)=[-2,2]\bigcap[-\frac{4}{3},+\infty)-\{x/k(x)=0\}=[-\frac{4}{3},2]-\{\frac{4}{3}\}=(-\frac{4}{3},2]$$

4- که $f(x)=3x-2$ او $g(x)=x^2$ وي $(g\,o\,f)(3)$ او $(f\,o\,g)(1)$ پیداکړئ.

حل:

$$(g\,o\,f)(x)=g(f(x))=g(3x-2)=(3x-2)^2=9x^2-12x+4$$

$$(g\,o\,f)(3)=9\cdot 9-36+4=85-36=49$$

$$(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=3x^2-2$$

$$(f\,o\,g)(1)=3-2=1$$

5- که $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{2-x}$ وي $f\,o\,g$, $g\,o\,f$ و $f\,o\,f$ پیداکړئ.

حل:

$$(f\,o\,g)(x)=f(\sqrt{2-x})=\sqrt{\sqrt{2-x}}=\sqrt[4]{2-x}$$

$$(g\,o\,f)(x)=g(\sqrt{x})=\sqrt{2-\sqrt{x}}$$

$$f\,o\,f=f\left(\sqrt{x}\right)=\sqrt{\sqrt{x}}=\sqrt[4]{x}$$

6- که $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $g(x)=x^{10}$ او $h(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g\,o\,h)(x)$ پیداکړئ.

حل:

$$(f\,o\,g\,o\,h)(x)=(f\,o\,g),(h(x))=f(g((h(x))=(f\,o\,g,(x+3))f(x+3)^{10}\ \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$$

یا:

$$(fog)=\frac{x^{10}}{x^{10}+1}\Rightarrow(fogoh)(x)=\frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$$

معکوسه تابع (Inverse Function)

ددرسي کتاب (111)**مخ** **د تدریس وخت** (2 **درسي ساعتونه**)



د زده کـړې (پـوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	ددې لوست په پای کې باید زده کوونکي: • د معکوسې تابع او د یو په یو تابع په تعریف وپوهیږي. • وپوهیږي چې هره تابع معکوس منوونکې نه وي. • دا درک کړي چې د یو په یو تابع، معکوس هم یوه تابع وي. • په دې وپوهیږي چې د تابع د تعریف ناحیه د معکوسې تابع د قیمتونو ناحیه او د تـابع د قیمتونو ناحیه د معکوسې تابع د تعریف ناحیه ده. • د یوې تابع معکوس پیدا کړای شي. • د تابع او د معکوس گراف یې رسم کړای شي. • د تابع او د معکوسې تابع د گرافونو تر منځ اړیکه درک کړای شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او ...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت او ...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له زده کوونکو وپوښتل شي چې د ورودي برخې د ترمامیټر د سانتي گرید او فارنهایت د حـرارت د درجـو تـرمنځ څـه اړیکـه موجـود ده؟ دا اړیکـه یـوه د بلـې معکوسـه ده. $F=\frac{9}{5}C+32$ او $C=\frac{5}{9}(F-32)$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې**

محترم ښوونکي دې زده کوونکي دې ټکې ته متوجه کړي چې که یوه تابع د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي وي او د مرتبو جوړو دویمي مختصې یې تکرار شوې نه وي، نو دا ډول تابع معکوس منوونکې وي (معکوس یې هم یوه تابع ده) او که د مرتبو جوړو دویم عناصر یې تکرار شوي وي، تابع معکوس پذیره نه ده، یا دا چې یوازې یو په یو تابع معکوس مننونکې ده، ددې مفهوم د وضاحت لپاره دې محترم ښوونکي د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره لومړی او دویم مثال حل کړي. له دې وروسته چې زده کوونکو د یو په یو تابع تعریف زده کړ، دریم مثال دې حل شي او د (113) مخ فعالیت دې زده کوونکي په گروپونو کې کار وکړي او خپل کار دې نورو ته توضیح کړي. ددې لپاره چې زده کوونکي د گراف له مخې د یو په یو تابع وپیژني، محترم ښوونکي دې څلورم مثال د چارت له مخې او یا په شکل کې د تختې پر مخ کار کړي او د معکوسې تابع له تعریفولو څخه وروسته دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره پنځم، شپږم او اووم مثال حل کړي لومړی زده کوونکو ته د تابع او د هغې د معکوسې تابع د گراف اړیکه واضح کړي، بیا د چارت له مخې او یا پر تخته نهم او لسم مثال حل کړي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

د لوست د زده کړې د پیاوړتیا لپاره باید لاندې پوښتنه حل شي که $f(x) = 0.2x + 0.4$ وي

د $f(x)$ معکوسه تابع پیدا کړئ.

حل: $f^{-1}(x) = \frac{x-0.4}{0.2}$ یا $f^{-1}(x) = 5x - 2$

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

وښایاست چې ایا د $F(x) = \frac{5}{2x-4}$ او $g(x) = \frac{4x+5}{2x}$ یو د بلې معکوسې تابعګانې دي؟

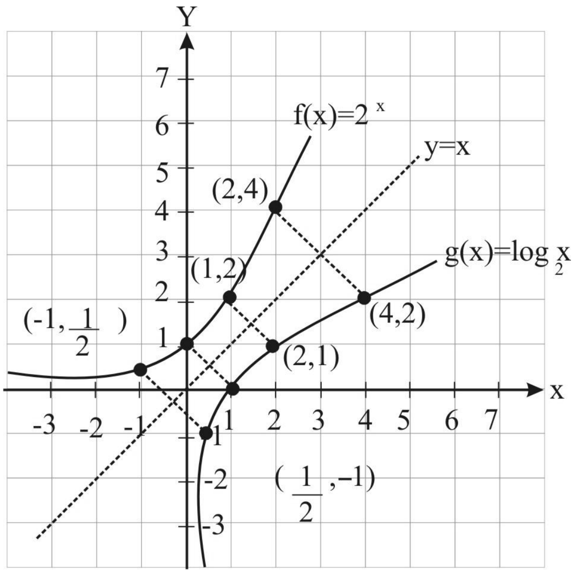
د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- لاندې جملې معادلې دي:

- د F د تابع معکوس هم یوه تابع ده.
- F یوه یو په یو تابع ده.
- افقي خط د F د تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کوي.
- $\forall x \in dom\, F(x)$ $\quad \forall x \in dom\, F^{-1}$: $F(F^{-1}(x)) = F^{-1}(f(x)) = x$
- د F او $F^{-1}(x)$ د تابعګانو ګرافونه نظر د $y = x$ له مستقیم خط ته سره متناظر دي.

2- که $F(x) = 2^x$ او $g(x) = \log_2 x$ وي چې یوه د بلې معکوسې تابعګانې دي

حل:



x	0	1	-1	-2	2
f(x)	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	4

x	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	4
g(x)	0	1	-1	-2	2

چې ګرافونه یې د y=x خط ته سره متناظر دي.

$(g^{-1} o F^{-1}) = (fog)^{-1}$

3- د یوې تابع ترکیب د هغې له معکوسې تابع سره:

$$f(x)=mx+b\Rightarrow y=mx+b$$
$$x=my+b\Rightarrow y=\frac{x-b}{m}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{m}x-\frac{b}{m}$$
$$(f^{-1}of)(x)=f^{-1}(mx+b)=\frac{1}{m}(mx+b)-\frac{b}{m}\Rightarrow x+\frac{b}{m}-\frac{b}{m}=x$$
$$(fof^{-1})(x)=f(\frac{1}{m}x-\frac{b}{m})=m(\frac{1}{m}x-\frac{b}{m})+b\Rightarrow x-b+b=x$$

4– د $f(x)=1-x^2$ او $f(x)=x^4$ تابعګانو معکوس، تابعګانې نه دي لیکن د

$f(x)=2x^3$, $h(x)=-\frac{1}{3}x+5$, $g(x)=\frac{7-2x}{5}$, $h(x)=\frac{3}{x}$ او $f(x)=x^5$ معکوس هم تابعګانې دي.

د پوښتنو ځوابونه

1- د لاندینیو تابعګانو معکوس پیدا کړې او ووایاست چې د کومې تابع معکوس یوه تابع ده؟

$$f=\{(-1,0),(-2,1),(4,3),(3,4)\}$$

حل:

$$f^{-1}=\{(0,-1),(1,-2,(3,4),(4,3)\}$$

پس f^{-1} تابع ده.

$$g=\{(1,2),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$

حل:

$$g^{-1}=\{(2,1),(3,2),(2,3),(1,4)\}$$

لیدل کیږي چې g^{-1} تابع نه ده ځکه د 2 د عدد لپاره د وه تصویرونه موجود دي.

$$h=\{(1,4),(2,3),(4,1)\}$$
$$h^{-1}=\{(4,1),(3,2),(1,4)\}$$

نو h^{-i} هم یوه تابع ده.

$$k=\{(3,0),(2,-1),(1,2),(0,1),(-1,2)\}$$

حل:

$$k^{-1}=\{(0,3),(-1,2),(2,1),(1,0),(2,-1)\}$$

لیدل کیږي چې k^{-1} تابع نه ده، ځکه چې د 2 عدد د دوو عددونو 1 او 1- سره اړیکه لري.

2- د لاندې هرې تابع معکوسه تابع پیدا کړئ او خپل ځواب د $f(f^{-1}(x))=x$ سره پرتله کړئ.

$$f(x)=x+3$$

حل:که $y=x+3$ وي معکوس یې

$y = f(x) = x + 3$

$y = x + 3 \Rightarrow x = y - 3 \Rightarrow y = x - 3$

$f^{-1}(x) = x - 3$

$f(f^{-1}(x)) = f(x-3) = x - 3 + 3 = x$

• $f(x) = 2x$

$y = 2x \Rightarrow x = 2y \Rightarrow y = \frac{x}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$

$f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x}{2}) = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$

• $f(x) = 2x + 3$

$y = 2x + 3 \Rightarrow x = 2y + 3 \Rightarrow y = \frac{x-3}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

$f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x-3}{2}) = 2(\frac{x-3}{2}) + 3 = x$

• $f(x) = x^3 + 2$

$y = x^3 + 2 \Rightarrow x = y^3 + 2 \Rightarrow y^3 = x - 2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{x-2}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$

$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x-2}) = (\sqrt[3]{x-2})^3 + 2 = x - 2 + 2 = x$

• $f(x) = (x+2)^3$

$y = (x+2)^3 \Rightarrow x = (y+2)^3 \Rightarrow y + 2 = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x} - 2$

$y = \sqrt[3]{x-2}$ $\qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 2$

$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x-2}) = (\sqrt[3]{x} - 2 + 2)^3 = x$

• $f(x) = \frac{1}{x}$

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$

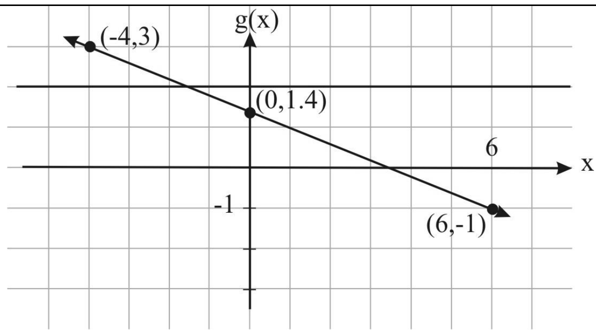
$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

$f(f^{-1}(x)) = f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

3-د لاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ ا و د x له محور سره د موازي خط (افقي خط) په واسطه وښایاست چې معکوس یې تابع ده او که نه؟

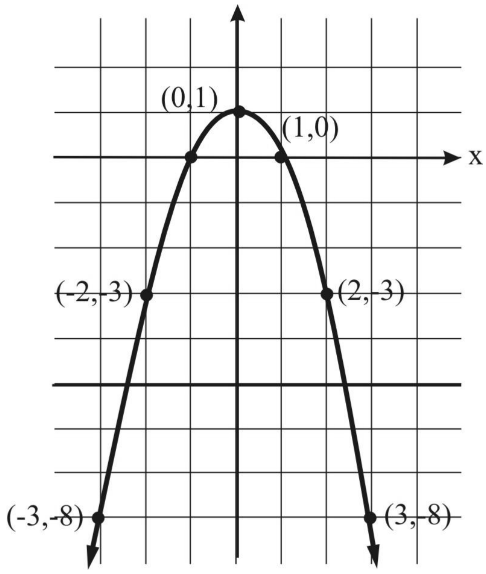
$g(x) = \frac{7-2x}{5}$ $\qquad f(x) = 1 - x^2$

حل:



$f(x) = 1 - x^2$

څرنگه چې افقي خط د تابع گراف په يوه نقطه کې قطع کړی دی، نو معکوس يې هم تابع ده.



څرنگه چې افقي خط د تابع گراف په دوو نقطو کې قطع کړی دی، نو معکوس يې تابع نه ده.

4- له لاندنيو تابعگانو څخه کومه يوه يو په يو تابع ده؟

$a)\quad y = 4x - 5 \qquad b)\quad y = 6 - x \qquad c)\quad y = (x-2)^2$

$d)\quad y = 9 \qquad e)\quad y = \dfrac{1}{x+2}$

حل: د a او b، تابعگاني يو په يو تابعگاني دي ځکه چې:

$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b) \qquad a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$

c: $y = (x-2)^2$ يو په يوتابع نه ده ځکه چې:

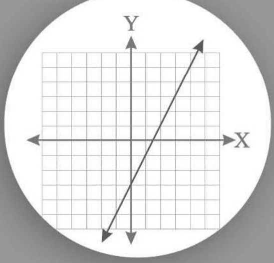
$4 \neq 0 \qquad \begin{matrix} f(4) = 4 \\ f(0) = 4 \end{matrix} \Rightarrow f(4) = f(0)$

d: $y = 9$ يو په يو تابع نه ده.

$-2 \neq 3 \qquad \begin{matrix} f(-2) = 9 \\ f(3) = 9 \end{matrix}$

e: يو په يو تابع ده ځکه چې:

که $f(a) \neq f(b) \Leftarrow a \neq b \Rightarrow \dfrac{1}{a+2} \neq \dfrac{1}{b+2} \Rightarrow a+2 \neq b+2 \Rightarrow f(a) \neq f(b)$



پولینومي تابعګاني

د درسي کتاب (119)**مخ** **د لوست وخت** (3 **درسي ساعتونه**)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د لومړۍ او دويمه درجه تابعګانو د ګراف د رسمولو طريقه زده کړي. • د x او y له محورونو سره د لومړۍ او دويمې درجې تابعګانو د تقاطع د ټکو د وضعيه کمياتو د پيدا کولو طريقه زده کړي. • د دويمې درجې تابع د ګراف اعظمي او اصغري نقطو وضعيه کميات پيدا کړای شي. • د دويمې درجې تابع د ګراف د تناظر د محور معادله پيدا کړای شي. • د دويمې درجې تابعګانو په ګرافونو کې عمودي، افقي او د انتقالونو ترکيب تطبيق کړای شي. • د رياضي د مسايلو په حل کې د دويمو درجو تابعګانو د ګرافونو اهميت درک کړي.
د تدريس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يو کسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او ...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشير، چارت او... .
د ورودي برخې توضيح (5 دقيقې	په داسې حال کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، د ورودي پوښتنه دې له زده کوونکو وپوښتل شي او ورته واضح شي چې: څرنګه چې د لومړۍ درجې تابع ګراف يو مستقيم خط دی، نو له همدې سببه ورته خطي تابع هم وايي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**

محترم ښوونکي دې د زده کوونکو په ونډه اخيستنه سره لومړی او دويم مثال حل کړي او ګرافونه يې پر تخته رسم کړي، د x او y له محورونو سره د لومړۍ درجې تابع ګراف د تقاطع نقطو د وضعيه کمياتو د پيدا کولو طريقه توضيح کړي. د دويمې درجې تابع عمومي شکل (معياري شکل) وليکئ.
او د ساده دويمو درجو تابعګانو $F(x)=x^2$ او $F(x)=-x^2$ ګرافونه پر تخته رسم کړئ، تر څو زده کوونکي په دې پوه شي چې د دويمې تابع د ګراف خو له څه وخت پورته ا و څه وخت ښکته خواته خلاصيږي. محترم ښوونکي دې لومړی مثال حل کړي او ګراف يې پر چارت او يا پر تخته رسم کړئ او په شکل کې وښاياست چې ګراف په کوم انټروال کې متزايد ا و په کوم انټروال کې متناقص دی. په همدې ډول د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره دې دويم، دريم، څلورم او پنځم مثالونه حل شي او د x ا و y له محورونو سره د پارابول د تقاطع نقطو د وضعيه کمياتو د پيدا کولو طريقه توضيح شي. ددې لپاره چې د راس نقطې د وضيعه کمياتو د پيدا کولو طريقه د تکميل مربع ا و فورمول په واسطه او د تناظر د محور د معادلې د پيدا کولو طريقه واضح شي، د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره شپږم او اووم مثال دې حل شي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

د $y = 6x^2 - x - 12$ او $y = x^2 + 3x - 2$ د ګرافونو د راس نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

د $F(x) = 3 + 5x + \frac{1}{3}x^2$ او $F(x) = 3x^2 + 5x$ تابعګانو دګرافو د تناظر د محور معادلې پیدا کړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د دویمې درجې تابع درې شکلونه (Three forms of quadratic funtions)

که t, k, h, c, b, a او s حقیقي عددونه او $a \neq 0$ وي.

1- Transformation form شکل له $F(x) = a(x-h)^2 + k$ څخه عبارت دی.

2- Polynomial form شکل له $F(x) = ax^2 + bx + c$ څخه عبارت دی.

3- X-Intercept form شکل له $F(x) = a(x-s)(x-t)$ څخه عبارت دی.

که $a > 0$ وي د پارابولا خوله پورته خواته او که $a < 0$ وي، د پاراپولا خوله ښکته خواته خلاصیږي.

1- د Transformation شکل: په عمومي ډول د راس (vertex) د وضعیه کمیاتو د پیداکولو لپاره په کار وړل کیږي. په $F(x) = a(x-h)^2 + k$ کې د راس وضعیه کمیات (h,k) دي او دګراف د تقاطع ټکې وضعیه کمیات د y، له محور سره $F(0) = a(0-h)^2 + k = ah^2 + k$ چې $(0,k)$ دي، د x له محور سره د تقاطع په ټکې کې $y = 0$ کیږي.

$a(x-h)^2 + k = 0 \;\; \Rightarrow \; a(x-h)^2 = -k$

$(x-h)^2 = -\frac{k}{a} \;\; \Rightarrow \; x - h = \pm\sqrt{\frac{-k}{a}}$

$x = h \pm \sqrt{\frac{-k}{a}}$

د x له محور سره د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات $(\mathrm{h} - \sqrt{\frac{-\mathrm{k}}{\mathrm{a}}}, 0)$ او $(h + \sqrt{\frac{-k}{a}}, 0)$ دي.

مثال: $\mathrm{F(x)} = 2(\mathrm{x}-3)^2 + (-4)$ $\quad \mathrm{k} = -4 \quad , \quad \mathrm{h} = 3$ او $\mathrm{a} = 2$ دی.

د پارابول د راس د ټکي وضعیه کمیات $(h,k) = (3,-4)$ دي.

د y له محور سره د تقاطع د ټکي وضعیه کمیات له $\mathrm{ah}^2 + \mathrm{k} = 2(3^2) - 4) = 14$ څخه عبارت دی چې ګراف د (0.14) په نقطه کې د y محور قطع کوي.

د x له محور سره تقاطع عبارت ده له: $\mathrm{h} - \sqrt{\frac{-\mathrm{k}}{\mathrm{a}}} = 3 - \sqrt{2} \approx 1.6 \qquad \mathrm{h} + \sqrt{\frac{-\mathrm{k}}{\mathrm{a}}} = 3 + \sqrt{2} \approx 4.4$

2- پولینومي شکل په عمومي ډول د y او x له محورونو سره دګراف د تقاطع د ټکو د وضعیه کمیاتو د پیداکولو لپاره په کاروړل کیږي.

د y له محور سره تقاطع: $F(0) = a(0)^2 + b(0) + c = c$

د X له محور سره تقاطع: $\mathrm{x} = \frac{-\mathrm{b} - \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$ او $\mathrm{x} = \frac{-\mathrm{b} + \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$ په هغه صورت کې چې $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} \geq 0$

وي.

د راس د پيدا كولو لپاره:

$$\frac{-b}{2a}=h$$

چې h د راس نقطې د x مختصه ده، په نتيجه کې د راس د ټکی وضعيه کميات عبارت دي له:

$$\left(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a})\right)$$

$$F(x)=a(x-h)^2+k$$

$$F(x)=ax^2-2ahx+ah^2+k \quad \Rightarrow \quad b=-2ah$$

$h=-\frac{b}{2a}$ راس $(\frac{b}{2a}),F(-\frac{b}{2a})$

3- د X-intercept: شكل $f(x)=a(x-s)(x-t)$ چې s او t د $F(x)=0$ د معادلې حلونه دي.

$$F(s)=a(s-s)(s-t)=a(0)(s-t)=0$$

$$F(t)=a(t-s)(t-t)=a(t-s)(0)=0$$

د y له محور سره تقاطع $f(0)$ څخه عبارت ده: $F(0)=a(0-s)(0-t)=ast$

نو د y له محور سره تقاطع له (ast) څخه عبارت ده، څرنگه چې پارابول د y له محور سره متناظر دی، نو د راس د نقطې x عبأرت له $(\frac{s+t}{2})$ څخه دي او د راس د نقطې د y قيمت د $f(\frac{s+t}{2})$ دی.

مثال:كه $f(x)=-\frac{1}{2}(x-4)(x+2)$ وي، د راس د نقطې وضعيه كميات، د x او y له محورونو سره د تقاطع د نقطو وضعيه كميات پيدا كړي او گراف يې رسم كړئ.

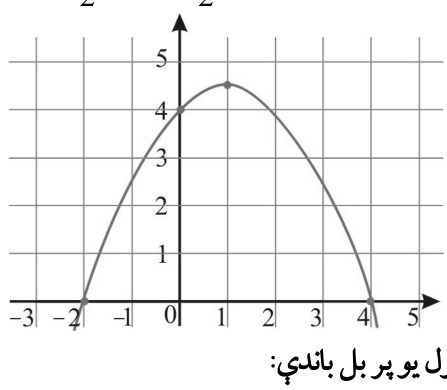
حل:

$$a=-\frac{1}{2} \quad , \quad t=-2 \quad , \quad s=4$$

د y له محور سره تقاطع عبارت ده له:

$$ast=-\frac{1}{2}(4)(-2)=4$$

د راس د نقطې وضعيه كميات يې عبارت دي له: $f(\frac{s+t}{2})=f[(\frac{4-2}{2}),\ f(\frac{-2}{2})]=(1,4.5)$



د دويمې درجې د تابعگانو د شكلونو بدلول يو پر بل باندې:

مثال: د امكان په صورت كې لاندې دويمه درجه تابعگانې پولينومي او X-intercept شكل ته تبديلي كړئ.

a) $f(x)=0.4(x-3)^2+2$ b) $g(x)=3x^2-3.9x-43.2$

c) $h(x)=-2(x-4)(x+2)$

حل a: غواړو چې پولینومي شکل ته یې واړوو:

$$f(x)=0.4(x-3)^2+2=0.4x^2-2.4x+5.6$$

په نتیجه کې $b^2-4ac=-3.2$ کیږي

څرنگه چې د x محور نه قطع کوي، نو د X-intercept په شکل یې نه شو لیکلای.

b: څرنگه چې دا دویمه درجه تابع په پولینومي شکل راکړل شوي ده، غواړو چې د X-intercept په شکل یې ولیکو څرنگه چې a=3 دی نو:

$$g(x)=3x^2-3.9x-43.2$$

$$g(x)=3(x^2-1.3x-14\cdot4)$$

$$\frac{1.3\pm\sqrt{(-1.3)^2-4(1)(-14.4)}}{2}=\frac{1.3\pm7\cdot7}{2}=4.5 \text{ او } -3.2$$

نو د X-intercept شکل یې عبارت دی له $g(x)=3(x-4.5)(x+3.2)$

c: د $h(x)$ تابع د X-intercept په شکل راکړل شوي ده. غواړو چې پولینومي شکل ته یې واړوو:

$$h(x)=-2(x-4)(x+2)$$

$$h(x)=-2(x^2-2x-8)=-2x^2+4x+16$$

مثال: لاندې تابعگانې د Transformation شکل ته واړوئ.

a) $f(x)=-3x^2+4x-1$ b) $g(x)=0.3(x-2)(x+1)$

$$f(x)=-3x^2+4x-1=-3(x^2-\frac{4}{3}x)-1=-3(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9})-1$$

$$=-3[(x-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{9}]-1=-3(x-\frac{2}{3})^2+\frac{4}{3}-1 \quad , \quad f(x)=-3(x-\frac{2}{3})^2+\frac{1}{3}$$

:b

$$g(x)=0.3(x-2)(x+1)=0.3(x^2-x-2)=0.3(x^2-x+0.25-0.25-2)=0.3[(x-0.5)^2-2.25]$$

$$g(x)=0.3(x-0.5)^2-0.675$$

د دویمې درجې تابعگانو د شکلونو لنډیز:

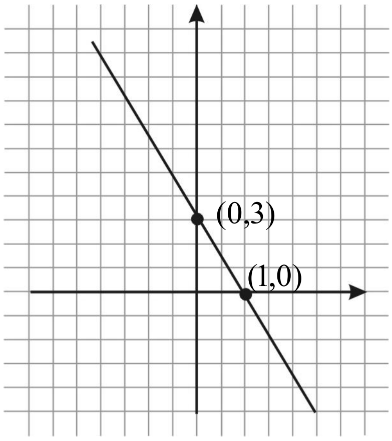
د شکل نوم	Transformation	Polynomail	x-intercept
راس	$f(x)=a(x-h)^2+k$ (h,k)	$f(x)=a^2+bx+c$ $[\frac{-b}{2a},f(-\frac{b}{2a})]$	$f(x)=a(x-s)(x-t)$ $[\frac{s+t}{2},f(\frac{s+t}{2})]$
د x له محور سره تقاطع	$h+\sqrt{\frac{-k}{a}}$ او $h-\sqrt{\frac{-k}{a}}$	$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	S و t
د y له محور سره تقاطع	ah^2+k	c	ast

د پوښتنو ځوابونه

1 – د $h(x)=-\frac{3}{2}x+3$ د تابع ګراف رسم کړئ.

حل: ددې تابع ګراف د رسمولو لپاره همدومره کافي ده چې د مستقيم خط دوې نقطې پيدا کړو او سره وصل شي.

x	0	1
$h(x)$	3	0

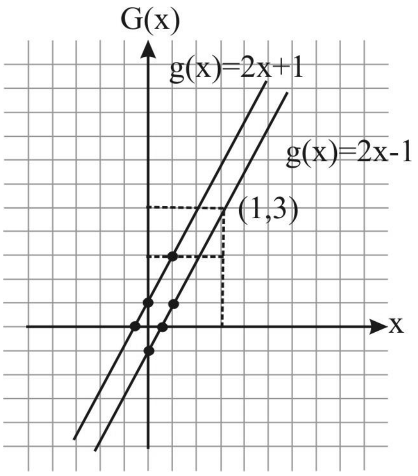


2 – د $g(x)=2x+1$ او $g(x)=2x-1$ تابعګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او سره پرتله يې کړئ.

حل:

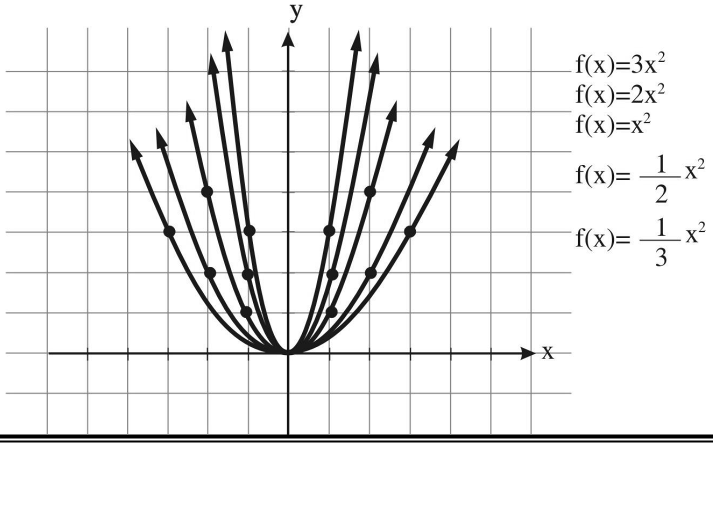
x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g(x$	-1	0	1

x	0	$-\frac{1}{2}$	1
$y(x)$	1	0	3



3-د $f(x)=x^2$, $f(x)=2x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ تابعګـانو ګرافونـه د وضـعيه کميـات پـه عين سيستم کې رسم او يو له بله سره يې پرتله کړئ.

حل:



x	0	1	2	3	−2	−3
$f(x)=\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	2	4.5	2	4.5

x	0	3	−3
$f(x)=\frac{1}{3}x^2$	0	3	3

x	0	1	−1	1.5
$f(x)=2x^2$	0	2	2	4.5

x	0	1	−1	1.5
$f(x)=3x^2$	0	3	3	6.75

4 – د لاندې تابعگانو د تناظر محور معادلې پیدا کړئ.

a: $f(x)=x^2+8x+13$ b: $f(x)=x^2-12x+30$ c: $f(x)=3x^2-2x+6$

د a حل : $x=-4$ $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{8}{2}=-4$

b: $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{(-12)}{2}=6\Rightarrow x=6$ c: $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2\cdot 3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{3}$

5 – د $f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x-3)^2$ د تابعگانو گرافونه رسم کړئ او ووایاست چې د $f(x)=x^2$ د تابع له گراف سره څه اړیکه لري؟

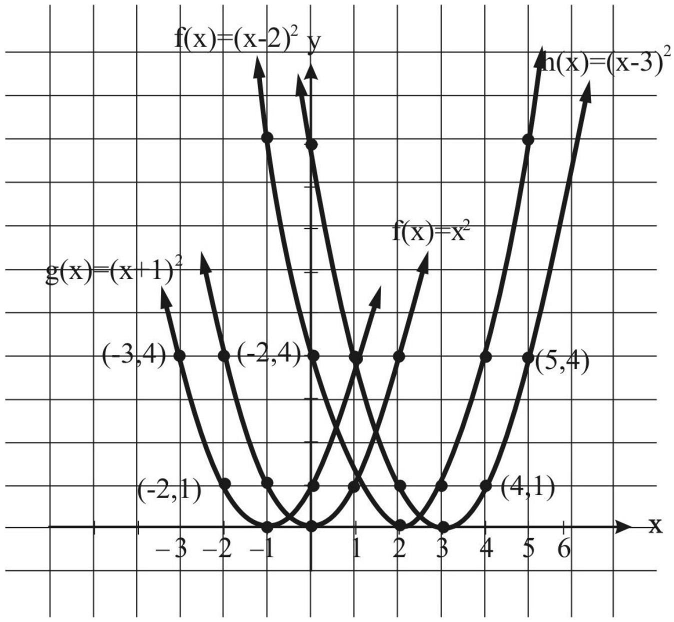
حل:

x	x^2
0	0
1	1
−1	1
2	4
−2	4

x	$(x-2)^2$
5	9
4	4
3	1
2	0
−1	9

x	$(x-3)^2$
5	4
4	1
3	0
2	1
1	4
0	9

x	$(x+1)^2$
1	4
0	1
−1	0
−2	1
−3	4



د $f(x)=x^2$ د تابع گراف د2 واحدونو په ا ندازه ښې خواته انتقال کړي دي، د $f(x)=(x-2)^2$ د تابع گراف لاس ته راغلی دی او د $f(x)=x^2$ د تابع گراف د یو واحد په اندازه یې کیڼې خواته انتقال کړي دي، د g(x) د تابع گراف او د

$f(x)=x^2$ د تابع ګراف د 3 واحدونو په اندازه ښې خواته انتقال کړې دی د h(x) د تابع ګراف لاس ته راغلی دي.

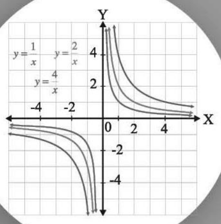
6 – د $y=-x^2-1$ د تابع دګراف د راس د نقطې وضعيه کميات عبارت دي له:

a: $(-1,1)$ b: $(1,-1)$ ⓒ $(0,-1)$ d: $(0,1)$

7 – د $y=(x-1)^2-2$ تابع د راس نقطې وضعيه کميات عبارت دي له:

a: $(1,-1)$ b: $(-1,2)$ c: $(-1,-2)$ ⓓ: $(1,-2)$

څرنګه چې د $x=1$ لپاره y = −2 کيږي، نو د پارابول د راس د ټکې وضعيه کميات (1,−2) دي، نو d سم دی.



ناطقې يا نسبتي تابعګانې

ددرسي کتاب (129) **مخ** **د لوست وخت** (3 **درسي ساعتونه**)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي ددې لوست په پای کې بايد: • د ناطقو تابعګانو د عمودي مجانب، افقي مجانب او د مايل مجانب تعريفونه زده کړي. • د ناطقو تابعګانو د تعريف ناحيې پيدا کړای شي. • د ناطقو تابعګانو مجانبونه پيدا کړای شي. • د ناطقو تابعګانو ګرافونه رسم کړای شي. • د ناطقو تابعګانو د ګرافونو په رسمولو کې له مجانبو څخه استفاده وکړای شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې د ناطقو تابعګانو له ګرافونو څخه ګټه واخيستلای شي. • د رياضي د مسايلو په حل کې د ناطقو تابعګانو د ګرافونو اهميت درک کړای شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يو کسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او ...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، تباشير، چارت او... .
د ورودي برخې توضيح(5 دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د چارت له مخې او يا د تختې پر مخ د ناطقو تابعګانو ګرافونه وروښودل شي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**

ددې لوست فعاليت د انګيزې د پيداکولو لپاره دی، محترم ښوونکي کولای شي د پوښتنو په برخه کې زده کوونکو ته لارښوونه او ورسره مرسته وکړي. د ناطقې تابع له تعريف او ناطقو تابعګانو دتعريف د ناحيې له پيداکولو وروسته لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ او بيا دې د (130) فعاليت زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي.

ښوونکي دې دويم مثال حل کړي ا و زده کوونکي دې د (131) مخ فعاليت سرته ورسوي، بيا دې ښوونکي په دريم مثال کې د ناطقې تابع دګراف د رسمولو او د عمودي مجانب د پيداکولو طريقه توضيح کړي ا و د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره دې څلورم مثال حل کړي. د افقي مجانب د تعريفولو او له محورونو سره د تابع دګراف د تقاطع ټکو د وضعيه کمياتو د پيداکولو له طريقې وروسته دې پنځم او شپږم مثالونه حل کړي.

يو زده کوونکي دې د تختې پر مخ د (135) مخ د فعاليت اړونده ګراف رسم کړي، محترم ښوونکي دې د مايل مجانب له تعريفولو وروسته د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره اووم او اتم مثالونه حل کړي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**

د $F(x)=\dfrac{3x-6}{5-2x}$ د ناطقې تابع افقي او عمودي مجانبونه پيدا کړئ.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

د $g(x)=\frac{x}{x^2-4}$ او $h(x)=\frac{2x^3-x}{x^3+1}$ ناطقو تابعګانو عمودي او افقي مجانبونه پیدا کړئ.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د ناطقو تابعګانو د تعریف ناحیه: که $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ وي چې $Q(x)\neq 0$ دی، له R څخه هر x چې $Q(x)\neq 0$ وي د $f(x)$ د تابع د تعریف ناحیه ده، که د تعریف ناحیه په D_f سره وښایو.

$D_f=\{x / x\in R : Q(x)\neq 0\}$

د موضوع د وضاحت لپاره لاندې مثالونو ته پاملرنه وکړئ.

مثال: د $g(x)=\frac{x}{x-1}$ او $h(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4+x^2+1}$ تابعګانو د تعریف ناحیې وټاکئ.

$x-1=0\Rightarrow x=1 \qquad D_g=R-\{1\}$

$x=0\Rightarrow D_h=R-\{0\}$

مثال: د $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+6}$ د تابع د تعریف ناحیه وټاکئ.

$x^2+x+6=0\Rightarrow (x+3)(x-2)=0\Rightarrow x=-3$ یا $x=2$

$D_f=R-\{-3,2\}$

- د $g(x)=\frac{x+2}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$ د تابع د تعریف ناحیه وټاکئ.

$x(x+1)(x+2)(x+3)=0\Rightarrow x=0$ یا $x=-1$ یا $x=-2$ یا $x=-3$

$D_g=R-\{0,-1,-2,-3\}$

باید پام مو وي، د تعریف د ناحیې له ټاکلو له مخه نه شو کولای چې $(x+2)$ له صورت او مخرج څخه اختصار کړو خو د تعریف ناحیې له ټاکلو وروسته البته دا کار کولای شو.

- د $h(x)=\frac{x}{x^3-x}$ د تابع د تعریف ناحیه وټاکئ.

$x^3-x=0\Rightarrow x(x^2-1)=0\Rightarrow x=0$ یا $x=-1$ یا $x=1$

$D_h=R-\{0,-1,1\}$

2- د ناطقو یا کسري تابعګانو د تعریف او قیمتونو د ناحیو پیدا کول:

څرنګه چې په $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ چې $P(x)$ او $Q(x)$ پولینومونه دي، $Q(x)\neq 0$ او $Q(x)$ ثابت عدد نه دي، د تعریف د ناحیې د ټاکلو لپاره د مخرج جذرونه (ریښې) پیدا کوو، له حقیقي عددونو څخه یې کموو او د قیمتونو د ناحیو ټاکل ځینې وختونه چې د حدونو درجې یې لوړې وي، امکان نه لري، لیکن د ځینو تابعګانو کولای شو چې په مختلفو طریقو سره یې په لاس راوړو.

مثال: د $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ د تعریف او قیمتونو ناحیې وټاکئ.

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$D_f = R-\{-1\}$

$y=\dfrac{2x}{x+1} \Rightarrow xy+y=2x \Rightarrow xy-2x=-y$

$x(y-2)=-y \Rightarrow x=\dfrac{y}{2-y}$

$R_f = R-\{2\}$

مثال: د $y=\dfrac{1}{x^2-2x}$ د تعریف او قیمتونو ناحیې په لاس راوړئ.

حل:

$x^2-2x=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=2$

$D=R-\{0,2\}$

$yx^2-2xy=1 \Rightarrow yx^2-2xy-1=0$

$x=\dfrac{y\pm\sqrt{y^2+y}}{y} \qquad y^2+y\geq 0 \Rightarrow y(y+1)\geq 0$

$\Rightarrow y\leq -1$ یا $y\geq 0$

د قیمتونو په ناحیه کې صفر شامل نه دی، ځکه که چیرې د $y=\dfrac{1}{x^2+2x}$ تابع کې د y پر ځای صفر کیږدو، د x له پاره کوم ځواب پر لاس نه راځي.

$R=(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

مثال: د $y=\dfrac{x-1}{2x+3}$ د حقیقي تابع د تعریف او قیمتونو ناحیې وټاکئ.

$2x+3=0 \Rightarrow x=-\dfrac{3}{2} \qquad D=R-\{-\dfrac{3}{2}\}$

$y=\dfrac{x-1}{2x+3} \Rightarrow 2xy+3y=x-1 \Rightarrow (2y-1)x=-3y-1$

$x=\dfrac{-3y-1}{2y-1} \qquad 2y-1\neq 0 \Rightarrow y\neq \dfrac{1}{2}$

$\text{Range}=R-\{\dfrac{1}{2}\}$

ځکه چې x یو حقیقي عدد دی.

مثال: د $f(x)=\dfrac{x^{50}-x}{x-x^{50}}$ د تابع د تعریف او قیمتونو ناحیې وټاکئ.

$x-x^{50}=0 \Rightarrow x(1-x^{49})=0 \Rightarrow x=0$ یا $x=1$

$D_f=R-\{0,1\}$

$y=\dfrac{x^{50}-x}{x-x^{50}}=\dfrac{x^{50}-x}{-(x^{50}-x)}=-1$

$R_f=\{-1\}$

چې دا یوه ثابته تابع ده.

3- د ناطقو تابعګانو دګراف رسمول (Graphing Rational Functions):

1- د تابع مخرج مساوي په صفر کړئ او که د x=a لپاره د تابع مخرج صفر شي، نو x=a د تابع عمودي مجانب دی.

2- نور مجانبونه ولټوئ چې لاندې درې حالتونه امکان لري.

a –که د صورت درجه د مخرج له درجې څخه کمه وي، په دې حالت کې y=0 د تابع افقي مجانب دی.

b- که صورت درجه له مخرج سره مساوي وي یا د تابع شکل په لاندې ډول وي

$$f(x)=\frac{a_nx^n+\dots a_0}{b_nx^n+\dots+b_0}$$

نو $y=\frac{a_n}{b_n}$ یو افقي مجانب دی.

c- که د صورت درجه د یو په ا ندازه د مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو ښکاره خبره ده چې افقي مجانب نه لري، خو مایل مجانب لري چې که صورت پر مخرج وویشو، مایل مجانب پر لاس راځي.

3- له محورونو سره یې د تقاطع ټکي پیدا کړئ.

4- یو څو نورې نقطې هم پیدا کړئ.

5- ګراف یې رسم کړئ.

د پوښتنو ځوابونه

1 – د $f(x)=\frac{3x^2}{x^2-4}$ د تابع عمودي او افقي مجانبونه پیدا کړئ.

حل: $x=2$, $x=-2$ عمودي مجانبونه دي

$$x^2-4=0\Rightarrow x=2\ ,\ \ x=-2$$

ځکه چې د $x=-2$ او $x=2$ په قیمتونو د تابع مخرج صفر کیږي.

افقي مجانب: څرنګه چې د صورت او مخرج درجې سره مساوي دي، نو د صورت او مجرج د لوړو درجو د ضریبونو نسبت یې افقي مجانب دی، یعنې $y=\frac{3}{1}\Rightarrow y=3$

2 – ایا د $f(x)=\frac{x^4}{x^2+1}$ تابع عمودي مجانب لري، ولې؟

حل: څرنګه چې د x په هیڅ قیمت د تابع مخرج نه صفر کیږي، نو تابع عمودي مجانب نه لري.

3 – د لاندنیو تابعګانو د تعریف ناحیې پیدا کړئ او د عمودي مجانبونو معادلې یې هم ولیکئ.

$$a: f(x)=\frac{5x}{x-4}\qquad b: g(x)=\frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}\qquad c: h(x)=\frac{x+7}{x^2-49}\qquad d: k(x)=\frac{x+7}{x^2+49}$$

د a حل: $dom\, f(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 4\}$ او د عمودي مجانب معادله یې د $x=4$ مستقیم خط دی.

د b حل: $dom\, g=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 5,\ x\neq -4\}$ او د عمودي مجانبونو معادلې یې. $x=5$ او $x=-4$ دي دوه عمودي مجانبونه لري.

د c حل:

$x^2-49=0 \qquad x=\pm 7$

$dom\,h=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq -7\ ,\ x\neq 7\}$

د تابع د عمودي مجانبونو معادلې $x=7$ او $x=-7$ دي.

د d حل: څرنګه چې په حقيقي عددونو کې د x په هر قيمت د تابع مخرج نه صفر کيږي، نو تابع عمودي مجانب نه لري $.dom\,k=IR$

4 – د لاندينيو تابعګانو عمودي مجانبونه که يې ولري پيدا کړي.

$a:\ f(x)=\dfrac{x}{x+4} \qquad b:\ g(x)=\dfrac{x+3}{x(x+4)} \qquad c:\ h(x)=\dfrac{x}{x(x+4)} \qquad d:\ k(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$

د a حل: د $x=-4$ مستقيم خط د $f(x)$ تابع عمودي مجانب دی.

دb حل: د $x=0$ او $x=-4$ مستقيم خطونه د $g(x)$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

د c حل: د $x=0$ او $x=-4$ مستقيم خطونه د $h(x)$ د تابع عمودي مجانبونه دي.

د d حل: د $k(x)$ تابع عمودي مجانب نه لري، ځکه د x په هر قيمت د تابع مخرج نه صفر کيږي.

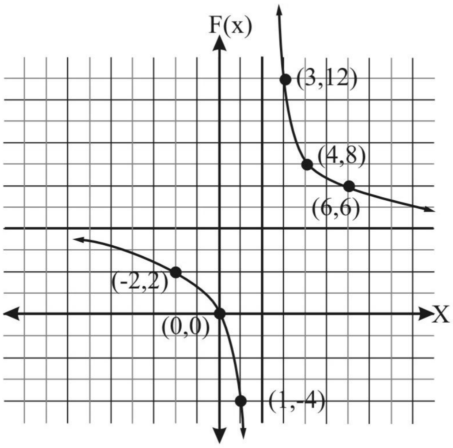
5 – د لاندې ناطقو تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

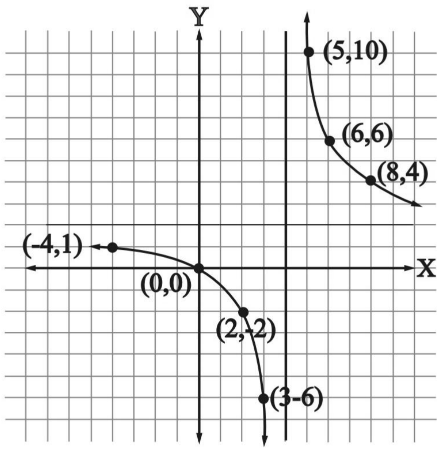
$a:\ y=\dfrac{4x}{x-2}$

x	0	−2	6	4	10	1	3
f(x)	0	2	6	8	5	−4	12

$b:\ g(x)=\dfrac{2x}{x-4}$

x	0	2	−4	2	12	8	6	5	3
g(x)	0	−2	1	−2	3	4	6	10	−6





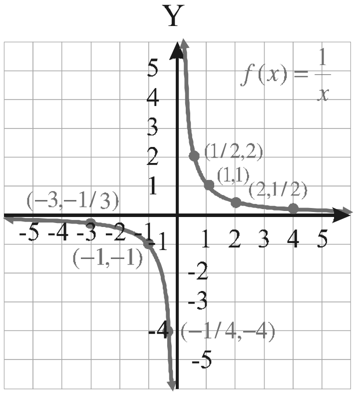
6- د $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$ د تابع افقي مجانب عبارت دی له:

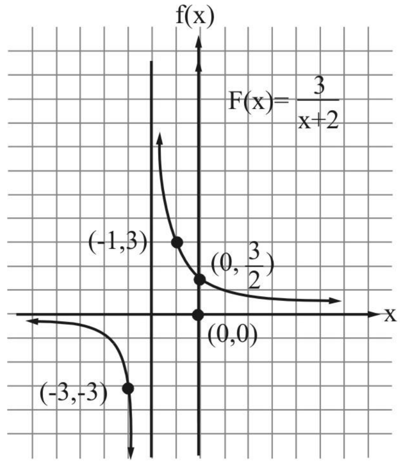
a: $y=2$ (b:) $y=3$

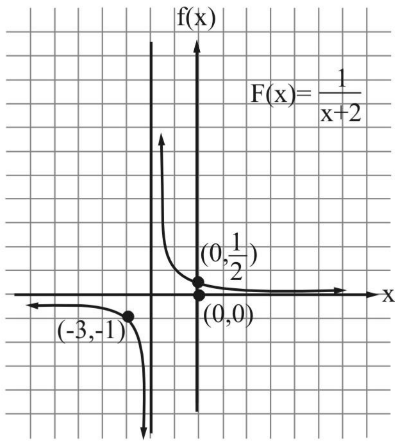
c: $y=-2$ d: $y=-3$

د $y=3$ مستقيم خط د تابع افقي مجانب دی، نو b سم دی.

7- د $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ او $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$ د تابعګانو ګرافونه رسم او د $f(x)=\dfrac{1}{x}$ د تابع له ګراف سره يې پرتله کړئ.







x	0	−1	−3	−4
$f(x)=\frac{1}{x+2}$	$\frac{1}{2}$	1	−1	$-\frac{1}{2}$

x	0	−1	−3
$f(x)=\frac{3}{x+2}$	$\frac{3}{2}$	3	−3

8- د $y=\frac{x^2}{x-1}$ د تابع مایل مجانب پیدا کړئ.

د $y=x$ مستقیم خط د تابع مایل مجانب دی.

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې مرتبو جوړو له سټونو څخه کومه یوه یې تابع ښیي ؟

د تعریف او قیمتونو ناحیې یې وټاکئ.

$a-\quad \{(1,2),(3,4),(5,5)\}$

$b-\quad \{(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)\}$

$c-\quad \{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0)\}$

$d-\quad \{(1,4),(1,5),(1,6)\}$

د a حل: یوه تابع ده، څکه چې د Domain هر عنصر د Range له یوه عنصر سره اړیکه لري.

$dom=\{1,3,5\}\ ,\ Range=\{2,4,5\}$

د b حل : یوه تابع نه ده، څکه د 3 او 4 عددونه دوه تصویرونه لري.

$dom=\{3,4\}\quad Range=\{4,5\}$

د c حل : یوه تابع ده.

$dom=\{-3,-2,-1,0\}\quad Range=\{-3,-2,-1,0\}$

د dحل : یوه تابع نه ده، څکه چې د 1 عدد د Range له دریو عنصرونو سره اړیکه لري:

$dom=\{1\},\ Range=\{4,5,6\}$

2- که $g(x)=x^2+2x+3$ وي، $g(-x), g(-1)$ او $g(x+5)$ پیدا کړئ.

حل:

$$g(-1)=(-1)^2+2(-1)+3=1-2+3=2$$
$$g(-x)=(-x)^2+2(-x)+3=x^2-2x+3$$
$$g(x+5)=(x+5)^2+2(x+5)+3=x^2+10x+25+2x+10+3=x^2+12x+38$$

3- که $h(x)=x^4+x^2+1$ وي، $h(-x),h(-1),h(2)$ او $h(3a)$ پیدا کړئ.

حل: دریمه پوښتنه د دویمې پوښتنې په شان حل کیږي، د x پر ځای یې قیمت وضع کوو.

4- د لاندینیو تابعګانو د تعریف ناحیې پیدا کړئ.

$a:\quad f(x)=2x \qquad dom\,f=IR$

$b:\quad f(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}} \qquad dom\,f=[3,+\infty)$

$c:\quad f(x)=\sqrt{16-x^2} \qquad 16-x^2\geq 0 \ \Rightarrow\ (4-x)(4+x)\geq 0$

$dom\,f=\{x/x\in IR\ ,\ -4\leq x\leq 4\}=[-4,4]$

$d:\ f(x)=\dfrac{2}{x^2-4} \quad dom\,f=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 2, x\neq -2\}$

یا د انتروال په شکل:

$(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$

یا:

$IR \setminus \{-2,2\}$

$e: \quad f(x)=\sqrt{\frac{3}{x^2+25}} \quad , \quad dom\, f = IR$

$f: \quad f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

$dom\, f = \{x / x^2-4x-5 \ge 0, \quad x \le -1,\ x \ge 5\} = (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

5- که $f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x<0 \\ 4x+7 & : \quad x \ge 0 \end{cases}$ وي، $f(0), f(3)$ او $f(-2)$ پیدا کړئ.

حل:

$f(0)=4\cdot 0+7=7$

$f(3)=4\cdot 3+7=19$

$f(-2)=-2+3=1$

6- که $g(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x \ge -3 \\ -(x+3) & : x<-3 \end{cases}$ وي، $g(-6), g(0)$ او $g(-3)$ پیدا کړئ.

حل:

$g(0)=0+3=3$

$g(-6)=-(-6+3)=6-3=3$

$g(-3)=-3+3=0$

7- که $h(x)=\begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & : \quad x \ne 3 \\ 6 & : \quad x=3 \end{cases}$ وي، $h(0), h(3)$ او $h(5)$ پیدا کړئ.

حل:

$h(3)=6$

$h(0)=\frac{-9}{-3}=3$

$h(5)=\frac{25-9}{5-3}=\frac{16}{2}=8$

8- له لاندې معادلو څخه کومه یوه یې یوه تابع تعریفوي؟

$a: \quad x+y=16 \qquad b: \quad x^2+y=16$

$c: \quad x^2+y^2=16 \qquad d: \quad x=y^2$

$e: \quad y=\sqrt{x+4} \qquad f: \quad x+y^3=8$

د a حل: د $x+y=16$ معادله یوه تابع تعریفوي، ځکه ې د x د هر قیمت لپاره په Range کې یو تصویر وجود لري.

د b حل: $x^2+y=16 \rightarrow y=16-x^2$ هم یوه تابع ده.

د c حل: $x^2+y^2=16$ یوه تابع نه تعریفوي، ځکه د Domain د هر قیمت لپاره په Range کې د y دوه قیمتونه شته او

دا د یوې دایرې معادله ده چې د y له محور سره موازي خط ګراف په دوو نقطو کې قطع کوي.

د d حل: $y^2=x$ یوه تابع نه ده.

د e حل: $y=\sqrt{x+4}$ یوه تابع تعریفوي، ځکه د Domain هر عنصر یا x د Range او یا y له یوه عنصر سره اړیکه لري.

د f حل: $x+y^3=8$ یوه تابع ده، ځکه د Domain هر عنصر د Range له یوه عنصر سره اړیکه لري.

9- په لاندینیو تابعگانو کې کومه یوه جفته، کومه یوه طاقه او کومه یوه نه جفته او نه طاقه ده؟

$a: \quad f(x) = x^4 - 2x^2 + 5 \qquad b: \quad f(x) = x^2 + 2x - 1 \qquad c: \quad f(x) = \frac{2}{x-6}$

د a حل: $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 5$ څرنگه چې $f(-x) = f(x)$ ده نو $f(x)$ جفته ده.

د b حل: $f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) - 1 = x^2 - 2x - 1$ ښکاره ده چې د $f(x)$ تابع نه جفته ده او نه طاقه.

د c حل: $f(-x) = \frac{2}{x-6} = -\frac{2}{-x+6}$ دا تابع هم نه جفته ده او نه طاقه.

10- د $f(x) = x^2 - 1$ او $f(x) = (x-1)^2$ دتابعگانو گرافونه رسم او د $f(x) = x^2$ د تابع له گراف سره یې پرتله کړئ.

$f(x) = x^2$

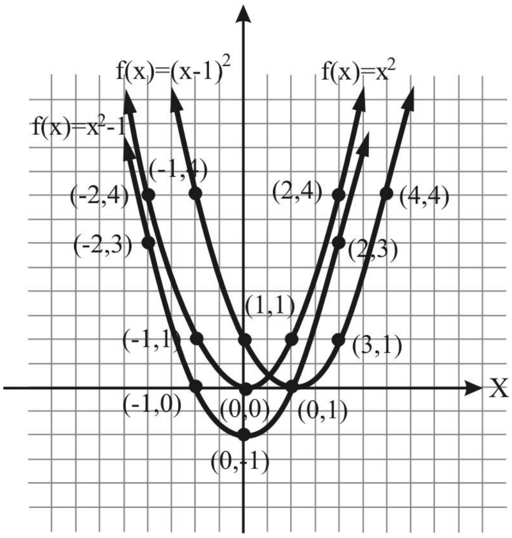
x	0	1	2	−2	−1
$f(x)$	1	1	4	4	1

$f(x) = (x-1)^2$

x	0	1	2	3	−1
$f(x)$	1	0	1	4	4

$f(x) = x^2 - 1$

x	0	1	2	−1	−2
$f(x)$	−1	0	3	0	3



لیدل کیږي چې که د $f(x) = x^2$ د تابع گراف د یوه واحدپه اندازه په عمودي ډول لاندې خواته انتقال وکړي د $f(x) = x^2 - 1$ د تابع گراف لاس ته راځي او که په افقي ډول د یوه واحد په اندازه ښې خواته انتقال وکړي د $f(x) = (x-1)^2$ د تابع گراف لاس ته راځي.

11- د لاندینیو تابعگانو $(f+g), (f-g), (f \cdot g)$ او $(\frac{f}{g})$ پیدا او د هرې یوې تابع د تعریف ناحیه هم وټاکئ.

$a: \quad f(x) = 4x - 1 \qquad g(x) = 6x + 3 \qquad b: \quad f(x) = \sqrt{2x+5} \qquad g(x) = \sqrt{4x-9}$

$c: \quad f(x) = 4x^2 - 11x + 2 \qquad g(x) = x^2 + 5$

د a حل:

$f + g = 4x - 1 + 6x + 3 = 10x + 2$

$dom(f+g) = dom\, f \cap dog = IR \cap = IR$

$f - g = (4x-1) - (6x+3) = -2x - 4$

$dom(f-g) = dom\, f \cap dog = IR \cap IR = IR$

$$f\cdot g=(4x-1)(6x+3)=24x^2+12x-6x-3=24x^2+6x-3$$
$$dom(f\cdot g)=dom f\cap dom=IR\cap IR=IR$$
$$\frac{f}{g}=\frac{4x-1}{6x+3}\qquad,\qquad dom(\frac{f}{g})=dom f\cap dom g\setminus\{x/g(x)\neq 0\}$$
$$6x+3=0\Rightarrow x=\frac{-1}{2}\qquad,\qquad dom\frac{f}{g}=IR\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}=(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2}+\infty)$$

د b حل:

$$f+g=\sqrt{2x+5}+\sqrt{4x-9}$$
$$dom f=\left\{x/2x+5\geq 0\ ,\quad x\geq -\frac{5}{2}\right\}=[-\frac{5}{2},\infty)$$
$$dom g=\left\{x/4x-9\geq 0\ ,\quad x\geq \frac{9}{4}\right\}=[\frac{9}{4},\infty)$$
$$dom(f+g)=\left[\frac{9}{4},\infty\right)$$
$$dom(f-g)=dom f\cap dom g=\left[\frac{9}{4},\infty\right)\qquad (f-g)(x)=\sqrt{2x+5}-\sqrt{4x-9}$$
$$dom(f\cdot g)=dom f\cap dom g=\left[\frac{9}{4},\infty\right)\qquad (f\cdot g)(x)=\sqrt{8x^2-18x+20x-45}=\sqrt{8x^2+2x-45}$$
$$dom(\frac{f}{g})=(\frac{9}{4},\infty)\qquad\qquad (\frac{f}{g})(x)=\sqrt{\frac{2x+5}{4x-9}}$$

د c حل:

$$f+g=(4x^2-11x+2)+(x^2+5)=5x^2-11x+7$$
$dom(f-g)=IR$ یا $(-\infty,\infty)$

$$f-g=(4x^2-11x+2)-(x^2-5)=3x^2-11x+7$$
$dom(f-g)=IR$ یا $(-\infty,\infty)$

$$(f\cdot g)=(4x^2-11x+2)(x^2+5)=4x^4-11x^3+22x^2-55x+10$$
$dom(f\cdot g)=IR$ یا $(-\infty,\infty)$

$$\frac{f}{g}=\frac{4x^2-11x+2}{x^2+5}$$
$$dom f=IR\ \cdot\quad dom g=IR\qquad,\qquad dom\frac{f}{g}=IR\ \ (-\infty,+\infty)$$
$dom\frac{f}{g}=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq\sqrt{5}\ ,\ x\neq-\sqrt{5}\}$ یا

12- که $f(x)=4x^2-2x$ او $g(x)=8x+1$ وي نو:

$$(f+g)(3)\quad,\quad(f+g)(-5)\quad,\quad(f\cdot g)(4)$$
$$(\frac{f}{g})(4)\quad,\quad(fog)(2)\quad,\quad(gof)(-5)$$

پیدا کړئ.

حل:

$$f+g=4x^2+6x+1\ ,\ \ (f+g)(3)=36+18+1=55$$
$$(f+g)(-5)=4(-5)^2+6(-5)+1=100-30+1=71$$
$$f\cdot g=(4x^2-2x)(8x+1)=32x^3-12x^2-2x$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{4x^2-2x}{8x+1}\Rightarrow(\frac{f}{g})(4)=\frac{64-8}{32+1}=\frac{56}{33}$$
$$f\,o\,g=f(8x+1)=4(8x+1)^2-2(8x+1)=256x^2+64x+4-16x-2=256x^2+50x+2$$
$$(f\,o\,g)(2)=256\cdot 4+50\cdot 2+2=1024+100+2=1126$$
$$g\,o\,f=g(4x^2-2x)=8(4x^2-2x)+1=32x^2-16x+1$$
$$(g\,o\,f)(-5)=32(-5)^2-16(-5)+1=800+80+1=881$$

13- $F\ o\ g$ او $g\ o\ f$ پیدا کړئ که:

a: $f(x)=8x+12$ $\quad g(x)=3x-1$ $\qquad$ b: $f(x)=5x+3$ $\quad g(x)=-x^2+4x+3$

c: $f(x)=-x^3+2$ $\quad g(x)=4x$ $\qquad$ d: $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad g(x)=x^2$

e: $f(x)=\sqrt{x+2}$ $\quad g(x)=8x^2-6$

حل:

a: $(f\,o\,g)(x)=f(3x-1)=8(3x-1)+12=24x+4$

$(g\,o\,f)(x)=g(8x+12)=3(8x+12)-1=24x+35$

b: $(f\,o\,g)(x)=f(-x^2+4x+3)=5(-x^2+4x+3)+3=-5x^2+20x+15+3=-5x^2+20x+18$

$(g\,o\,f)(x)=g(5x+3)=-(5x+3)^2+4(5x+3)+3=-25x^2-30x-9+20x+12+3$

$=-25x^2-10x+6$

c: $(f\,o\,g)(x)=f(4x)=-(4x)^3+2=-64x^3+2$

$(g\,o\,f)(x)=g(-x^3+2)=4(-x^3+2)=-4x^3+8$

d: $(f\,o\,g)(x)=f(x^2)=\frac{1}{x^2}$

$(g\,o\,f)(x)=g(\frac{1}{x})=(\frac{1}{x})^2=\frac{1}{x^2}$

e: $(f\,o\,g)(x)=f(8x^2-6)=\sqrt{8x^2-6+2}=\sqrt{8x^2-4}=\sqrt{4(2x^2-1)}=2\sqrt{2x^2-1}$

$(g\,o\,f)(x)=g(\sqrt{x+2})=8(\sqrt{x+2})^2-6=8x+16-6=8x+10$

14- که $y=f(x)$ وي د $y=f(x)-5$ تابع گراف د 5 واحدو په اندازه:

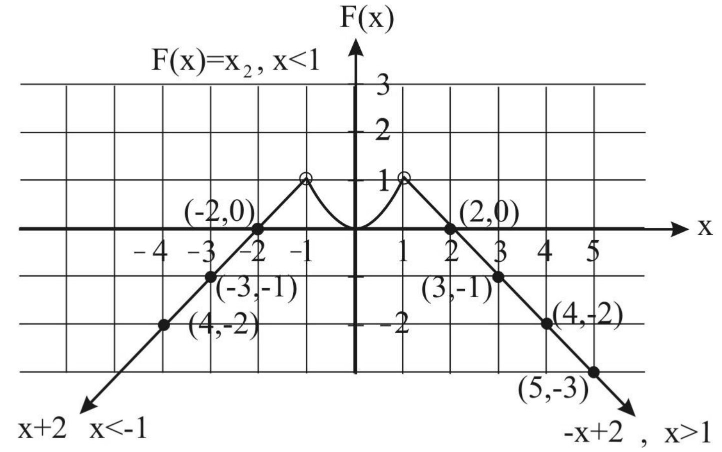
a- ښکته خواته انتقال شوي دی. $\qquad$ b- پورته خواته انتقال شوي دي.

c- ښي خواته انتقال شوي دی. $\qquad$ d- کیڼې خواته انتقال شوي دی.

حل: a سم دی.

15- که $f(x)$ تابع په لاندې ډول تعریف شوي وي، گراف یې رسم کړئ، د تعریف او قیمتونو ناحیې یې وټاکئ.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & x>1\\ x^2 & -1<x<1\\ x+2 & x<-1\end{cases}$$



$dom\ f=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq -1, x\neq 1\}=IR-\{-1,1\}$

$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$ ویا

او د f د قیمتونو ناحیه عبارت ده له:

$Range\ f=(-\infty,1)=\{y/y\in IR\ ,\ y<1\}$

16- د $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ تابع د تعریف او قیمتونو ناحیې وټاکئ.

$dom\ f(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq -1\}=IR\setminus\{-1\}$

$(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$ اویا

د قیمتونو ناحیه یې:

$$y=\frac{2x}{x+1}\Rightarrow yx+y=2x$$

یا $-yx+2x=y\Rightarrow(2-y)x=y\Rightarrow x=\dfrac{y}{2-y}$

$\text{Rang}\ f(x)=IR\setminus\{2\}=\{y/y\in IR\ ,\ y\neq 2\}$

$(-\infty,2)\cup(2,\infty)$ یا

17- د $f(x)=\sqrt{2x-1}$ تابع د تعریف او قیمتونو ناحیې وټاکئ.

حل:

$$dom\ f=\left\{x/x\in IR\ ,\ x\geq\frac{1}{2}\right\}=\left[\frac{1}{2},\infty\right)$$

$Range\ f=[0,\infty)$ یا $y\geq 0$

18- د لاندینیو ناطقو بابعگانو د تعریف ناحیې پیدا کړئ او کومه تابع چې عمودي مجانب ولري عمودي مجانبونه یې هم پیدا کړئ.

$f(x)=\frac{5x}{x-4}$ $\quad g(x)=\frac{7x}{x-8}$ $\quad h(x)=\frac{x+8}{x^2-64}$

$f(x)=\frac{x+8}{x^2+64}$ $\quad g(x)=\frac{x+7}{x^2-49}$ $\quad h(x)=\frac{x+7}{x^2-36}$

حل:

$dom\, f(x) == IR \setminus \{4\} = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

او د عمودي مجانب معادله يې $x=4$ ده.

$dom\, g(x) = IR \setminus \{8\} = (-\infty, 8) \cup (8, \infty)$

د عمودي مجانب معادله يې $x=8$ ده.

$dom\, h(x) = IR \setminus \{-8, 8\} = \{x / x \in IR, x \neq -8, x \neq 8\}$

دوه عمودي مجانبونه لري $x=-8$ او $x=8$ دي.

$dom\, f(x) = IR$ يا $(-\infty, \infty)$

عمودي مجانب نه لري، ځکه د x په هيڅ قيمت د تابع مخرج نه صفر کيږي.

$dom\, g(x) = IR \setminus \{-7, 7\}$ اويا $\{x / x \in IR, x \neq -7, x \neq 7\}$

دوه عمودي مجانبونه لري $x=-7$ او $x=7$ دي.

$dom\, h(x) = IR \setminus \{6, -6\}$

$dom\, h(x) = \{x / \in IR \;,\; x \neq 6 \;\wedge\; x \neq -6\}$

دوه عمودي مجانبونه لري: $x=6$ او $x=-6$

19-د $f(x)=x^2+2$, $f(x)=x^2+1$, $f(x)=x^2-1$ او $f(x)=x^2-2$ تابعگانو گرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ د تابع له گراف سره يې پرتله کړئ.

حل:

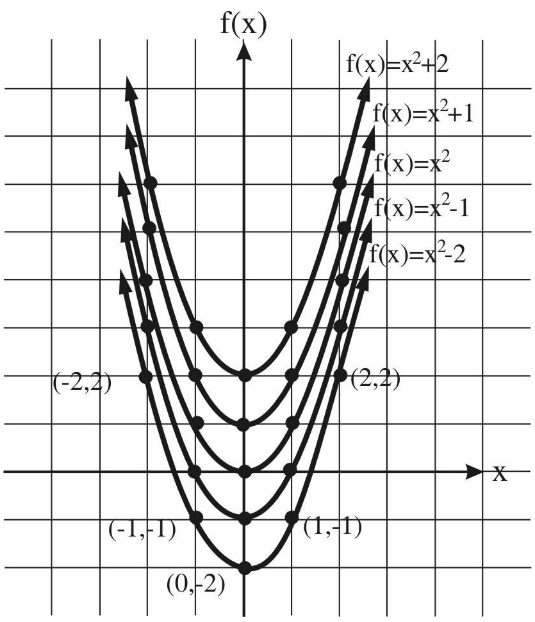
x	0	1	2	−2	−1
$f(x)=x^2$	0	1	4	4	1

x	0	1	2	−1	−2
$f(x)=x^2+1$	1	2	5	2	5

x	0	1	2	−1	−2
$f(x)=x^2-1$	−1	0	3	0	3

x	0	1	−1	2	−2
$f(x)=x^2+2$	2	3	3	6	6

x	0	1	2	−2
$f(x)=x^2-2$	−2	−1	2	2



که $f(x)=x^2$ تابع گراف د 2 واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته نقل شي، د $f(x)=x^2+2$ د تابع گراف لاس ته راځي او که د یو واحد په اندازه پورته خواته نقل شي، د $f(x)=x^2+1$ د تابع گراف او که د یو واحد په اندازه ښکته خواته نقل شي نو د $f(x)=x^2-1$ او که دوه واحده ښکته خواته نقل شي، نو د $f(x)=x^2-2$ تابع گراف لاس ته راځي.

20- د لاندینیو دویمې درجې تابعگانو د راسونو وضعیه کمیات او د تناظر محورونو معادلې پیدا کړئ.

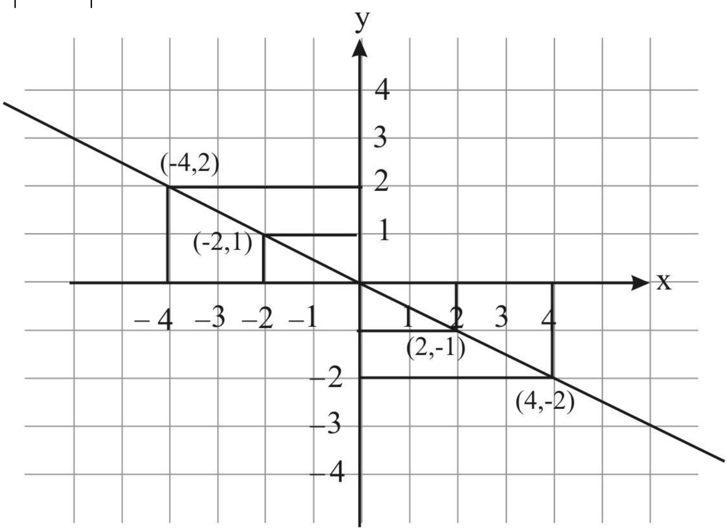
$y=(x-2)^2$ $\qquad$ $y=(x+3)^2-4$

د a حل : د راس وضعیه کمیات یې $(2,0)$ او د تناظر محور معادله یې $x=2$ ده.

د b حل: د راس وضعیه کمیات یې $(-3,-4)$ او د تناظر محور معادله یې $x=-3$ ده.

21-د $y=-\frac{x}{2}$ د تابع گراف رسم کړئ.

x	0	2	4	-2	-4
y	0	-1	-2	1	2



22- د $f(x)=\frac{x^2-5}{x+2}$ د تابع عمودي او مایل مجانب پیدا کړئ.

حل: عمودي مجانب یې $x=-2$ او د مایل مجانب معادله یې $y=x-2$ ده.

23- د $h(x)=\frac{x+1}{x-4}$ تابع د افقي مجانب معادله عبارت ده له:

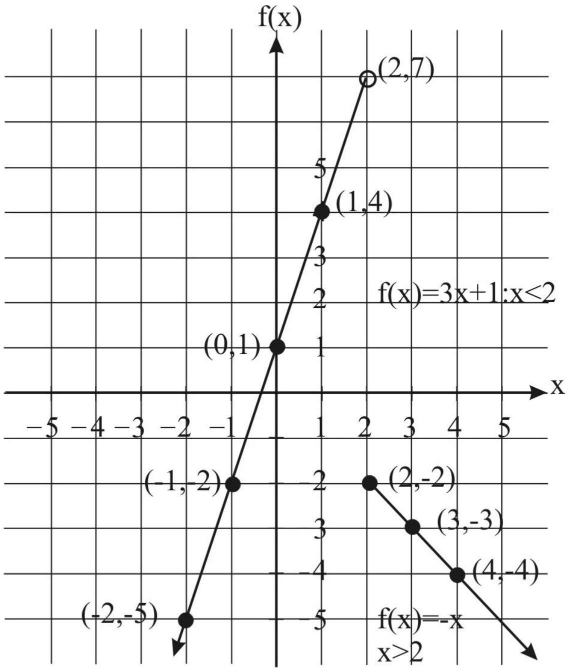
$a)\ \ y=-1 \qquad b)\ \ y=1 \qquad c)\ \ y=-\frac{1}{4} \qquad d)\ \ y=4$

ځواب: b سم ده.

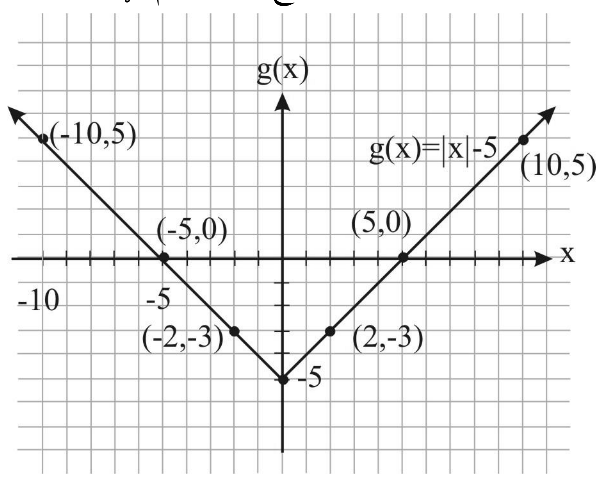
24- د $f(x)=\begin{cases}3x+1 & : x<2\\ -x & : x\geq 2\end{cases}$ د تابع گراف رسم کړئ.

x	1	0	-1	-2
f(x)	4	1	-2	-5

x	2	3	4
f(x)	-2	-3	-4



25- د $g(x)=|x|-5$ تابع گراف رسم کړئ او د تعریف ناحیه یې وټاکئ.



$\text{Range } g(x)=[-5,+\infty)$

x	0	2	5	10	−2	−5	−10
f(x)	−5	−3	0	5	−3	0	5

26- د علامې د تابع (*sign fanction*) د قیمتونو په ناحیه کې د $\{-1,0,1\}$ عددونه شامل دي.

$\text{Rang sig n}=\{-1,0,1\}$

27- د لاندې هرې تابع معکوس پیدا کړئ او ووښایاست چې $f(f^{-1}(x))=x$ دی.

$a: \quad f(x)=\frac{1}{8}x \qquad b: \quad f(x)=8x-1 \qquad c: \quad f(x)=x^2+6$

$d: \quad f(x)=\frac{4x+6}{5} \qquad e: \quad f(x)=x^3-1$

د a حل:

$$y=\frac{1}{8}x \Rightarrow x=\frac{1}{8}y \Rightarrow y=8x$$

$f^{-1}(x)=8x$ ده.

$$f(f^{-1}(x))=f(8x)=\frac{1}{8}\cdot 8x=x$$

د b حل:

$f(x) = 8x - 1$

$y = 8x - 1 \Rightarrow x = 8y - 1 \Rightarrow 8y = x + 1$

$$f^{-f}(x) = \frac{x+1}{8} \Leftarrow y = \frac{x+1}{8}$$

$f(f^{f-1}(x)) = f(\frac{x+1}{8}) = 8(\frac{x+1}{8}) - 1 = x + 1 - 1 = x$

د c حل:

$y = x^2 + 6 \Rightarrow x = y^2 + 6 \Rightarrow y^2 = x - 6$

ددې تابع معکوس تابع نه ده.

د d حل:

$y = \frac{4x+6}{5} \Rightarrow x = \frac{4y+6}{5}$

$4y + 6 = 5x \Rightarrow y = \frac{5x-6}{4}$

$f^{-1}(x) = \frac{5x-6}{4}$

$f(x^{-1}(x)) = f(\frac{5x-6}{4}) = \frac{4\left(\frac{5x-6}{4}\right)+6}{5}$

$$\frac{5x-6+6}{5} = \frac{5x}{5} = x$$

د e حل:

$y = x^3 - 1 \Rightarrow x = y^3 - 1 \Rightarrow y^3 = x + 1$

$y = \sqrt[3]{x+1}$ $\qquad$ $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{3+1}$

$f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt[3]{x+1}) = (\sqrt[3]{x+1})^3 - 1 = x + 1 - 1 = x$

28- ایا د $g(x) = x^2$ تابع معکوس منوونکي ده. (معکوس يې هم يوه تابع ده)

$g(x) = x^2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow x = y^2$ $\qquad$ $g^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$ یا $y = \pm\sqrt{x}$

لیدل کیږي چې $g^{-1}(x)$ تابع نه ده، ځکه که $x = 2$ او یا $x = -2$ وي: $g(2) = 4$ او $g(-2) = 4$ ، نو $g(x)$ معکوس منوونکي تابع نه ده یا معکوس يې تابع نه ده.

29- که $(fog)(x) = (gof)(x)$ وي، نو د f تابع د g له تابع سره څه اړیکه لري؟

حل: که $(f\,o\,g)(x) = (go\,f)(x)$ وي، نو د g د f معکوسه تابع ده.

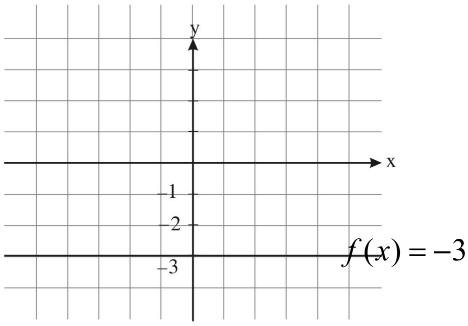
30- د x او y له محورنو سره د $g(x) = 3 - \frac{3}{2}x$ د تابع ګراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ.

حل: د y له محور سره دګراف د تقاطع نقطه $x = 0 \Rightarrow y = 3$ ، نو د تابع دګراف د تقاطع نقطه د y له محور سره $(0,3)$ نقطه ده. د x له محور سره د تقاطع نقطه $y = 0$: $3 - \frac{3}{2}x = 0$

$-\frac{3}{2}x = -3 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 3 \Rightarrow x = 2$ یا د x له محور سره د تقاطع نقطه $(2,0)$ ده.

31- د $f(x) = -3$ د تابع گراف رسم کړئ.

حل:



32- د $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ تابع دگراف د راس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

حل:

$$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}) \qquad x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 5 - 16}{8} = \frac{40 - 16}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

د پارابول د راس د نقطې وضعیه کمیات (1,3) دي.

33- د کمیات وضعیه په عین سیستم کې د $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $f(x) = 3x^2$, $f(x) = 2x^2$ او $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ د تابعگانو گرافونه رسم او د $f(x) = x^2$ د تابع له گراف سره یې پرتله کړئ.

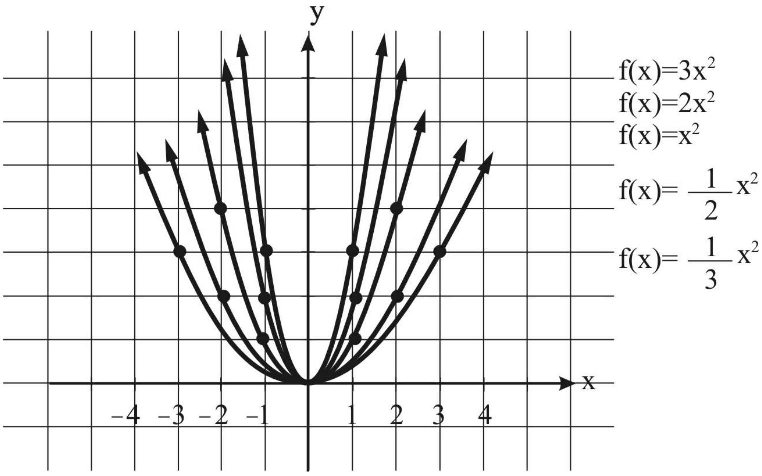
حل:

x	0	1	−1	2	−2
$2x^2$	0	2	2	8	8

x	0	1	−1	2	−2
$3x^2$	0	3	3	12	12

x	0	3	−3
$\frac{1}{3}x^2$	0	3	3

x	0	1	−1	2	−2
$\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2



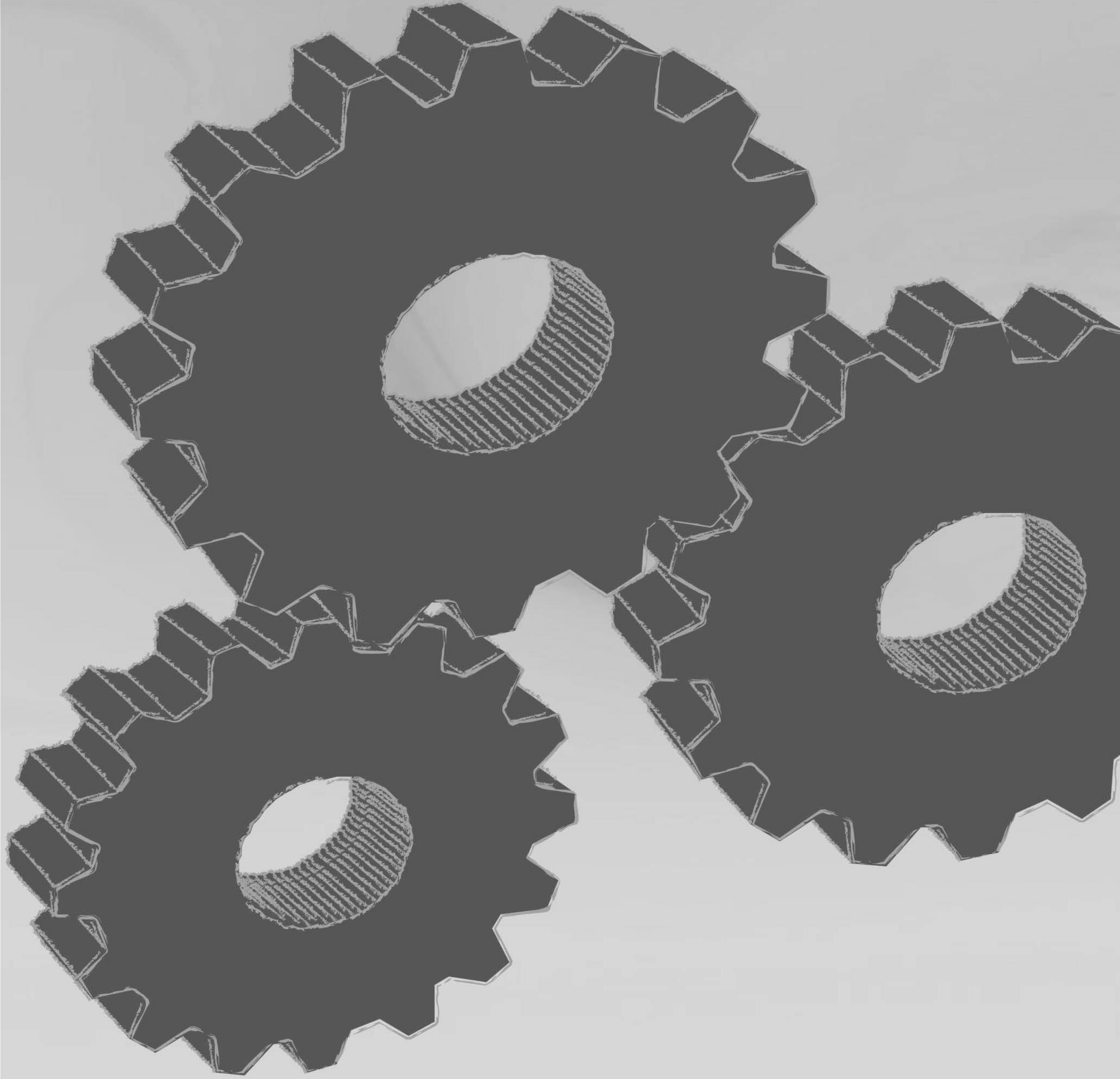
34- د $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ د مایل مجانب معادله عبارت ده له:

a: $y = x$ b: $y = x - 1$ c: $y = x + 1$

حل: a سم دی.

ثلورم خپركى

مثلثاتي تابعگاني





زاویه او راډیان

د دسي کتاب (149) **مخ** **د لوست وخت** (3 **درسي ساعتونه**)

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاویې وپیژني. • د زاویې د اندازه کولو واحدونه وپیژني او د درجې، ګراد او راډیان په تعریف وپوهیږي. • د مرکزي زاویې او د هغې د مقابل قوس تر منځ په اړیکه وپوهیږي او مثلثاتي دایره تعریف کړای شي. • مثبتې او منفي زاویې رسم کړای شي. • د درجې اعشاري شکل په (DMS) او (DMS) د درجې په اعشاري شکل واړولای شي. • د زاویو اندازه له یو واحد څخه بل واحد ته تبدیل کړای شي. • په دې وپوهیږي چې یو دوران څو درجې، څو ګراده او څو راډیانه کیږي. • د مثلثاتي مسایلو په حل کې د زاویو د اندازو د تبدیلولو اهمیت درک کړي.
د زده کړې لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یو کسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، هندسي بکسه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو وروسته دې ورودي پوښتنه له ده کوونکو وپوښتل شي چې په هندسه کې منفي زاویې نه شته دی، خو په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاویې شته دی.

د لوست بهیر او فعالیتونه (28) **دقیقه:**

ښاغلی ښوونکي دې د چارت او یا تختې پر مخ د مثبتو او منفي زاویو مفهوم زده کوونکو ته توضیح کړي او د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره دې ددې لوست د (150) مخ د لومړی مثال زاویې رسم کړئ. ددې مخ د فعالیت زاویې دې زده کوونکي رسم کړي.

په همدې ډول ښوونکې دې دویم مثال حل کړي او زده کوونکي دې د (151) مخ فعالیت سرته ورسوي، دګراد تعریفولو وروسته دې ښوونکی د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره د (151) مخ دریم مثال سره حل کړي.

راډیان دې تعریف شي او د مرکزي زاویې او د هغې د مقابل قوس ترمنځ اړیکه دې توضیح شي. ښاغلی ښوونکي دې څلورم مثال حل کړي او د (153) مخ فعالیت دې یو زده کوونکي د تختې پر مخ حل کړي. د فورمول په واسطه دې د درجې، ګراد او راډیان تر منځ اړیکه او یو پر بل اړول یې توضیح شي.

ددې مخ پنځم مثال دې د تختې پر مخ د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل شي، شپږم مثال دې د یوه زده کوونکي په واسطه پر تخته حل شي او د درجې او راډیان تر منځ اړیکه دې د (156) مخ د چارت له مخې واضیح شي د (156) مخ فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي.
ښاغلی ښوونکي دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره اووم او اتم مثال حل او توضیح کړي.

د زده کړې پیاوړتیا (7) دقیقې:

ددې لوست د پیاوړتیا لپاره لاندې پوښتنې حل کړئ.

لاندې زاویې چې په راډیان راکړل شوي دي، په درجه یې واړوئ.

$\frac{\pi}{5}$، $-\frac{\pi}{10}$، $\frac{3\pi}{4}$، $\frac{\pi}{45}$، $-\frac{5\pi}{12}$، $\frac{27\pi}{5}$

د لوست ارزونه (5) دقیقې:

- لاندې زاویې په راډیان واړوئ.

$36^\circ, 6^\circ$، $-12^\circ, 75^\circ, 135^\circ$, $-225^\circ, 930^\circ$

- که د یوې دایرې قطر 10 واحده وي، د لاندینو مرکزي زاویو د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ.

1^R, 2^R, 1.75^R, $22\,Radian$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- د مثلثاتو له کلمې څخه ښکاري چې د مثلث د اجزاوو اندازه کول دي، په غیر مستقیم ډول د فاصلو اندازه کول، لکه: د غرونو لوړوالی، د دریا بونو سور د ساحل له یوې خوا څخه، د ستورو په حرکت کې غور او د وخت اندازه کول یې، د فزیک د علم اړتیاوو د ریاضي دا ځانګه رامنځ ته کړه.
د علومو تاریخ وایي چې له میلاد څخه 2000 کاله پخوا، بابلیانو او مصریانو په غور سره د لمر، سپوږمۍ او ستورو حرکت ته متوجه وه، کال یې 360 ورځې باله، له همدې سببه یې دایره یې په 360 مساوي برخو وېشله چې په نتیجه کې درجه او اجزاوي (دقیقې، ثانیې) په ریاضي کې منځ ته راغلې.
د مسیح له میلاد نه په مخکنیو پیړیو کې کوچنی اسیا او یونان ددې ډول علمي مطلبونو د پلټنې مرکزونه و.
طالس (546-640 ق م) سره له دې چې یو سوداګر و د خپلې امسا په واسطه یې د مصر د مشهورو هرمونو لوړوالی اندازه کړ. دې عالم په حقیقت کې د مثلثاتو علم رامنځته کړ.
اقلیدس او زده کوونکو یې 300 کاله مخکې له میلاده په دایره کې په مثلثاتو کار وکړ.
بطلیموس (170 - 100 م) کالو کې د زاویو لپاره یې داسې نسبتونه پیدا کړل چې د ضلعو پر ا وږدوالي پورې یې اړه نه درلوده چې نن ورځ دا نسبتونه د tangent, cosine, sine او Cotangent په نامه یادوو. بطلیموس په خپل مشهور کتاب (المجسطي) کې دا نسبتونه لیکي وو او کارول یې.
د کروي مثلثاتو اثر د (Sphaerica) په کتاب کې چې منلائوس له میلاده سل کاله وروسته لیکلی و، لیدل کیږي.

له میلاده 300 کلونه وروسته اقلیدس او زده کوونکو یې د خپل وخت مثلثات د مساحتونو او په غیر مستقیم ډول د اوږدوالو په پیدا کولو کې په کاروړل. له دې وروسته چې د یونان او اسکندریې علمي څراغ مړ شو او د اسلامي تمدن لمر وځلید په دې وخت کې دوه هندي عالمان اریابهاتا (Aryabhatas) (660-588 م) او بهاسکارا (Bhaskara) چې په (1114 م) کال کې پیدا شوي وو، د مثلثاتي نسبتونو لپاره یې جدولونه جوړ کړل چې د مثلثاتي تابعگانو په نامه یادیږي او له پوره دقت څخه په کې کار اخیستل شوی دی.

د هارون الرشید د خلافت په وخت کې (890-786 م) له یوناني او هندي ژبو څخه علمي کتابونه په عربي ژبه وژباړل شول څکه خو اسلامي علمي تمدن پر مختلک وکړ. د ابو ریحان البیروني په کتابونو کې د مثلثاتو علم موجود دی. له دې وروسته چې رنسانس په غرب کې وځلیده، نو هنري جان نیر(1617-1550 م)، دیمور(1754-1667 م)، لئونارداویلر(1783-1707 م)، ژوزف فوریه(1830-1768 م)، گوس(1875-1777 م) علماوو د مثلثاتو علم اوج ته ورساوه.

-2

$$146^\circ\ \ 18'\ 34'' = 146^\circ + \frac{18^\circ}{60} + \frac{34^\circ}{3600} = 146^\circ + 0.3^\circ + 0.00944^\circ = 146.30944^\circ$$

$$55.967663^\circ = 55^\circ + (0.967663\cdot 60)' = 55^\circ + 58.05978'$$

$$= 55^\circ + 58' + (0.05978\cdot 60)'' = 55^\circ + 58' + 4'' = 55^\circ\ \ 58'\ \ 4''$$

3- د یو دوران د راکړل شوي برخې درجې د راډیان په حساب مساوي دي په:

$\frac{1}{9}\text{Re}\,v = 40^\circ = (\frac{2\pi}{9})^R$ $\quad \frac{2}{3}\text{Re}\,v = 240^\circ = (\frac{4\pi}{3})^R$

$\frac{1}{18}\text{Re}\,v = 20^\circ = (\frac{\pi}{9})^R$ $\quad \frac{4}{5}\text{Re}\,v = 288^\circ = (\frac{8\pi}{5})^R$ $\quad \frac{1}{36}\text{Re}\,v = 10^\circ = (\frac{\pi}{18})^R$

4- که د یوې دایرې قطر 10m وي، د لاندینیو راکړل شوو مرکزي زاویو د مقابلو قوسونو اوږدوالی مساوي دی په:

$(3.8)\text{Radiam} \to 19\text{m}$ $\quad (2.4)^R \to 12\text{m}$ $\quad (45)^R \to 225\text{m}$

$(72)^R \to 360\text{m}$ $\quad (4.28)^R \to 12.4\text{m}$ $\quad (0.67)^R = 3.35\text{m}$ $\quad (\frac{7\pi}{4})^R = \frac{35\pi}{4}\text{m}$

$(\frac{\pi}{3})^R \to \frac{5\pi}{3}\text{m}$ $\quad (\frac{2\pi}{3})^R \to \frac{10\pi}{3}\text{m}$ $\quad (\frac{\pi}{4})^R = \frac{5\pi}{4}\text{m}$ $\quad (\frac{7\pi}{6})^R = \frac{35\pi}{6}\text{m}$

5- په راډیان د راکړل شوو زاویو اندازه د درجې په حساب مساوي ده په:

$\frac{\pi}{5} = 36^\circ$, $\quad -\frac{\pi}{10} = -18^\circ$, $\quad \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$, $\quad \frac{\pi}{45} = 4^\circ$ (رادیان په درجه)

$6^\circ = (\frac{\pi}{30})^R$, $\quad -12^\circ = (-\frac{\pi}{15})^R$, $\quad 75^\circ = (\frac{5\pi}{12})^R$ (درجه په رادیان)

$135^\circ = (\frac{3\pi}{4})^R$, $\quad -225^\circ = (\frac{-5\pi}{4})^R$, $\quad 930^\circ = (\frac{31\pi}{6})^R$

6- د یو ساعت عقربه په هر ساعت کې 30° زاویه طی کوي او دا عقربه یوه درجه په (2') کې طی کوي او په (28) دقیقو کې دا عقربه 14° قوس طي کوي او په $\frac{2}{5}$ دقیقو کې د $12'$ قوس طي کوي.

7- لاندیني زاویې څو دورانو نه (Rotations) یا د یو دوران څوومه برخه ده؟

$45^\circ=\frac{1}{8}ccw$ $90^\circ=\frac{1}{4}ccw$ $-180^\circ=\frac{1}{2}cw$ $-270^\circ=\frac{3}{4}cw$

$450^\circ=1\frac{1}{4}ccw$ $720^\circ=2ccw$ $-420^\circ=1\frac{1}{6}cw$ $-640^\circ=1\frac{7}{9}cw$

(ccw) د ساعت د عقربې د حرکت مخالف جهت او (cw) د ساعت د عقربې د حرکت هم جهت.

(ccw)
C= Counter C= clock W= Wise

د پوښتنو ځوابونه:

1- که د یوې مرکزي زاویې مقابل قوس 50cm او د دایرې شعاع 25cm وي، مرکزي زاویه به څو راډیانه وي؟

حل:

$$\theta=\frac{S}{R}\Rightarrow\theta=\frac{50cm}{25cm}=2\,\text{Radian}$$

2- $32{,}4222^o$ په درجې، دقیقې او ثانیې واړوئ.

حل: $32.4222^\circ=32^\circ+0.4222^\circ=32^\circ+(0.4222\cdot60)'=32^\circ\ \ 25'+(0.332\cdot60)''=32^\circ\ 25'\ \ \ 19.92''$

3- د یو دوران $\frac{1}{8}$ برخه څو راډیانه، څو درجې او څو ګراده کیږي؟

حل:

a) $\frac{1}{8}\cdot360^\circ=45^\circ$ b) $\frac{1}{8}\cdot400=50^g$ c) $\frac{1}{8}\cdot2\pi^R=\frac{\pi}{4}^R$

4- $\frac{5\pi}{4}$ راډیان څو ګراده او $-7{,}5^\circ$ څو راډیانه کیږي؟

حل:

a) $2\pi^R=400^g$

$\frac{5\pi^R}{4}=\ x$ $x^\circ=\frac{5\pi}{4}\cdot400/2\pi^R=250^g$

b) $2\pi^R=360^\circ$

$x^R=-7.5^\circ$ $x^\circ=\frac{-7.5^\circ\cdot2\pi^R}{360}=\ \frac{-15\pi^R}{360}=(-\frac{\pi}{24})^R$

5- $720^o,-315^o,225^o$ او 45^o په راډیان او ګراد واړوئ.

حل:

a) $45^\circ=\frac{45\cdot2\pi}{360}=(\frac{\pi}{4})^R$ b) $720^\circ\ \frac{720^\circ\quad2\pi}{360}=4\pi^R$

c) $-315^\circ\ =\frac{-315\cdot2\pi}{360}=\ (\frac{-7\pi}{4})^R$ d) $225^\circ=\frac{225\cdot2\pi}{360}=(\frac{5\pi}{4})^R$

6- د یو دوران $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{18}$ او $\frac{4}{5}$ برخې څو راډیانه او څو درجې کیږي؟

حل:

$a)\ \frac{1}{9}\cdot 2\pi = (\frac{2\pi}{9})^R \qquad \frac{1}{9}\cdot 360 = 40^\circ$ $\qquad b)\ \frac{1}{24}\cdot 2\pi = (\frac{\pi}{12})^R \qquad \frac{1}{24}\cdot 360^\circ = 15^\circ$

$c)\ \frac{1}{18}\cdot 2\pi = (\frac{\pi}{9})^R \qquad \frac{1}{18}\cdot 360^\circ = 20^\circ$ $\qquad d)\ \frac{4}{5}\cdot 2\pi = (\frac{8}{5}\pi)^R \qquad \frac{4}{5}\cdot 360^\circ = 288^\circ$

7- $\frac{11\pi}{3}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{10}$, $\frac{2\pi}{5}$ او $-\frac{5\pi}{12}$ په راډیان او درجې واړوئ.

حل:

$$a)\ 2\pi^R = 360^\circ \qquad (\frac{11}{3}\pi)^R = x^\circ \Rightarrow x^\circ = \frac{\frac{11}{3}\pi\cdot 360^\circ}{2\pi} = \frac{11\cdot 120}{2} = 660^\circ$$

$$b)\ (\frac{9\pi}{4})^R = \frac{\frac{9\pi}{4}\cdot 360^\circ}{2\pi} = \frac{9\cdot 90}{2} = 405^\circ \qquad c)\ (\frac{\pi}{6})^R = \frac{\frac{\pi}{6}\cdot 360^\circ}{2\pi} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

$$d)\ (-\frac{\pi}{6})^R = \frac{\frac{\pi}{6}\cdot 360^\circ}{20} = -30^\circ \qquad e)\ (-\frac{\pi}{10})^R = \frac{\frac{2\pi}{10}\cdot 360}{2\pi} = -18^\circ$$

$$f)\ (\frac{2\pi}{5})^R = \frac{\frac{2\pi}{5}\cdot 360}{2\pi} = 72^\circ \qquad g)\ (-\frac{5\pi}{12})^R = \frac{-5^\pi\!/12\cdot 360}{2\pi} = -75^\circ$$

8- که د یو ساعت د ثانیې د عقربې اوږدوالی 6cm وي، په ''40 ثانیو کې د ثانیې عقربه څو سانتي متره فاصله طی کوي؟

حل:

$$S = R.\theta \qquad 40'' = \frac{40}{60}\mathrm{Rev} = \frac{2}{3}\mathrm{Rev}$$

$$S = 6cm\cdot(\frac{4}{3}\pi)^R = 8\pi cm \qquad \begin{cases} 1\,\mathrm{Rev} = 2\pi^R = \\ \frac{2}{3}\mathrm{Rev} = (\frac{4}{3}\pi)^R \end{cases}$$

9- که د دایرې شعاع 3cm او مرکزي زاویه $\frac{5}{3}$ راډیانه وي. د دې مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟

حل:

$$S = R\cdot\theta = 3cm\cdot\frac{5}{3} = 5cm$$

10- که د یو ساعت د ثانیې د عقربې دوران 35 ثانیې وي، نو د ثانیې عقربې به څو راډیانه مثبته زاویه طی کړې وي؟

حل:

$$60'' = (2\pi)^R \Rightarrow (\frac{35}{60})\cdot 2\pi = (\frac{7\pi}{6})^R$$

11- د دوو زاویو مجموعه 152° ده، که د یوې زاویې اندازه د درجې په حساب له بلې زاویې سره د ګراد په حساب برابره وي، د هرې زاویې اندازه د راډیان په حساب څومره ده؟

حل:

$x + y = 152^\circ$

$$\begin{cases} x = \frac{10}{9}y \end{cases}$$

$$\frac{10}{9}y + y = 152 \Rightarrow 10y + 9y = 1368 \Rightarrow y = \frac{1368}{19}$$

$$y = 72^\circ \qquad x = 80^\circ \qquad 72^\circ = 80^g$$

$$\Rightarrow x = 80 \cdot \frac{\pi}{180} = (\frac{4\pi}{9})^R$$

$$y = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = (\frac{8\pi}{20})^R = (\frac{2\pi}{5})^R$$

12- 1620° څو راډیانه کېږي؟

$a)\ 4\pi^R$ $\quad b)\ 8\pi^R$ $\quad c)\ 9\pi^R$ $\quad d)\ 10\pi^R$

حل:

$$1620^\circ = \frac{1620 \cdot 2\pi}{360} = (9\pi)^R$$

13- څلور دورانونه څو راډیانه کېږي؟

$a)\ 2\pi^R$ $\quad b)\ 4\pi^R$ $\quad c)\ 6\pi^R$ $\quad d)\ 8\pi^R$

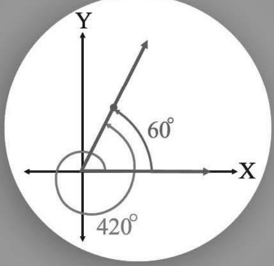
حل: څلور دورانونه: $4 \cdot 2\pi^R = 8\pi^R$, (سم ځواب d دی)

14 - که د یوې دایرې شعاع $10m$ وي، د $45\,radian$ مرکزي زاویې، مقابل قوس به څو متره وي؟

حل:

$r = 10m$

$\theta = 45\ \ radian, \quad S = r\theta \Rightarrow \quad S = 45^R \cdot 10m = 450m$



د يوې زاويې معياري حالت او كوټرمينل زاويې

د درسي كتاب (159)**مخ** **د لوست وخت**: (1 **درسي ساعت**)

د زده كړې (**پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي**) **موخې**	زده كوونكي بايد ددې لوست په پاى كې: • د يوې زاويې د معياري حالت او د كوټرمنيل زاويو په تعريف وپوهيږي. • له يوې زاويې سره د كوټرمينل د زاويو پيدا كول زده كړي. • يوه زاويه په معياري حالت وښودلاى شي. • له يوې زاويې سره كوټرمينل زاويې پيدا كړاى شي. • كوټرمينل زاويې په شكل كې رسم كړاى شي. • د مثلثاتي مسايلو په حل كې او په خاص ډول د يوې زاويې د مثلثاتي نسبتونو په پيدا كولو كې د كوټرمينل زاويو اهميت درك كړي او زده كړې ته يې علاقه مند شي.
د تدريس لارې (**ميتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، يو كسيز او ډله ييز كارونه، بحث كول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي كتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو وروسته د ورودي برخې پوښتنه دې له زده كوونكو وپوښتل شي. څرنګه چې د 60° او 420° زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبقې دي نو دا واړه زاويې سره كوټر مينل دي: $420 = 1 \times 360 + 60$

د لوست بهير او فعاليتونه (28) **دقيقې**:

ښاغلى ښوونكي دې د (159) مخ د شكلونو په چارت كې او يا دتختې پر مخ د يوې زاويې معياري حالت توضيح كړي او ددې مخ لومړى مثال دې زده كوونكو ته په ونډې وركولو سره حل كړي، بيا دې د (160) مخ فعاليت زده كوونكي په ګروپونو كې سرته ورسوي او د ګروپ نماينده دې خپل كار د تختې پر مخ توضيح كړي .

د كوټرمنيل زاويو له تعريفولو وروسته دويم او دريم مثال يا د چارت له مخې او يا پر تخته حل او د شكل په واسطه يې توضيح كړي او د (161) مخ فعاليت كولاى شي چې له دوو زده كوونكو وپوښتئ.

په همدې ډول څلورم او پنځم مثال په شكل كې د زده كوونكو په ونډې اخيستنې سره حل كړئ.

د لوست پياوړتيا: (7) **دقيقې**:

تر ټولو كوچنى مثبته زاويه پيدا كړئ چې -40°, -125° او 450° زاويو سره كوټرمينل وي. ځواب: (320°, 235° او 90°)

د لوست ارزونه (5) **دقيقې**

د لوست د ارزونې لپاره د دويمې پوښتنې يوه برخه له زده كوونكو وپوښتئ.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- هغه زاويې چې د راډيان په حساب له (0) څخه تر (2π) پورې له لانديـنيو زاويـو سـره کوټرمينـل دي، عبـارت دي له:

$$-\frac{\pi}{3}\to\frac{5\pi}{3} \qquad \frac{19\pi}{4}\to\frac{3\pi}{4} \qquad -\frac{7\pi}{5}\to\frac{3\pi}{5} \qquad 7\to 7-2\pi$$

- په معياري حالت کې څلور څلور زاويې پيدا کړئ چې له لانـدينيو زاويـو سـره چـې د راډيـان پـه حساب راکـړل شـوي دي، کوټرمنيل وي:

$$\frac{\pi}{4}\to \quad \frac{9\pi}{4},\ \frac{17\pi}{4},\frac{7\pi}{4},-\frac{15\pi}{4}$$

$$-\frac{\pi}{6}\to \quad \frac{11\pi}{6},\ \frac{23\pi}{6},\frac{-13\pi}{6},-\frac{25\pi}{4}$$

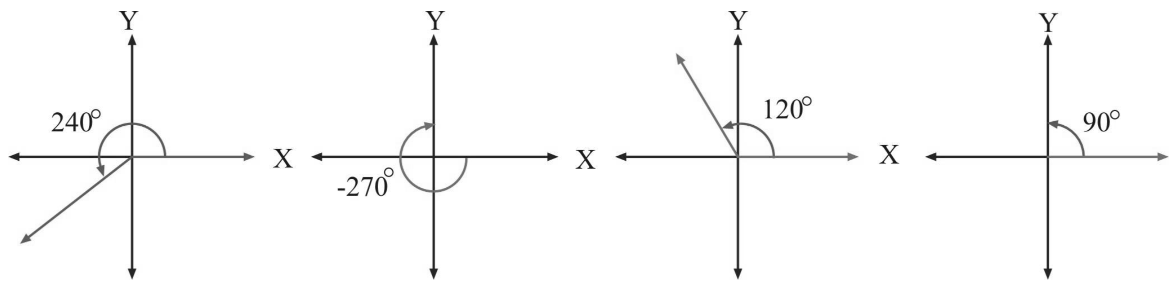
- له راکړل شوو زاويو سره ټولې کوټرمينل زاويې چې $-360^\circ<\theta<360^\circ$ وي، عبارت دي له:

$35^\circ \longrightarrow -325^\circ$	$23^\circ \longrightarrow -337^\circ$	$112^\circ \longrightarrow -248^\circ$
$160^\circ \longrightarrow -200^\circ$	$612^\circ \longrightarrow 252^\circ,-108^\circ$	$-315^\circ \longrightarrow 45^\circ$
$478^\circ \longrightarrow 118^\circ,-242^\circ$	$-135^\circ \longrightarrow 225^\circ$	$-120^\circ \longrightarrow 240^\circ$
$90^\circ \longrightarrow -270^\circ$	$-180^\circ \longrightarrow 180^\circ$	$-450^\circ \longrightarrow -90^\circ,270^\circ$
$-280^\circ \longrightarrow 80^\circ$	$-485^\circ \longrightarrow -125^\circ,235^\circ$	$225^\circ \longrightarrow -135^\circ$
$540^\circ \longrightarrow 180^\circ,-180^\circ$	$270^\circ \longrightarrow -90^\circ$	$560^\circ \longrightarrow 200^\circ,-160^\circ$
$195^\circ \longrightarrow -165^\circ$	$410^\circ \longrightarrow 50^\circ,-310^\circ$	

د پوښتنو ځوابونه

1- د $-270^\circ,120^\circ,90^\circ$ او 240° زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.

حل:



2- تر ټولو کوچنۍ مثبته زاويه پيدا کړئ چې له لاندينيو زاويو سره کوټرمينل وي.

$$-40^\circ,-125^\circ,450^\circ,\ 539^\circ,60^\circ,90^\circ,135^\circ$$

حل:

ترټولو کوچنۍ زاويه چې له 135° سره کوټرمينل وي، د 495° زاويه ده.

ترټولو کوچنۍ زاويه چې له 90° سره کوټرمينل وي، د 450° زاويه ده.

ترټولو کوچنۍ زاويه چې له 60° سره کوټرمينل وي، د 420° زاويه ده.

ترټولو کوچنۍ زاویه چې له 539° سره کوټرمینل وي، د 179° زاویه ده.

ترټولو کوچنۍ زاویه چې له 450° سره کوټرمینل وي، د 90° زاویه ده.

ترټولو کوچنۍ زاویه چې له -125° سره کوټرمینل وي، د 235° زاویه ده.

ترټولو کوچنۍ زاویه چې له -40° سره کوټرمینل وي، د 320° زاویه ده.

3-ایا د $(-80^\circ, 280^\circ)$ او $(35^\circ, 395^\circ)$ زاویې یوه له بلې سره کوټرمینل دي؟

څرنګه چې: $-80 + 360 = 280$ دي نو سره کوټرمینل دي او همدارنګه $35 + 360 = 395^\circ$ دي نو، دا دواړه زاویې هم سره کوټرمینل دي.

4- له 40° زاویې سره، شپږ کوټرمینل زاویې پیدا کړئ.

حل: د 40° زاویې سره شپږ کوټرمینل زاویې عبارت دي له:

$40^\circ + 2\cdot 360^\circ = 40^\circ + 720^\circ = 760^\circ$

$40^\circ + 360^\circ = 400^\circ$

$40^\circ - 360^\circ = -320^\circ$

$40^\circ + 3\cdot 360^\circ = 40^\circ + 1080^\circ = 1120^\circ$

$40^\circ - 1080^\circ = -1040^\circ$

$40^\circ - 720^\circ = -680^\circ$

5- ایا $(-930^\circ, 150^\circ)$ او $(180^\circ, 900^\circ)$ زاویې سره کوټرمنیل دي؟

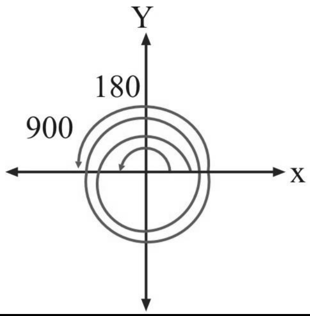
حل: څرنګه چې:

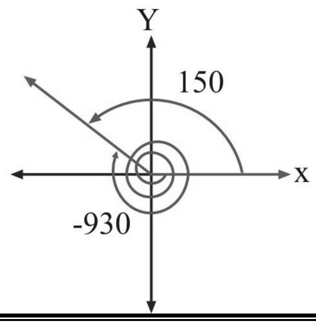
$-930^\circ = 150^\circ - 2.360^\circ = 150^\circ - 1080^\circ$

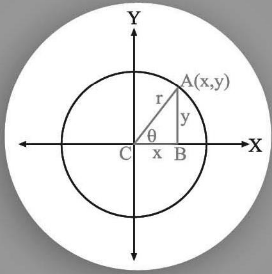
نو سره کوټرمینل دی.

$900^\circ = 180^\circ + 2.360^\circ = 180^\circ + 720^\circ$

نو سره کوټرمینل دي.







مثلثاتي تابعګانې

د درسي کتاب (163)**مخ** **د لوست وخت** (2 **درسي ساعتونه**)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • په قایمه زاويه مثلث کې د يوې حادې زاويې د مثلثاتي تابعګانو په تعریف وپوهېږي. • د زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ ځيني اړيکې زده کړي. • په څلورو واړو ناحيو کې د يوې زاويې د مثلثاتي نسبتونو علامې وپيژني. • که په معیاري حالت کې د يوې زاويې د دويمې ضلعې د يوه ټکي وضعيه کميات معلوم وي، ددې زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړای شي. • دا درک کړي چې په مثلثاتي تابعګانو کې ازاد يا مستقل متحول د θ زاويه او د θ مثلثاتي نسبتونه مقيد متحولونه دي. • د رياضي د مسايلو په حل کې د مثلثاتي نسبتونو د علامو او د يوې زاويې د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ د اړيکو اهميت درک کړي.
د تدريس ميتودونه	پوښتنې او ځوابونه، يو کسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندونه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضيح	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو وروسته دې له زده کوونکو د ورودي پوښتنه وشي او دچارت له مخې دې په شکل کې توضيح شي چې د θ يوې زاويې مثلثاتي نسبتونه د θ دضلعو پر اوږدوالي پورې اړه نه لري، يوازې د θ د زاويې پر پراخوالي پورې اړه لري.

دلوست بهیر او فعالیتونه (28) **دقیقې**:

په چارت او يا پر تخته باندې په يوه قايم الزاويه مثلث کې د (θ) حاده زاويې مثلثاتي نسبتونه تعريف شي او د (163) مخ لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ. د ځينو مثلثاتي اړيکو له ثبوت کولو څخه وروسته د (165) مخ فعاليت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي او خپل کار دې نورو ته توضيح کړي په مثلثاتي دايره (Trigonometric circle) کې دې مثلثاتي تابعګانې د مثلثاتي خطونو په شکل وروښودل شي او روښانه دې شي، $F(\theta)=\sin\theta, F(\theta)=\cos\theta$, $F(\theta)=\tan\theta, F(\theta)=\cot\theta, F(\theta)=\sec\theta$ او $F(\theta)=\csc\theta$ شپږ مثلثاتي تابعګانې د θ د پراخوالی تابع دی. څه وخت چې زده کوونکو په څلورو واړو ناحيو کې د مثلثاتي نسبتونو علامې وپيژندلې، دويم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره په شکل کې حل ا و توضيح کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا (7) **دقیقې**:

د لاندینیو زاویو د مثلثاتي نسبتونو علامې شفاهي وواياست.

$Sin91^\circ$ $Sin181^\circ$ $\cos 271^\circ$ $\tan 300^\circ$ $\cot 269^\circ$ $\csc 120^\circ$ $\csc 45^\circ$ $\sec 269^\circ$

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**:

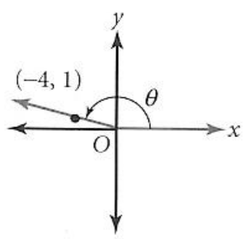
- که په معیاري حالت کې د θ د زاویې دویمه ضلع د (4،3) له نقطې تیره شي، د θ ټول مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.
- که په معیاري حالت کې د θ د زاویې دویمه ضلع د (-2،-3) له نقطې تیره شي، د θ ټول مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

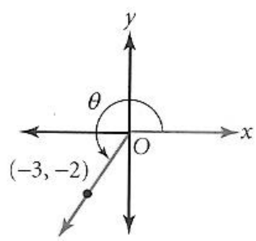
اضافي معلومات:

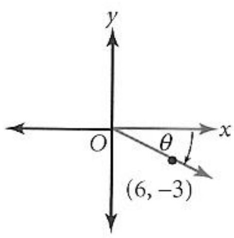
- د ځینو زاویو موقعیت له څلورو ناحیو څخه په یوه ناحیه کې او د دوی د مثلثاتي نسبتونو علامې په لاندې ډول دي.

شمېره	زاویه	ناحیه	علامه
1	$\sin 160^\circ$	2	+
2	$\cos 160^\circ$	2	−
3	$\tan 200^\circ$	3	+
4	$\sin 262^\circ$	3	−
5	$\sin(-40^\circ)$	4	−
6	$\cot(-130^\circ)$	3	+
7	$\sin 210^\circ$	3	−
8	$\tan 210^\circ$	3	+
9	$\cos 470^\circ$	2	−
10	$\sin 470^\circ$	2	+
11	$\sin(-470^\circ)$	3	−
12	$\tan(-470^\circ)$	3	+
13	$\sin 1030^\circ)$	4	−
14	$\cos 1000^\circ$	4	+

- د θ د زاویې مثلثاتي نسبتونه چې په لاندې شکل کې راکړل شوي دي عبارت دي له:







$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$ $\cos\theta = -\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$ $\tan\theta = -\frac{1}{4}$

$\sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ $\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ $\tan\theta = \frac{2}{3}$

$\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\tan\theta = -\frac{1}{2}$

- ځينې مثلثاتي مطابقتونه په لاندې ډول دي:

$\frac{\sec\theta}{\csc\theta} = \tan\theta$ $\frac{\sin x}{\csc x} + \frac{\cos x}{\sec x} = 1$ $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta) = \frac{1}{\sec^2\theta}$

$(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1) = \tan^2\theta$

$(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta) = 1$

$(1-\cos^2\theta)(1+\cot^2\theta) = 1$

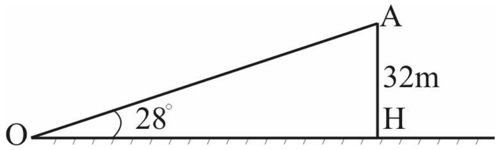
$\sin x(\csc x - \sin x) = \cos^2 x$

$\cos x(\tan x + \cot x) = \csc^2 x$

$\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$\tan^2 x\cos^2 x + \cos^2 x = 1$

لومړی مسئله:



د منار لوړوالی $32m$ او $A\hat{O}H = 28^\circ$ دی.

Oد نقطې فاصله د منار له پایې څخه چې د O نقطه د ځمکې پر مخ واقع ده، عبارت ده له:

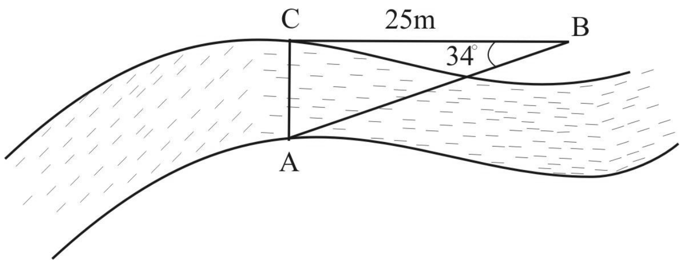
$\cot 28^\circ = \frac{OH}{AH}$

$OH = AH\cot 28^\circ$

$= 32\cdot(1.8807) = 60.1824m$

دویمه مسئله:

په شکل کې د سیند د سور $\overline{AC}$ د پیدا کولو لپاره هغه عمود چې د B له نقطې پر $\overline{AC}$ رسم شوی دی اوږدوالی یې $\overline{BC} = 25m$ دی، که چیرې $C\hat{B}A = 34^\circ$ وي.



$\tan 34^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC\cdot\tan 34^\circ = 25m\cdot(0.6745)$

$AC = 16.8625m$

د پوښتنو ځوابونه:

1– د لاندینیو زاویو د مثلثاتي نسبتونو نښې(علامې) په شفاهي ډول ووایاست.

$\sin 120^o$	$\tan 170^o$	$\tan 60^o$	$\cos 330^o$	$\sec 200^o$
$\cot 271^o$	$\csc 91^o$	$\sin 271^o$	$\csc 181^\circ$	$\csc 315^\circ$

حل:

منفي	$\cot 271^\circ$	مثبت	$\sin 120^\circ$
مثبت	$\csc 91^\circ$	منفي	$\tan 170^\circ$
منفي	$\sin 271^\circ$	مثبت	$\tan 60^\circ$
منفي	$\csc 181^\circ$	مثبت	$\cos 330^\circ$
منفي	$\csc 315$	منفي	$\sec 200$

2- که θ په معیاري حالت کې د رادیان په حساب وي او د θ دویمه ضلع له لاندې راکړل شوو ټکو څخه تېره شي، $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ پیداکړئ.

$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$

حل:

$a)\quad (\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow (\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=r^2$$

$$\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=r^2 \Rightarrow r^2=1 \Rightarrow r=1$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

$$\cos\theta=\frac{x}{R}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ و $x^2+y^2=r^2$

$$(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2=r^2 \Rightarrow r=1$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

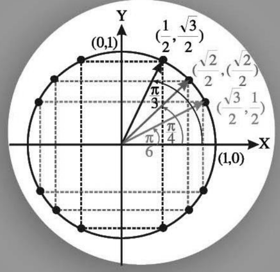
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{-\sqrt{\frac{2}{2}}} = -1$$

c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow r = 1$

$\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan\theta = -1$ و $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow r = 1$

d) $\sin\theta = -\frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ و $\tan\theta = 1$



د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه

د درسي کتاب (169)**مخ** **د لوست وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې	زده کوونکي باید ددې لوست په پای کې:
- پوهنیزې - مهارتي - ذهنیتي	• د $30^\circ, 45^\circ$ او 60° زاویو د مثلثاتي نسبتونو د پیداکولو په طریقه وپوهېږي. • د $30^\circ, 45^\circ$ او 60° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیداکړای شي. • د 30° او 60° زاویو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ په اړیکه وپوهېږي. • په هر متساوي الاضلاع مثلث کې د 30° او 60° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړای شي. • د هغوی د دوو زایو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ په اړیکه وپوهېږي چې مجموعه یې 90° کیږي او ددې اړیکو اهمیت د زاویو د مثلثاتي نسبتونو په پیدا کولو او دزاویو د مثلثاتي نسبتونو د جدول په ترتیبولو کې درک کړي.
د تدریس لارې (**میتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د ورودي برخې د شکل په چارت کې د $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ او $\frac{\pi}{3}$ زاویو د دویمو ضلعو د انجامونو وضعیه کمیات وروښول شي او څرنګه چې $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ کیږي، نو $\sin 30^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ$

د لوست بهیر فعالیتونه (28) دقیقې

ښاغلي ښوونکي دې د چارت له مخې او یا پرتخته په قایم الزاویه متساوي الساقین مثلث کې د 45° او یا $\frac{\pi}{4}$ راډیان زاویې مثلثاتي نسبتونه پیداکړي، بیا دې زده کوونکي د (170) مخ فعالیت په ګروپونو کې سرته ورسوي، دګروپ نماینده دې خپل کار نوروته توضیح کړي. البته ښوونکي د دوی د کارونو څارنه کوي او لارښوونه او مرسته ورسره کوي.

بیا د شکل په شان په یوه متساوي الاضلاع مثلث کې د 30° یا $\frac{\pi}{6}$ راډیان او د 60° یا $\frac{\pi}{3}$ راډیان زاویو مثلثاتي نسبتونه لاس ته راوړئ. د (170°) مخ دویم فعالیت دې زده کوونکي د لومړي فعالیت په شان سرته ورسوي او ښاغلي ښوونکي دې په قایم الزاویه متساوي الساقین مثلث کې د هغو دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکې چې مجموعه یې 90° کیږي واضح کړي. له دې وروسته چې زده کوونکو د (172) مخ فعالیت سرته ورسوي. نو ښوونکي دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره ددې مخ مثال حل کړي.

د لوست پیاوړتیا (7) دقیقې

$\sin 19^\circ 20' = 0.3311$

$\cos 19^\circ 20' = 0.9436$

$\tan 19^\circ 20' = 0.3508$

$\sin 70^\circ 40'$, $\cos 70^\circ 40'$ او $\cot 70^\circ 40'$ پیدا کړئ.

د لوست ارزونه (5) دقیقې

له لاندینیو مساواتو څخه یې کوم یو سم دی؟

$\sin 1^\circ 40' \ 10'' = \cos 88^\circ 10' \ 50''$

$\tan 11^\circ 11' \ 11'' = \cot 79^\circ 49' \ 49''$

$\sec 20^\circ 21' \ 22'' = \csc 69^\circ 40' \ 39''$

$\cot 40' 40' \ 40'' = \tan 49^\circ 19' \ 20''$

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

-1

θ	$30^\circ = (\frac{\pi}{3})^R$	↗	$45^\circ = (\frac{\pi}{4})^R$	↗	$60^\circ = (\frac{\pi}{3})^R$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	↗	1	↗	$\sqrt{3}$
$\cot\theta$	$\sqrt{3}$	↘	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

-2

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
1°	0.0175	0.9998
0.1°	0.00175	0.999998
0.01°	0.000175	0.99999998
0.001°	0.0000175	0.9999999998

د پوښتنو ځوابونه

1- که: $\csc 17^{\circ}=3{,}420$ $\sec 17^{\circ}=1{,}046$ $\cos 17^{\circ}=0{,}9563$ $\sin 17^{\circ}=0{,}2927$

$\cot 17^{o}=3{,}271$ او $\tan 17^{o}=0{,}3057$ وي، د 73^{o} زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$\text{Sin } 17^{\circ}=0.2927 \Rightarrow \cos 73^{\circ}=0.2927$

$\cos 17^{\circ}=0.9563 \Rightarrow \sin 73^{\circ}=0.9563$

$\tan 17^{\circ}=0.3057 \Rightarrow \cot 73^{\circ}=0.3057$

$\cot g 17^{\circ}=3.271 \Rightarrow \tan 73^{\circ}=3.271$

$\sec 17^{\circ}=1.046 \Rightarrow \csc 73^{\circ}=1.046,\ \csc 17^{\circ}=3.420 \Rightarrow \sec 73^{\circ}=3.420$

2 – لاندې اړيکو څخه کومه يوه يې ناسمه ده؟

a) $\sin 28^{\circ}=\cos 62^{\circ}$

b) $\cos 12^{\circ}\ 10'\ 20''=\sin 77^{\circ}\ 49'\ 40''$

c) $\sec 12^{\circ}=\sec 88^{\circ}$

d) $\tan 70^{\circ}=\cot\ 20^{\circ}$

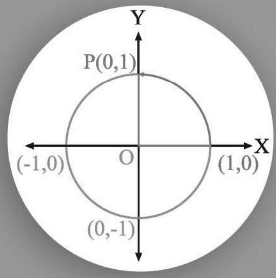
حل:

$\sin 28^{\circ}=\cos 62^{\circ}$ سم دی.

$\cos 12^{\circ}\ 10'\ 20''=\sin 77^{\circ}\ 49'\ 40''$ سم دی.

$\sec 12^{\circ}=\sec 88^{\circ}$ سم نه دی.

$\tan 70^{\circ}=\cot 20^{\circ}$ سم دی.



د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاویو مثلثاتي نسبتونه

ددرسي کتاب (173)مخ   د لوست وخت (1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	زده کوونکي باید ددې لوست په پای کې: • د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاویو د مثلثاتي نسبتونو د پیداکولو په طریقه وپوهیږي. • په دې وپوهیږي چې ددې زاویو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعریف شوي نه دي. • ددې زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړای شي. • درک کړي چې د 360° او 0° زاویو مثلثاتي نسبتونه سره مساوي دي. • د مثلثاتي مسایلو په حل کې ددې زاویو له مثلثاتي نسبتونه څخه ګټه واخیستلای شي او اهمیت یې درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یو کسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	د ورودي چارت له مخې په شکل کې دې وښودل شي چې د $p(0,1)$ نقطه پر مثلثاتي دایره باندې د 90° زاویې پر دویمه ضلعه، د $p(-1,0)$ نقطه د 180° درجې زاویې پر دویمه ضلعه، د $(0,-1)$ نقطه، د 270° زاویې پر دویمه ضلعه او د $(1,0)$ نقطه، د 360° زاویې په لومړۍ او دویمه ضلعه باندې واقع ده.

د لوست بهیر او فعالیتونه (28) دقیقې

ښاغلي ښوونکي دې د شکل له مخې په چارت کې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره د 90° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړي. زده کوونکي دې د 173 مخ فعالیت سرته ورسوي، په همدې ډول دې په شکل کې د 180° زاویې مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړي، د (174) فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي په همدې ډول د $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ او $360^\circ = 2\pi$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړي، د (175) مخ فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي او د ګروپ نماینده دې خپل کارونه نورو ته توضیح کړي، ښاغلي ښوونکي دې لارښوونه او مرسته وکړي.

د زده کړې پیاوړتیا (7) دقیقې

واضح کړئ چې ددې زاویو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه ولې تعریف شوي نه دي؟

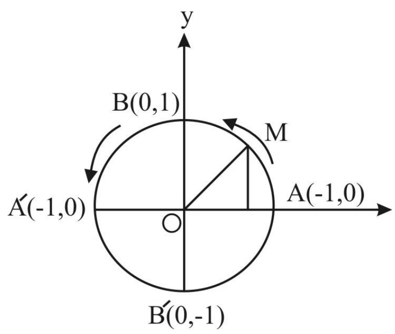
د لوست ارزونه (5) دقیقې

ددې لوست د پوښتنو لومړی پوښتنه حل یا جدول ډک کړئ.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

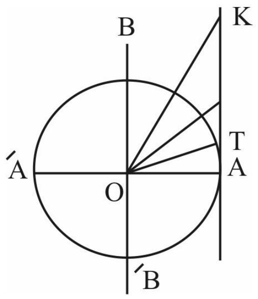
a) د $\sin \propto$ او $\cos \propto$ د مثلثاتي تابعګانو تغيرات:

د M نقطې موقعيت	A B A′ B′ A
د $\overset{\frown}{AM}$ د قوس اندازې	$0 \nearrow \frac{\pi}{2} \nearrow \pi \nearrow \frac{3\pi}{2} \nearrow 2\pi$
$\sin\alpha$	$0 \nearrow 1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0$
$\cos\alpha$	$1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0 \nearrow 1$



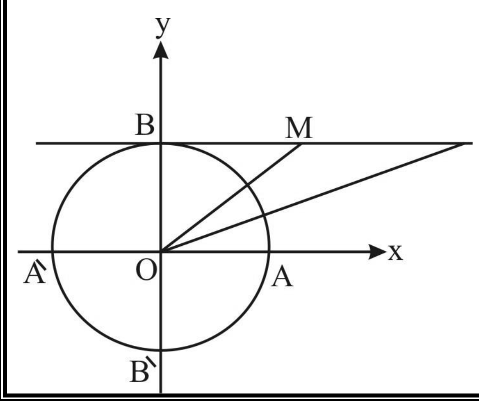
b) د $\tan \propto$ تغيرات:

د M نقطې موقعيت	A	B	A'	B'	A
د $\overset{\frown}{AM}$ د قوس اندازې	$0\nearrow \frac{\pi}{2}-\varepsilon$		$\frac{\pi}{2}+\varepsilon\nearrow \pi\nearrow \frac{3\pi}{2}-\varepsilon$		$\frac{3\pi}{2}+\varepsilon\nearrow 2\pi$
$\tan\alpha$	$0\nearrow +\infty$		$-\infty\nearrow 0\nearrow +\infty$		$-\infty\nearrow 0$



c) د $\cot \propto$ تغيرات:

د M نقطې موقعيت	A	B	A'	B'	A
د $\overset{\frown}{AM}$ د قوس اندازې		$+\varepsilon\nearrow \frac{\pi}{2}\nearrow \pi-\varepsilon$		$\pi+\varepsilon\nearrow \frac{3\pi}{2}\nearrow 2\pi-\varepsilon$	
$\cot\alpha$		$+\infty\searrow 0\searrow -\infty$		$+\infty\searrow 0\searrow -\infty$	



د پوښتنو ځوابونه

1- لاندې جدول ډک کړئ:

θ	0°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin θ						
cos θ						
tan θ						

حل:

θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1
$\tan\theta$	0	تعریف شوی نه دی	0	تعریف شوی نه دی	0

2- $\tan 270^\circ = ?$

$a)\ -1$ $b)\ 1$ $c)\ 0$ $d)$ **نه دي تعريف شوي**

حل: $\tan 270^\circ$ تعریف شوي نه دی (د d ځواب سم دی).

3- $\cos 90^\circ = ?$

$a)\ -1$ $b)\ 1$ $c)\ 0$ $d)$ **نه دي تعريف شوي**

حل: $\cos 90^\circ = 0$ دی، (د c ځواب سم دی).

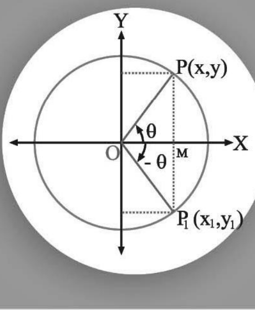
4- ایا د $\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{9\pi}{2}$ دی ؟ولې؟

حل: بلې سره مساوي دي.

$$\left.\begin{aligned}(\tfrac{3\pi}{2})^R &= 270^\circ \\ (\tfrac{9\pi}{2})^R &= 810^\circ\end{aligned}\right\} \begin{aligned}\cos 270^\circ &= 0 \\ \cos 810^\circ &= 0\end{aligned}$$

ځکه د (0.1) نقطه د $\frac{9\pi}{2}$ د زاويې پر دويمه ضلعه باندې او د $(0.-1)$ نقطه هم د $\frac{3\pi}{2}$ د زاويې پر دويمه ضلع باندې واقع ده، نو په پايله کې:

$$\cos\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{9\pi}{2} = 0$$



د يوې حاده زاويې مثلثاتي نسبتونو

اړيکې د نورو زاويو له مثلثاتي نسبتونو سره

د درسي کتاب (177)**مخ** **د لوست وخت**: (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي بايد ددې لوست په پای کې: • د منفي زاويو د مثلثاتي نسبتونو د پيداکولو په طريقه وپوهيږي. • د يوې مثبتې زاويې د مثلثاتي نسبتونو له مخې له ددې زاويې سره د مساوي منفي زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړای شي. • د θ او $-\theta$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو په اړيکه وپوهيږي. • د مثلثاتي مسايلو په حل کې د θ او $-\theta$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو د اړيکو اهميت درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يو کسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	زده کوونکو ته توضيح کړئ چې له مثلثاتي جدول څخه يوازې د مثبتو حاده زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کولای شو.

5- د لوست بهير او فعاليت: (28) **دقيقې**

په داسې حال کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، ښاغلي ښوونکي دې لومړی د OMP او OMP_1 د مثلثونو مساوي والي واضح کړي، بيا دې د θ او $-\theta$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکې ثبوت کړي.

ښاغلی ښوونکي دې ددې لوست د (177) مخ لومړی مثال زده کوونکو ته په ونډې ورکولو سره حل کړي او ددې لوست لومړی فعاليت دې زده کوونکي په ګروپونو کې حل کړي، د يوه ګروپ نماينده دې د تختې پر مخ خپل کار زده کوونکو ته توضيح کړي..

بيا دې ښاغلی ښوونکي د (178) مخ دويم مثال د زده کوونکو ته په ونډې اخيستلو سره حل کړي او زده کوونکي دې ددې مخ دويم فعاليت په ګروپونو کې سرته ورسوي او توضيح دې کړي.

6- د زده کړې پياوړتيا (7) **دقيقې**

د زده کړې د پياوړتيا لپاره دې د پوښتنو لومړۍ پوښتنه حل شي.

7- د لوست ارزونه (5) **دقيقې**

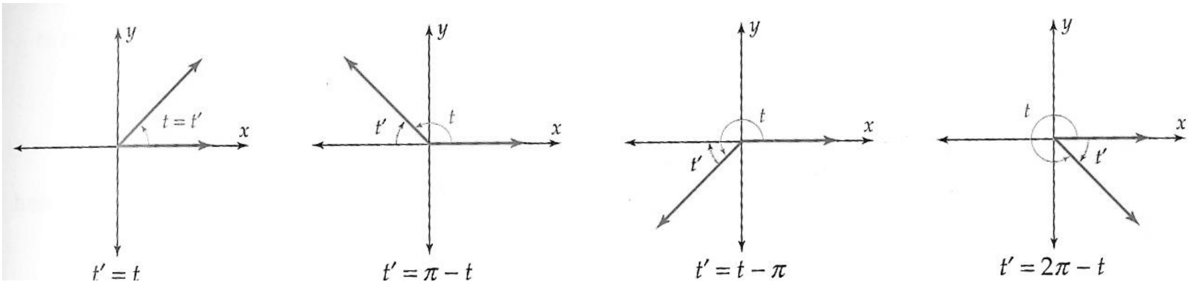
د لوست د ارزونې لپاره دې د پوښتنو دويمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

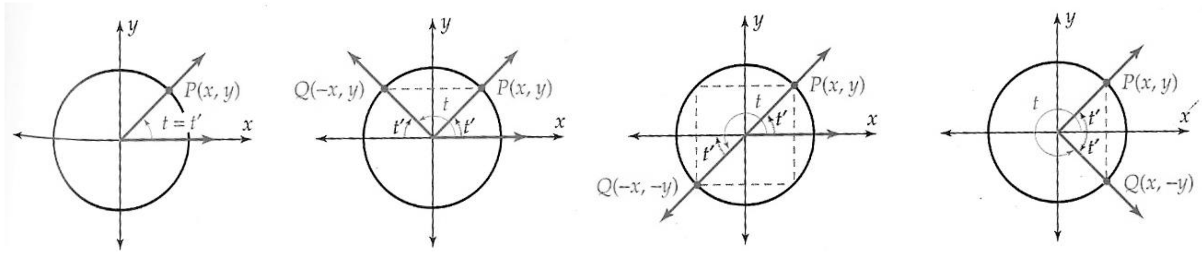
- ماخذه يا اړونده زاويه **(Reference angle or Related angle)**

د t د زاويې لپاره اړونده زاويه هغه مثبته حاده زاويه ده چې د t د زاويې دويمه ضلعه يې د x له محور سره جوړوي

لاندینیو شکلونو ته پام وکړئ چې t' د t د زاویې مربوطه زاویه ده.



مثلثاتي دایره له اړوندې زاویې سره په لومړۍ ناحیه کې:

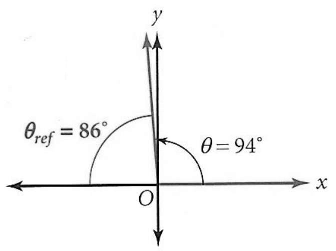


په هر صورت د مثلثونو له انطباق منني څخه ثبوتیږي چې:

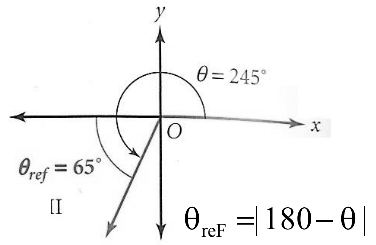
د Q د نقطې د x مختصه $= \pm$ د p نقطې د x له مختصې سره.

د Q د نقطې د y مختصه $= \pm$ د p نقطې د y له مختصې سره.

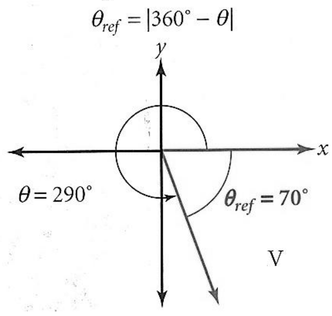
مثال: θ_{ref} د $I:\theta = 94^\circ$, $II:\theta = 245^\circ$, $III:\theta = 290^\circ$ او $IV:\theta = -110^\circ$ لپاره په لاندې ډول دي.



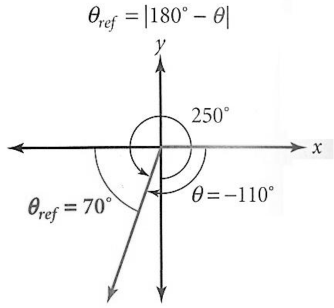
$\theta_{ref} = |180^\circ - 94^\circ| = 86^\circ$



$\theta_{ref} = |180^\circ - 245^\circ| = 65^\circ$



$Q_{ref} = | 360^\circ - \theta | = | 360 - 290^\circ | = 70^\circ$



$\theta_{reF} = \left|180^\circ - 250^\circ\right| = 70^\circ$

په دریمه ناحیه کې واقع ده. $\theta = -110^\circ$

د منفي -110° زاویې لپاره مثبته کوترمینل زاویهٔ 250° ده.

$\theta_{reF} = \left|180^\circ - 250^\circ\right| = 70^\circ$

همدارنګه

$\theta = 212^\circ \to \theta_{ref} = 32^\circ$ $\theta = 47^\circ \to \theta_{reF} = 47^\circ$ $\theta = -340^\circ \to \theta_{reF} = 20^\circ$

$\theta = 512^\circ \to \theta_{reF} = 28^\circ$ $\theta = 40^\circ \to \theta_{reF} = 40^\circ$ $\theta = 1112^\circ \to \theta_{reF} = 32^\circ$

$\theta = 124^\circ \to \theta_{reF} = 56^\circ$ $\theta = 105^\circ \to \theta_{reF} = 75^\circ$ $\theta = 270^\circ \to \theta_{reF} = 90$

$\theta = -135^\circ \to \theta_{reF} = 45^\circ$ $\theta = 1028^\circ \to \theta_{reF} = 52^\circ$ $\theta = 108^\circ \to \theta_{reF} = 72^\circ$

$\theta = 973^\circ \to \theta_{reF} = 73^\circ$ $\theta = 440^\circ \to \theta_{reF} = 80^\circ$ $\theta = -225^\circ \to \theta_{reF} = 45^\circ$

$\theta = 150^\circ \to \theta_{reF} = 30^\circ$

د ځينو اساسي مثلثاتي مطابقتونو لنډيز

1- د خارج قسمت مطابقتونه (Quotient Identities)

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

2....... (Reciprocal Identities)

$$\sin t = \frac{1}{\csc t} \qquad \cos t = \frac{1}{\sec t} \qquad \tan t = \frac{1}{\cot t}$$

$$\csc t = \frac{1}{\sin t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

3- فيثاغورثي مطابقتونه (Pythagoream Identities)

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

4- پريوديک مطابقتونه (Periodicity Identities)

$$\sin(t \pm 2\pi) = \sin t \qquad \cos(t \pm 2\pi) = \cos t \qquad \tan(t \pm \pi) = \tan t$$

5- د منفي زاويو مطابقتونه (Negative Angle Identities)

$$\sin(-t) = -\sin t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$

6- ....(Identities Involving $\pi - b$)

$$\sin t = \sin(\pi - t) \qquad \cos t = -\cos(\pi - t) \qquad \tan t = -\tan(\pi - t)$$

د پوښتنو ځوابونه

1- د 360^o- يا $2\pi-$ راديان مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل: د $360^\circ-$ د زاويې مثلثاتي نسبتونه:

$\sin(-360^\circ) = -\sin 360^\circ = 0$

$\cos(-360^\circ) = \cos(360^\circ) = 1$

$\tan(-360^\circ) = -\tan 360^\circ = 0$

$\cot(-360^\circ) = -\cot(360^\circ)$ (تعريف شوی نه دی)

$\sec(-360^\circ) = \sec(360^\circ) = 1$

$\csc(-360) = -\csc(360^\circ) = \frac{1}{0}$ (تعريف شوی نه دی)

2- د $45^\circ-$ يا $\frac{\pi}{4}-$ راديان او $30^\circ-$ او $60^\circ-$ زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړي.

حل :

$\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan(-45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$ $\cot(-45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$

$$\sec(-45^\circ) = \frac{1}{\cos(-45^\circ)} = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\csc(-45^\circ) = \frac{1}{\sin(-45^\circ)} = \frac{1}{-\sin 45^\circ} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ $\cos(-30^\circ) = \cos = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$

$$\sec(-30^\circ) = -\frac{1}{\cos(-30^\circ)} = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc(-30^\circ) = \frac{1}{\sin(-30^\circ)} = \frac{1}{-\sin 30^\circ} = -2$$

$\sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$ $\cot(-60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\sec(-60^\circ) = \frac{1}{\cos(-60^\circ)} = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$$

$$\csc(-60^\circ) = \frac{1}{\sin(-60^\circ)} = \frac{1}{-\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

3- د -90° يا $-\frac{\pi}{2}$ راديان زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

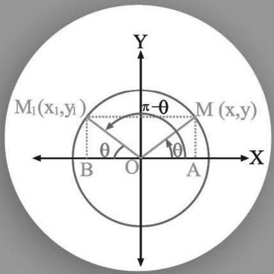
حل:

$\sin(-90^\circ) = -\sin 90^\circ = -1$ $\sec(-90^\circ) = \frac{1}{\cos 90^\circ}$ (تعريف شوی نه دی).

$\cos(-90^\circ) = \cos 90^\circ = 0$ $\csc(-90^\circ)\frac{1}{-\sin 90^\circ} = -1$

$\tan(-90^\circ) = -\tan 90^\circ$ تعريف شوی نه دی.

$\cot(-90^\circ) = -\cot 90^\circ = 0$



د هغه دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکې چې مجموعه یا توپیر یې 180°وي

د درسي کتاب (179)**مخ** **د لوست وخت**(1 **درسي ساعت**)

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	زده کوونکي باید ددې لوست په پای کې: • د θ د حاده زاویې او د ($180^\circ-\theta$)زاویې د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ په اړیکو وپوهېږي. • د θ د حاده زاویې او د ($180^\circ+\theta$) زاویې د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ په اړیکو وپوهیږي. • د θ د حاده زاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د ($180^\circ-\theta$) او د $(180^\circ+\theta)$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړای شي. • په دې پوه شي څرنګه چې د ($180^\circ-\theta$) زاویې په دویمه ضلعه په دویمه ناحیه کې واقع ده، نو $\sin(180^\circ-\theta)$ او $\csc(180^\circ-\theta)$ مثبت دي او نور مثلثاتي نسبتونه یې منفي دي. • پوه شي چې د $(180^\circ+\theta)$ زاویې دویمه ضلعه په دریمه ناحیه کې واقع ده، نو $\tan(180^\circ+\theta)$ او $\cot(180^\circ+\theta)$ مثبت او نور مثلثاتي نسبتونه یې منفي دي. • د مثلثاتي مسایلو په حل کې ددې زاویو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ د اړیکو اهمیت درک کړي.
د تدریس میتودونه	پوښتنې او ځوابونه، یو کسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارټ، او ...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	$\sin150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin30^\circ=\frac{1}{2}$ $\cos150^\circ=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin(135^\circ)=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin45=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\cos(135^\circ)=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ښکاره ده چې: $\sin135^\circ=\sin45^\circ$ $\sin130^\circ=\sin(180^\circ-50^\circ)=\sin50^\circ$

د لوست بهیر او فعالیتونه (28) **دقیقې**

په داسې حال کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، ښاغلي ښوونکي دې واضح کړي چې که د دوو زاویو مجموعه 180° وي، که یوه حاده زاویه θ وي، بله زاویه به $180-\theta$ وي، ځکه چې $180^\circ=\theta+(180^\circ-\theta)$ کیږي.

ښاغلي ښوونکي دې ثبوت کړي چې $\mathrm{O}\overset{\Delta}{A}M$ او $\mathrm{O}\overset{\Delta}{M_1}B$ مثلثونه سره مساوي دي او بیا دې د θ او $180^\circ-\theta$ زاویو د مثلثاتي نسبتونو اړیکي واضح کړئ.

زده کوونکي دې د $(\pi-\theta)$ یا $(180^\circ-\theta)$ د زاویې نور مثلثاتي نسبتونه په ګروپونو کې په لاس راوړي.

ښاغلي ښوونکي دې د θ او $(180^\circ+\theta)$ د زاویو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ د اړیکو د پیداکولو لپاره زده کوونکو ته واضح کړئ چې د $\mathrm{O}\overset{\Delta}{A}M$ او $\mathrm{O}\overset{\Delta}{B}M_1$ مثلثونه سره مساوي دي اودې زاویو د مثلثاتي نسپتونو ترمنځ د اړیکو له پیداکولو وروسته دې د (180) مخ لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي.

زده کوونکي دې د (181) مخ فعالیت سرته ورسوي او ښوونکي دې د شکل له مخې دویم مثال توضیح کړي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره دې ددې لوست د پوښتنو لومړی پوښتنه حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

ددې لوست له پوښتنو څخه دریمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د پوښتنو ځوابونه

1- د 225° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin 225^\circ=\sin(180^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 225^\circ=\cos(180^\circ+45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan 225^\circ=\tan(180^\circ+45^\circ)=\tan 45^\circ=1$$
$$\cot 225^\circ=\cot(180^\circ+45^\circ)=\cot 45^\circ=1$$
$$\sec 225^\circ=\sec(180^\circ+45^\circ)=-\sec 45^\circ=-\sqrt{2}$$
$$\csc 225^\circ=\csc(180^\circ+45^\circ)=-\csc 45^\circ=-\sqrt{2}$$

2- د 210° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړي.

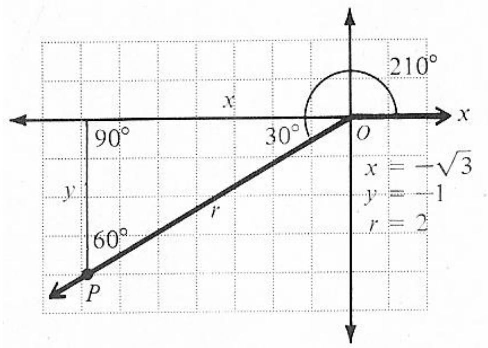
حل:

$$\sin(210^\circ)=\sin(180^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$
$$\cos(210^\circ)=\cos(180^\circ+30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan(210^\circ)=\tan(180^\circ+30^\circ)=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\cot(210^\circ) = \cot(180^\circ + 30^\circ) = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$

$\sec(210^\circ) = \sec(180^\circ + 30^\circ) = -\sec 30^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\csc(210^\circ) = \csc(180^\circ + 30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$



3- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot 150^\circ = \cot(180^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$

$\sec 150^\circ = -\sec(180^\circ - 30^\circ) = -\sec 30^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{2}$

$\csc 150^\circ = \csc(180^\circ - 30^\circ) = \csc 30^\circ = 2$

-4

$\cot\frac{3\pi}{4} = ?$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) -1

حل:

$\cot\frac{3\pi}{4} = \cot(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$

سم ځواب d دی.

-5

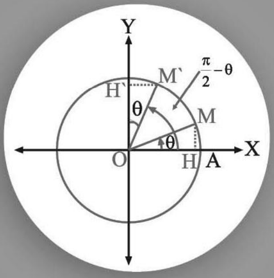
$\sec(225^\circ) = ?$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

حل:

$\sec(225^\circ) = \sec(180^\circ + 45^\circ) = -\sec 45^\circ = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

سم ځواب b دی.



د هغه دوو زاویو مثلثاتي نسبتونه چې مجموعه یا توپیر یې (90°) یا $\frac{\pi}{2}$ راډیانه وي

د درسي کتاب (183)مخ **د لوست وخت:** (1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	زده کوونکي باید ددې لوست په پای کې: • د θ د زاويې له جنسه د $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ زاويې د مثلثاتي نسبتونو د پيداکولو په طريقه وپوهيږي. • د هغه دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ په اړيکه وپوهيږي چې مجموعه او يا توپير يې 90° وي او د يوې زاويې مثلثاتي نسبتونه د بلې له جنسه پيدا کړای شي. • د مثلثاتي مسايلو په حلولو کې ددې اړيکو په اهميت پوه شي او دمثلثاتي موضوعګانو له زده کړې سره علاقه مند شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يو کسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو وروسته په داسې حال کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، د ورودي برخې د پوښتنو ځوابونه توضيح شي. څرنګه چې $90^\circ = 60^\circ + 30^\circ$ کيږي، نو $\sin 60 = \cos 30^\circ$ او څرنګه چې $90 + 60 = 150^\circ$ کيږي، نو. $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\cos 150^\circ = \cos(90^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 150^\circ = \tan(90^\circ + 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

د لوست بهير او فعاليتونه (28) دقيقې

ښاغلي ښوونکي دې د ورودي شکل د چارت له مخې توضيح کړي چې د $O\overset{\Delta}{H}M$ او $OH'M'$ مثلثونه سره مساوي دي. بيا دې د شکل له مخې د $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ زاويې مثلثاتي نسبتونه د θ حاده زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره توضيح کړي. ددې لوست د (183) مخ فعاليت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي او د يو ګروپ نماينده دې خپل کار نورو ته توضيح کړي، ښاغلي ښوونکي دې د 184 مخ لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي او د 184 مخ فعاليت دې زده کوونکي حل کړي، په شکل کې دې د هغو دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکه توضيح شي چې توپير يې 90° يا $\frac{\pi}{2}$ راډيانه وي او دويم مثال دې، د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

ددې لوست له پوښتنو څخه دویمه پوښتنه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

د دې لوست د پوښتنو دویمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د پوښتنو ځوابونه

1- د 135° درجو زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin(135^\circ) = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(135^\circ) = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(135^\circ) = \tan(90^\circ + 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$$

$$\cot(135^\circ) = \cot(90^\circ + 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\sec(135^\circ) = \sec(90^\circ + 45^\circ) = -\csc 45^\circ = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\csc(135^\circ) = \csc(90^\circ + 45^\circ) = \sec 45^\circ = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

2- د 150° درجو زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin 150^\circ = \sin(90^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \qquad \cos 150^\circ = \cos(90^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^\circ = \tan(90^\circ + 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 150^\circ = \cot g(90^\circ + 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 150^\circ = \sec(90^\circ + 60^\circ) = -\csc 60^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc 150^\circ = \csc(90^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

-3 $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = ?$

$a)\ \cos x \qquad b)\ \sin x \qquad c) -\cos x \qquad d) -\sin x$

حل:

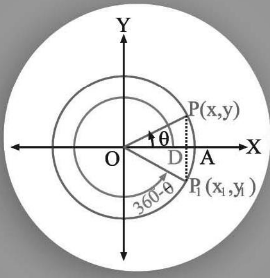
$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

-4 $\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = ?$

$a)\ \tan\theta \qquad b)\ -\tan\theta \qquad c) \cot\theta \qquad d) -\cot\theta$

حل:

$$\cot(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\tan\theta$$



د هغو زاویو مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکې چې

توپیر یا مجموعه یې 2π یا 360° وي

د درسي کتاب (187) **مخ** **د لوست وخت:** (1 **درسي ساعت**)

د زده کـــړې (پـــوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	زده کوونکې باید ددې لوست په پای کې: • د θ حاده زاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د $(360^\circ - \theta)$ زاویې د مثلثاتي نسبتونو په پیدا کولو وپوهیږي. • د کوټرمینل زاویو د مثلثاتي نسبتونو د پیدا کولو په طریقه وپوهیږي. • د هغو زاویو مثلثاتي نسبتونه چې په څلورمه ناحیه کې واقع دي، پیدا کړای شي. • د کوټرمینل زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړای شي. • د مثلثاتي مسایلو په حلولو کې ددې اړیکو اهمیت درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یو کسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او...
3- **درسي او مرستندویه مواد**	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	د لومړنیو فعالیتون له سرته رسولو وروسته د ورودي پوښتنې حل توضیح کړئ څرنگه چې په څلورمه ناحیه کې د زاویو cos او sec مثبت دي او نور پاتې څلور نسبونه یې منفي دي، نو: $\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$ $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$

د لوست بهیر او فعالیتونه (28) **دقیقې**

ښاغلي ښوونکی دې: په داسې حال کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، زده کوونکو ته د $O\overset{\Delta}{P}D$ او $O\overset{\Delta}{P_1}D$ مثلثونو مساویتوب ثبوت کړي.

بیا د θ د حاده زاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د $(360^\circ - \theta)$ زاویې مثلثاتي نسبتونو پیدا کول، زده کوونکو ته توضیح کړي.

د (187) مخ فعالیت دې زده کوونکي په گروپونو کې سرته ورسوي او خپل کار دې نورو ته توضیح کړي، بیا دې ښوونکی ددې لوست د (187) مخ لومړی مثال په شکل کې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي او د دې لوست د (188) مخ دویم فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي، بیا دې ښوونکي په شکل کې د کوټرمینل زاویو مثلثاتي نسبتونو پیدا کول زده کوونکو ته توضیح کړي او د (189) مخ دویم، دریم، او څلورم مثال دې حل شي، څه وخت چې د (190) مخ پنځم مثال حل شي، د (191) فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

د زده کړې پیاوړیتا (7) **دقیقې**

ددې لوست د (192) مخ لومړۍ پوښتنه دې حل شي.

د لوست ارزونه (5) دقیقې

ددې لوست له پوښتنو څخه دویمه پوښته له زده کوونکو وکړئ.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- د -3660° زاويې مثلثاتي نسبتونه عبارت دي له:

څرنگه چې:

$$-3660^{\circ}+60=-3600^{\circ}=-10\cdot 360^{\circ}$$

$$\sin(-3660^{\circ})=-\sin 60^{\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-3660^{\circ})=\cos 60^{\circ}=\frac{1}{2}$$

$$\tan(-3660^{\circ})=-\tan 60^{\circ}=-\sqrt{3}$$

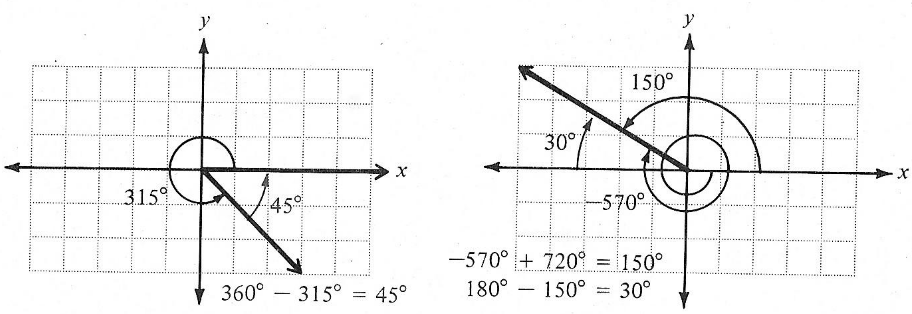
$$\cot(-3660^{\circ})=-\cot 60^{\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- .

$$\sin\frac{7\pi}{3}=\sin(2\pi+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{7\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{3}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

- . $\tan(315^{\circ})$, $\cos(-570^{\circ})$ او $\cot 600^{\circ}$ په لاندې ډول دي.



څرنگه چې د 315° زاويې دويمه ضلع په څلورمه ناحيه کې واقع ده، نو د $\tan 315^{\circ}$ علامه منفي ده.

$$\tan 315^{\circ}=-\tan 45^{\circ}=-1$$

ترټولو کوچنۍ زاويه چې له -570° سره کوټرمينل وي، عبارت ده له: $-570^{\circ}+720^{\circ}=150^{\circ}$

څرنگه چې د 150° زاويې دويمه ضلعه په دويمه ناحيه کې واقع ده، ددې زاويې لپاره يې اړوند زاويه پيدا کوو.

$$180^{\circ}-150^{\circ}=30^{\circ}$$

$$\cos(-570^{\circ})=-\cos 30^{\circ}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$600^{\circ}-360^{\circ}=240^{\circ}$$

$$240^{\circ}-180^{\circ}=60^{\circ}$$

$$\cot 600^{\circ}=\cot 60^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

د راکړل شوو زاویو ځیني مثلثاتي نسبتونه په لاندې ډول دی:

$\sin 135^\circ$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos 120^\circ$ $-\frac{1}{2}$	$\tan 150^\circ$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cos 210^\circ$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 225^\circ$ 1	$\sin 300^\circ$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan 330^\circ$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sin 0^\circ$ 0	$\cos 0^\circ$ 1
$\sin 90^\circ$ 1	$\cos 90^\circ$ 0	$\tan 270^\circ$ تعریف شوی نه دی
$\cos 180^\circ$ -1	$\tan 90^\circ$ تعریف شوی نه دی	$\sin(-90^\circ)$ -1
$\tan(-180^\circ)$ 0	$\sin 720^\circ$ 0	$\cos 1080^\circ$ 1
$\sin 495^\circ$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin(-45^\circ)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos(-135^\circ)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin(-405^\circ)$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\tan(-150^\circ)$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan(-30^\circ)$ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cos 810^\circ$ 0	$\tan 390^\circ$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\tan 780^\circ$ $\sqrt{3}$
$\sec 120^\circ$ -2	$\cot 150^\circ$ $-\sqrt{3}$	$\csc(-660^\circ)$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\cot(-765^\circ)$ -1	$\sec 405^\circ$ $\sqrt{2}$	$\csc 1140^\circ$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

د پوښتنو ځوابونه

1- د 480° او 390° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin 480^\circ = \sin(360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 480^\circ = \cos 120^\circ = \cos(180 - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 480^\circ = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 480^\circ = \frac{1}{\cos 480^\circ} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\csc 480^\circ = \frac{1}{\sin 480^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 390^\circ = \cos(360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 390^\circ = \tan(360^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 390^\circ = \cot(360^\circ + 30^\circ) = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sec 390^\circ = \frac{1}{\cos 390^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc 390^\circ = 2$$

2- د 600° او 300° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د لومړی جز حل:

$$\sin 600^\circ = \sin(360^\circ + 240^\circ) = \sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 600^\circ = \cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 600^\circ = \tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 600^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 600^\circ = -2$$

$$\csc 600^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cot 300^\circ = \cot(360^\circ - 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 300^\circ = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 300^\circ = \cos ec 60^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

3- د (1830°) او ($1095^\circ\ 20'$) زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د لومړی جز حل:

$$1830^\circ = (5 \cdot 360^\circ + 30^\circ)$$

$$\sin(1830^\circ) = \sin(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos(1830^\circ) = \cos(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(1830^\circ) = \tan(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot(1830^\circ) = \sqrt{3}$$

$$\sec(1830^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc(1830^\circ) = \csc 30^\circ = 2$$

د دویم جز حل:

$$\sin(1095^\circ\ 20') = \sin(3 \cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \sin 15^\circ\ 20' = (0.2644)$$

$$\cos(1095^\circ\ 20') = \cos(3 \cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \cos 15^\circ\ 20' = 0.9644$$

$$\tan(1095^\circ\ 20') = \tan(3 \cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \tan 15^\circ\ 20' = 0.2742$$

$$\cot(1095^\circ\ 20') = \cot(3 \cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \cot 15^\circ\ 20' = 3.6470$$

$\sec(1095^\circ\ 20') = \sec(3\cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \sec 15^\circ\ 20' = 1.037$

$\csc(1095^\circ\ 20') = \csc(3\cdot 360^\circ + 15^\circ\ 20') = \csc 15^\circ\ 20' = 3.782$

4- د $\frac{25\pi}{6}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې:

$\frac{25\pi}{6} = 750^\circ = (2\cdot 360^\circ + 30^\circ)$ یا $\frac{25\pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{6} = 2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}$

نو:

$\sin\frac{25\pi}{6} = \sin(2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\qquad \cos\frac{25\pi}{6} = \cos(2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{25\pi}{6} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad \cot\frac{25\pi}{6} = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ $\qquad \sec\frac{25\pi}{6} = \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\csc\frac{25\pi}{6} = \csc\frac{\pi}{6} = 2$

5- د $\frac{5\pi}{3} = 300^\circ$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$\sin\frac{5\pi}{3} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \cos\frac{5\pi}{3} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\tan\frac{5\pi}{3} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$ $\qquad \cot\frac{5\pi}{3} = \cot(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sec\frac{5\pi}{3} = \sec(2\pi - \frac{\pi}{3}) = \sec\frac{\pi}{3} = 2$ $\qquad \csc\frac{5\pi}{3} = \csc(2\pi - \frac{\pi}{3}) = -\csc\frac{\pi}{3} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

6- د $\frac{41\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$ او $\frac{3\pi}{4}$ زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

لومړی جز:

$(\frac{41\pi}{6})^R = 1230^\circ = (3\cdot 360^\circ + 150)$

$\sin(\frac{41\pi}{6})^R = \sin(2\cdot 3\pi + \frac{5\pi}{6}) = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{41\pi}{6} = \cos(2\cdot 3\pi + \frac{5\pi}{6}) = \cos\frac{5\pi}{6} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\frac{41\pi}{6} = \tan(2\cdot 3\pi + \frac{5\pi}{6}) = \tan\frac{5\pi}{6} = \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot\frac{41\pi}{6} = -\cot\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$

$\sec\frac{41\pi}{6} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\csc\frac{41\pi}{6} = \csc\frac{\pi}{6} = 2$

دویم جز:

$$\sin\frac{4\pi}{3}=\sin(\pi+\frac{\pi}{3})=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos(\pi+\frac{\pi}{3})=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{4\pi}{3}=\tan(\pi+\frac{\pi}{3})=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$
$$\cot\frac{4\pi}{3}=\cot(\pi+\frac{\pi}{3})=\cot\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\sec\frac{4\pi}{3}=\sec(\pi+\frac{\pi}{3})=-\sec\frac{\pi}{3}=-2$$
$$\csc\frac{4\pi}{3}=\csc(\pi+\frac{\pi}{3})=-\csc\frac{\pi}{3}=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

دريم جز:

$$\sin\frac{3\pi}{4}=\sin(\pi-\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos\frac{3\pi}{4}=\cos(\pi-\frac{\pi}{4})=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan\frac{3\pi}{4}=\tan(\pi-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$
$$\cot\frac{3\pi}{4}=\cot(\pi-\frac{\pi}{4})=-\cot\frac{\pi}{4}=-1$$
$$\sec\frac{3\pi}{4}=\sec(\pi-\frac{\pi}{4})=-\sec\frac{\pi}{4}=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$
$$\csc\frac{3\pi}{4}=\csc(\pi-\frac{\pi}{4})=\csc\frac{\pi}{4}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

7- د -300° ، 780° او 420° زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

لومړی جز:

$$\sin(-300^\circ)=\sin(-360+60)=\sin\left[-(360-60)\right]=\sin(360^\circ-60^\circ)=\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos(-300^\circ)=\cos\left[-(360-60)\right]=\cos(360-60)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$
$$\tan(-300^\circ)=\tan\left[-(360^\circ-60^\circ)\right]=-\tan(360^\circ-60^\circ)=(-\tan 60^\circ)=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$
$$\cot(-300^\circ)=\cot\left[-(360^\circ-60^\circ)\right]=-\cot(360-60)=-(-\cot 60^\circ)=\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\sec(-300^\circ)=\sec\left[-(360^\circ-60^\circ)\right]=\sec(360^\circ-60^\circ)=\sec 60^\circ=2$$
$$\csc(-300^\circ)=\csc\left[-(360-60)\right]=-\csc(360^\circ-60^\circ)=-(-\csc 60^\circ)=\csc 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

دويم جز:

$$\sin 780^\circ=\sin(2\cdot 360+60)=\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 780^\circ=\cos(2\cdot 360+60)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$
$$\tan 780^\circ=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$
$$\cot 780^\circ=\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\sec 780^\circ=\sec 60^\circ=2$$

$$\csc 780^\circ = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

دريم جز:

$$\sin 420^\circ = \sin(360+60) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 420^\circ = \cos(360+60) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 420^\circ = \tan(360+60) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 420^\circ = \cot(360+60) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 420^\circ = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 420^\circ = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

8- $\cos(-3\pi) = ?$

$a)\ 1$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\ 0$ $\quad d)\ \frac{1}{2}$

حل:

$$\cos(-3\pi) = \cos(-2\pi - \pi) = \cos[-(2\pi + \pi)] = \cos(2\pi + \pi) = \cos \pi = -1$$

يا:

$$\cos(-3\pi) = \cos(-\pi) = \cos \pi = -1$$

(د b جز سم دی).

9- $\cos(-15\pi) = ?$

$a)1$ $\quad b) -1$ $\quad c) 0$ $\quad d)$ درې واړه سم نه دي

حل:

$$\cos(-15\pi) = \cos(-2\cdot 7\pi - \pi) = \cos[-(2\cdot 7\pi + \pi] = \cos(2\cdot 7\pi + \pi) = \cos \pi = -1$$

يا :

$$\cos(-15\pi) = \cos(-\pi) = \cos \pi = -1$$

د b جز سم دی.

10- $\sin(-1110^\circ) = ?$

$a)\frac{1}{2}$ $\quad b) -\frac{1}{2}$ $\quad c) \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad d) -\frac{\sqrt{3}}{3}$

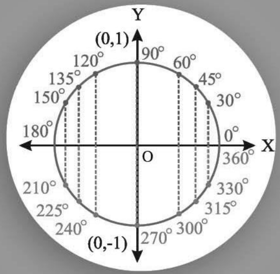
حل:

$$\sin(-1110^\circ) = \sin(-3\cdot 360 - 30) = \sin[-(3\cdot 360 + 30)] = -\sin(360+30) = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$$

يا:

$$\sin(-1110^\circ) = \sin(-30) = -\frac{1}{2}$$

د b سم دی.



د مثلثاتي تابعګانو ګرافونه

د درسي کتاب (193) **مخ** **د لوست وخت** (2 **درسي ساعتونه**)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د $y = \sin x$ او $y = \cos x$ د تابعگانو د تعریف ناحیه او Range وپیژني. • د $y = \sin x$ او $y = \cos x$ د تابعگانو پریود او لمن وپیژني. • د متناوبو تابعگانو تعریف زده کړي. • د $\sin x$ او $\cos x$ د ګرافونو د رسمولو طریقه زده کړي. • د $\sin x$ او $\cos x$ د تابعگانو په تحول وپوهیږي او ګرافونه یې رسم کړای شي. • د x او y له محورونو سره ددې ګرافونو د تقاطع نقطې پیدا کړای شي، اصغري او اعظمي نقطې یې وښودلای شي. • د مثلثاتي مسایلو په حل کې ددې تابعګانو د ګرافونو د رسمولو اهمیت درک کړي او زده کړې ته یې علاقه مند شي .
د تدریس میتودونه	پوښتنې او ځوابونه، یو کسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضیح (5 **دقیقې**)	د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو وروسته، د ورودي شکل په چارت کې دې ورودي پوښتنې توضیح شي چې د $\sin x$ او $\cos x$ د تابعګانو پریود 2π او د تعریف ناحیه Domain یې ټول حقیقي عددونه دي.

د لوست بهیر او فعالیتونه (28) **دقیقې**

ښاغلی ښوونکي دې په شکل کې زده کوونکو ته ددې تابعګانو د تعریف او قیمتونو ناحیې توضیح کړي چې $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$ یا ددې تابعګانو *Range* د $[-1,1]$ انتروال دی.

د (193) مخ پوښتنو ځوابونه دې زده کوونکي ووایي او ښاغلی ښوونکي دې لارښوونه او مرسته وکړي، زده کوونکو ته دې دا خبره واضح شي چې کومو تابعګانو ته متناوبې تابعګانې وایي. ښاغلی ښوونکي دې د درجې ا و راډیان په حساب د $\sin x$ ګرافونه د درسي کتاب په شان پر تخته رسم او توضیح کړي. چې دا ګراف د x محور په کومو نقطو کې قطع کوي او هم د $\sin x$ د تابع ګراف په کومو ا نتروالو کې متزاید او په کومو انتروالو کې متناقص دی.

د (196) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي، لومړی او دویم مثال دې ښوونکي د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي، همدارنګه په دریم مثال کې دې د $\sin x$ او $\cos x$ د تابعګانو پریود او لمن زده کوونکو ته توضیح شي.

د زده کونکو په ونډې اخیستنې سره دې ښوونکي د څلورم مثال د تابع ګراف رسم کړي او هم د $\cos x$ د تابع ګراف ددې له

تحول سره د درجې او راډیان په حساب رسم کړي، هم ددې تابع د *range* قیمتونه په شکل کې وروښودل شي، د (201) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي او د(201) مخ مثال دې د زده کوونکو په وړاندې اخیستنې سره ښاغلی ښوونکي حل کړي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

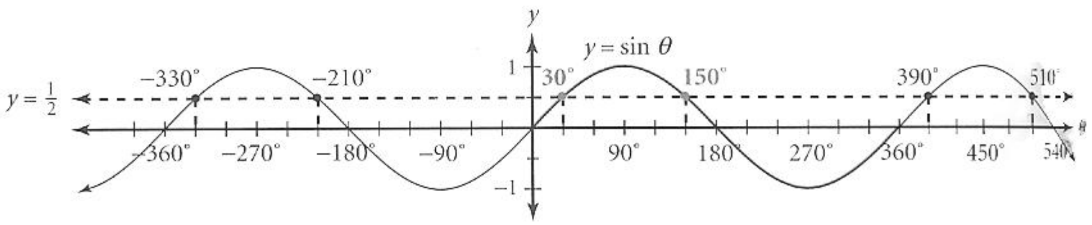
ددې لوست له پوښتنو څخه د لومړۍ پوښتنې اړونده $F(t)=\sin t$ تابع ګراف د $[2\pi, 6\pi]$ په انټروال کې رسم کړئ.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

د لومړۍ پوښتنې دویمه برخه له زده کوونکو وپوښتئ.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د $[-360^\circ, 540^\circ]$ په انټروال کې د $510, 390^\circ, 150^\circ, 30^\circ, -210^\circ, -330^\circ = \theta$ ، قیمتونو لپاره $y=\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ لاندې شکل وګورئ:



1- د F تابع ته متناوبه تابع ویل کیږي په دې شرط چې د T عدد د صفر خلاف موجود شي چې لومړی باید $x\in D_F$, $x+T$ او $x-T$ هم د F تابع د تعریف په ناحیه کې شامل وي.

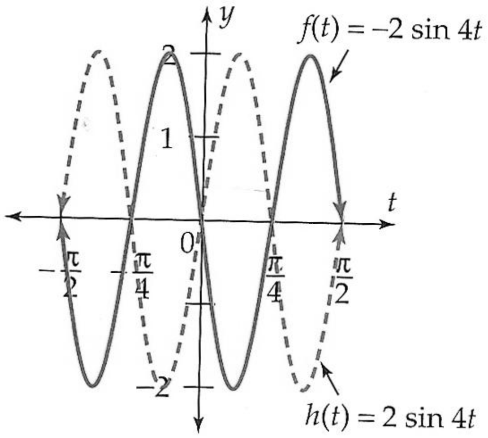
دویم دا چې $F(x+T)=F(x)$ وي، تر ټولو کوچنی مثبت عدد، لکه: T ته چې په دې رابطه کې صدق کوي، د F د تابع پریود یا اصلي تناوب وایي. که T د یوې تابع د تناوب دوره وي، نو $-T$ هم ددې تابع د تناوب دوره ده او څرنګه چې پوهیږو چې $\sin(2k\pi+x)=\sin x$ او $\cos(2k\pi+x)=\cos x$ دی، نو د $\sin$ او $\cos$ تابعګانې متناوبې دي او 2π تر ټولو کوچنی مثبت عدد دی چې په پورتنیو رابطو کې صدق کوي، د مثال په ډول د $F(x)=\sin ax$ تابع د تناوب دوره یا پریود په لاندې ډول په لاس راځي.

$$F(x+T)=F(x) \Rightarrow \sin a(x+T)=\sin ax$$
$$\sin(ax+aT)=\sin ax$$

ددې لپاره چې پورتنی مساوات صدق وکړي، نو باید $aT=2K\pi$ وي چې K یو تام عدد دی او په نتیجه کې $T=\dfrac{2K\pi}{a}$ کیږي، نو په دې اساس د F تابع یوه متناوبه تابع ده او د تناوب اصلي دوره یې $\dfrac{2\pi}{|a|}$ ده

همدارنګه د $F(x)=\cos at$ تابع د تناوب دوره هم $\dfrac{2\pi}{|a|}$ ده.

د لمن یا (Amplitude): که $a\neq 0$ او $b>0$ وي، د $F(t)=a\sin bt$ او $F(t)=a\cos bt$ د تابعګانو لمن $|a|$ او پریود یې $\dfrac{2\pi}{b}$ دی.



د مثال په ډول د $F(t) = -2\sin 4t$ د تابع پریود او لمن عبارت ده له $|a| = |-2| = 2$ او پریود یې $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ دی او د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ په انتروال کې ددې تابع ګراف رسم شوی دی.

2- په لنډ ډول ویلای شوو چې که چیرې یوه تابع په مساوي فاصلو کې په منظم او متوالی ډول تکرار شي، داسې تابع متناوبه تابع ا و د تکرار شوو فاصلو اوږدوالي ته د تناوب دوره وايي د مثال په ډول د $g(x) = \sin x$ تابع د $[2\pi, 4\pi]$، $[4\pi, 6\pi]$، $[0, 2\pi]$ او ... انټروالو کې تکراریږي، نو د تناوب دوره یې 2π ده.

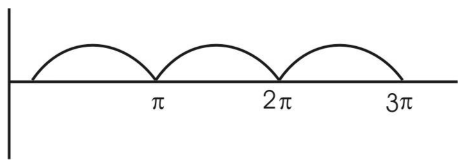
3- پام مو وي چې ځینې وختونه یوه تابع متناوبه وي، لیکن د تناوب اصلي دوره نه لري، د مثال په ډول $f(x) = 3$.

4- که د T عدد د F تابع د تناوب اصلي دوره وي، د F د تناوب هره بله دوره د T عدد طبیعي مضرب دی.

د تابع د اصلي تناوب دورې د پیداکولو لپاره یوه طریقه، شهودې طریقه او د ګراف رسمول دي.

د مثال په ډول د $F(x) = |\sin x|$ د تابع د تناوب اصلي دوره په لاندې ډ ول په لاس راځي.

لیدل کیږي چې ددې تابع ګراف د $[0, \pi]$، $[\pi, 2\pi]$ او $[2\pi, 3\pi]$ او... انټروالو کې تکراریږي، نو ددې تابع د تناوب اصلي دوره (π) ده.



دویمه طریقه: د ریاضیکي طریقې په اساس $F(x+T) = F(x)$ له مساوات څخه د T قیمت په لاس راوړو چې اصلي پریود یې دی.

مثال: د $F(x) = \cos x$ د تناوب اصلي دوره عبارت ده له:

$$F(x+T) = \cos(x+T)$$
$$F(x) = \cos x$$
$$F(x+T) = F(x) \Rightarrow \cos(x+T) = \cos x = \begin{cases} x+T = 2K\pi + x, & T = 2K\pi, K \in z \\ x+T = 2k\pi - x \end{cases}$$
$$T = 2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi..........$$

که چیرې k ته د طبیعي عددونو قیمتونه ورکړو، نو ددې تابع د تناوب اصلي دوره 2π کیږي.

5- که T د F د تابع د تناوب اصلي دوره وي، نو د $F(ax+b)$ تابع هم متناوبه ده او د تناوب دوره یې $T' = \frac{T}{|a|}$ یا $T_{F(ax+b)} = \frac{T_{F(x)}}{|a|}$ دی.

مثال: که د $F(2x)$ د تابع د تناوب اصلي دوره 3 عدد وي، د $y = F(-3x+1)$ د تابع د تناوب اصلي دوره کوم عدد دی؟

$$T_{F(2x)} = \frac{T_{F(x)}}{2} \Rightarrow 3 = \frac{T_{F(x)}}{2} \Rightarrow T_{F(x)} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$T_{F(-3x+1)}=\frac{T_{F(x)}}{|-3|}=\frac{6}{3}=2$$

نو د $F(-3x+1)$ د تابع د تناوب اصلي دوره د (2) عدد دی.

که 5 تر ټولو کوچنی مثبت عدد وي چې د $F(x+5)=\frac{1}{F(x)}$ رابطه صدق کړي، نو د F د تناوب دوره عبارت ده له:

$$F(x+5+5)=\frac{1}{F(x+5)}\Rightarrow F(x+10)=\frac{1}{F(x+5)}$$

څرنګه چې $\frac{1}{F(x+5)}=F(x)$ ده، نو $F(x+10)=F(x)$ کیږي.

نو د F د تابع د تناوب اصلي دوره د 10 عدد دی.

لنډیز:

د $F(x)=\sin(ax+b)$ تابع د تناوب اصلي دوره $T=\frac{2\pi}{|a|}$ ده.

د $F(x)=\cos(ax+b)$ تابع د تناوب اصلي دوره $T=\frac{2\pi}{|a|}$ ده.

د $F(x)=\tan(ax+b)$ تابع د تناوب اصلي دوره $T=\frac{\pi}{|a|}$ ده.

د $F(x)=\cot(ax+b)$ تابع د تناوب اصلي دوره $T=\frac{\pi}{|a|}$ ده.

- که د F د تناوب دوره د T عدد وي، نو د $g(x)=aF(x)+b$ او $(a\neq 0), g(x)=\frac{a}{F(x)}$ تابعګانو د تناوب دوره هم د T عدد دی.

د $\sin x$ او $\cos x$ د تابعګانو د ګرافونو د رسمولو لپاره باید لاندې مرحلې په نظر کې ونیسو.

1- پریود په لاس راوړئ $(\frac{2\pi}{b})$ او د x پر محور د صفر او $\frac{2\pi}{b}$ نقطې وټاکئ.

2- له صفر څخه تر $\frac{2\pi}{b}$ پورې انټروال په څلورو مساوي برخو وویشئ.

3- هغه نقطې وټاکئ چې ګراف په کې د x محور قطع کوي.

تابع	ګراف د x محور قطع کوي.
$y=a\sin bx$	د $0,\frac{\pi}{b}$ او $\frac{2\pi}{b}$ نقطو کې (د پیل نقطه، د منځ نقطه، د انټروال د پای نقطه)
$y=a\cos bx$	د $\frac{\pi}{2b},\frac{3\pi}{b}$ نقطو کې (د انټروال په $\frac{1}{4}$ برخه او $\frac{3}{4}$ برخه کې)

4- د ګراف اعظمي او اصغري ټکي وټاکئ.

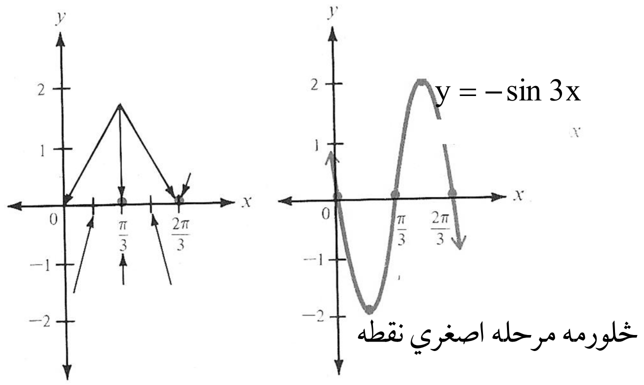
تابع	یوه اعظمي نقطه لري کله چې x مساوي وي په:
$y=a\sin bx$	$\frac{\pi}{2b}$ $(a>0)$ یا $\frac{3\pi}{b}$ د $a<0$ لپاره
$y=a\cos bx$	0 او $\frac{\pi}{2b}$ ده، د $a>0$ د یا د $\frac{\pi}{b}$ د $a<0$ لپاره.

5- په جدول کې څو نورې نقطې هم پیدا کړئ او ګراف یې رسم کړئ.

6- د اړتیا په اساس ښې او کیڼې خواته نور پیریودونه علاوه کړئ او ګراف یې رسم کړئ.

مثال: د $y=-2\sin 3x$ او $y=3\cos\frac{1}{2}x$ او $y=3\cos 2\theta+1$ د تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

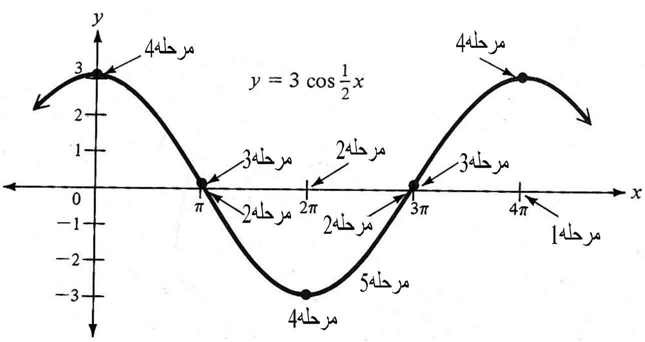
د $y=-2\sin 3x$ پریود $\frac{2\pi}{3}$ دی او لمن (amplitude) یې $|-2|$ده، د پورتنیو مرحلو په پام کې نیولو سره یې ګراف رسم کړئ.

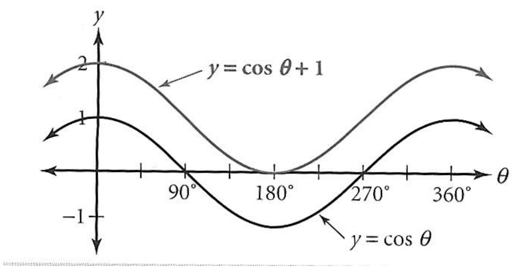


دویمه مرحله انټروال په څلورو مساوي برخو وویشئ.

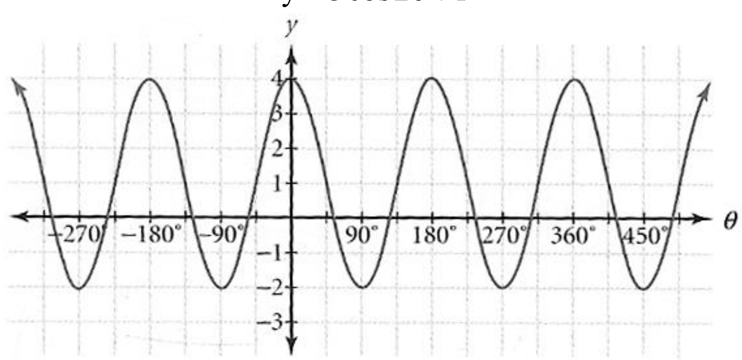
د $y=3\cos\frac{1}{2}x$ د تابع پریود $4\pi=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}$ دی او د ګراف د رسمولو مرحلې یې په لاندې شکل کې لیدل کیږي.

د $y=\cos\theta$ ، $y=\cos\theta+1$ او $y=3\cos 2\theta+1$ د تابعګانو ګرافونه په لاندې شکل کې وګورئ.





$y=3\cos 2\theta+1$

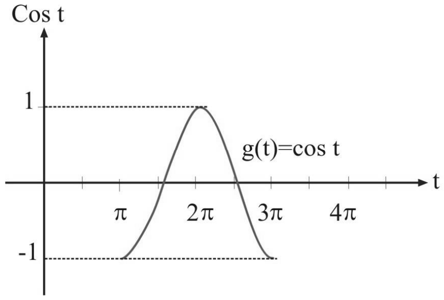


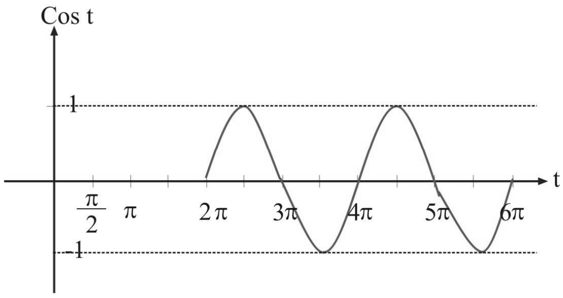
د پوښتنو ځوابونه

1- د لاندینیو تابعگانو گرافونه په راکړل شوو انټروالو کې رسم کړئ

$a)\ f(t)=\sin t\ :[2\pi,6\pi]$ $\qquad b)\ g(t)=\cos t:[\pi,3\pi]$

θ	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$\cos\theta$	-1	0	1	0	-1





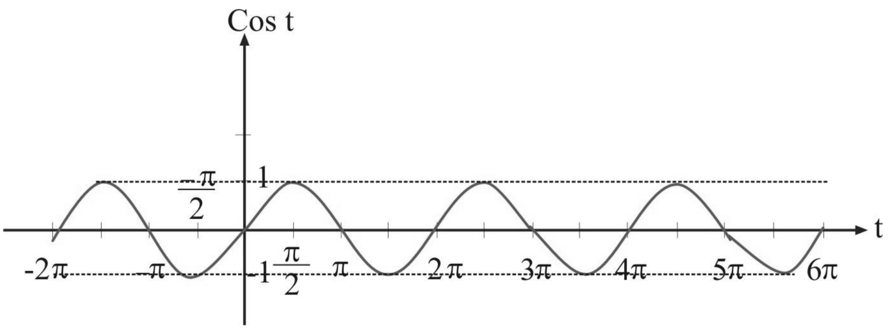
θ	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π	$\frac{11\pi}{2}$	6π
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

2- د t دکومو قیمتونو لپاره د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې $\sin t=1$ دی؟

حل:

t	-2π	$\frac{-3\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π	$\frac{11\pi}{2}$	6π
$\sin t$	0	1	0	1	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

په پورتني انټروال کې د $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2})$ قیمتونو لپاره د $\sin t$ قیمت له 1 سره مساوي دی.

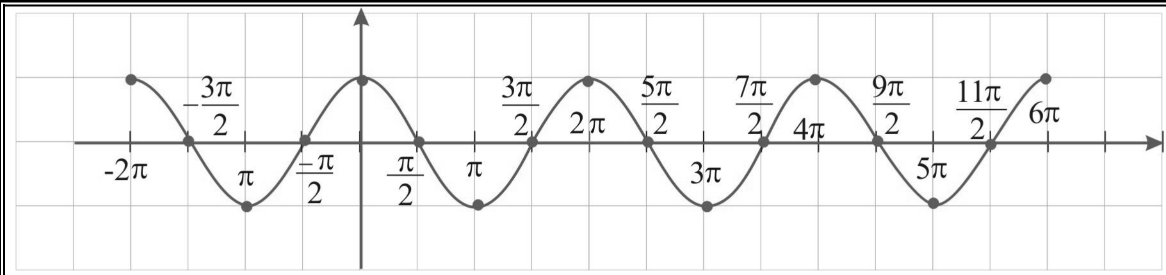


3- د t دکوم قیمت لپاره د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې $\cos t=0$ دی؟

حل:

t	-2π	$\frac{-3\pi}{2}$	$-\pi$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π		
$\cos t$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1		

t	$\frac{11\pi}{2}$	6π
$\cos t$	0	1

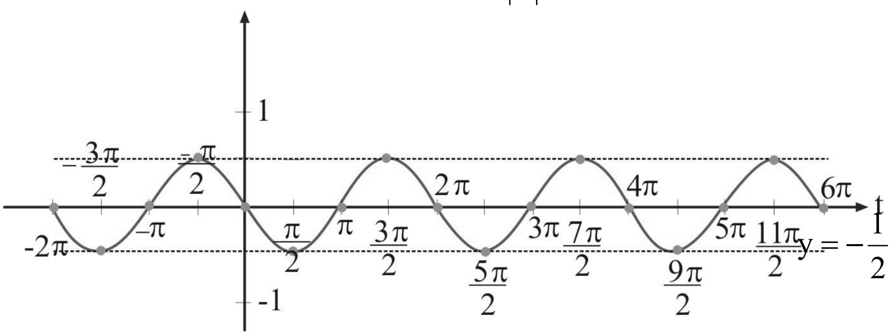


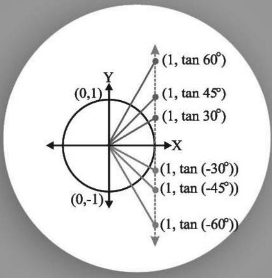
د $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}\right)$ قیمتونو لپاره په پورتني انټروال کې د $\cos t$ قیمت له صفره سره مساوي دی.

4- د $g(t) = -\frac{1}{2}\sin t$ تابع گراف د $[-2\pi, 6\pi]$ په انټروال کې رسم کړئ.

t	-2π	$-3\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π	$5\frac{\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π	$11\frac{\pi}{2}$	6π
$\sin t$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$\frac{1}{2}\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

د $y = -\frac{1}{2}\sin t$ د تابع پریود د 2π او لمن یې $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ ده .





د ټانجانټ د تابع ګراف

د درسي کتاب (203) **مخ** **د لوست وخت**(1 **درسي ساعت**)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د $f(t)=\tan$ تابع دګراف د رسمولو طريقه زده کړي. • د $f(t)=\tan t$ د تابع د تعريف او قيمتونو ناحيې وپيژني. • په دې پوه شي چې د ټانجانټ تابع د هغو زاويو لپاره چې cos يې صفر وي تعريف شوي نه ده. • د ټانجانټ د تابع عمودي مجانبونه وپيژني. • ددې تابع پريود وپيژني او وپوهيږي چې دا تابع يوه طاقه او متزايده تابع ده. • ددې تابع ګراف رسم کړای شي او تحول يې درک کړي. • ددې تابع عمودي مجانبونه رسم کړای شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې ددې تابع د خاصيتونو اهميت درک کړي.
د تدريس ميتودونه	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنيو فعاليتونه څخه وروسته د ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ او ددې پوښتنې ځواب دا دی چې هود تانجانت تابع يوه متزايده تابع ده.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**

ښاغلی ښوونکي دې د ورودي شکل زده کوونکو ته توضيح کړي او د چارت له مخې دې د ټانجانت تابع ګراف ورته وښودل شي، هغه زاويې چې cos يې صفر وي، د tan تابع په هغه قيمتونو کې عمودي مجانبونه لري، لکه: د $\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}$ يا ..... $\frac{-\pi}{2},-\frac{3\pi}{2},-\frac{5\pi}{2}$ او داسې نورې زاويې چې د tan د تابع د تعريف په ناحيه کې شاملې نه دي يا د هغو زاويو لپاره چې د $\frac{\pi}{2}$ طاق مضرب وي، $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ او يا $k\pi+\frac{\pi}{2}$ وي، دا تابع په کې تعريف شوي نه ده.

ددې تابع تحول په جدول او شکل کې واضح کړئ، تر څو زده کوونکي درک کړي چې د tan تابع هر وخت متزايده تابع ده او هم د طاقې تابع د تعريف په اساس $(\tan(-t)=-\tan(t))$ دا هم درک کړي چې دا تابع يوه طاقه تابع ده ددې تابع ګراف د درجې په حساب هم رسم کړئ.

د (205) مخ مثال دې محترم ښوونکي د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل او په شکل کې هغه نقطې چې د tan قيمت په کې (1-) دی، وروښودل شي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

ددې لوست له پوښتنو څخه لومړۍ پوښتنه حل کړئ.

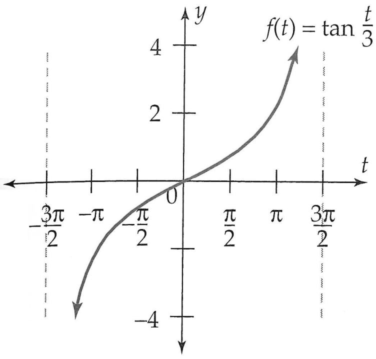
د لوست ارزونه: (5) دقیقې

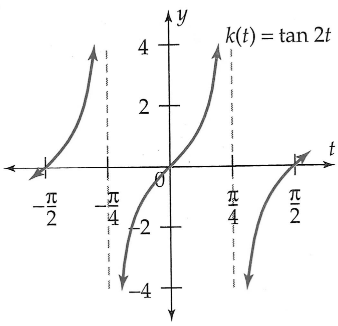
د لوست له لنډیز څخه وروسته له پوښتنو څخه دریمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- د $\mathrm{F(t)=\tan(bt)}$ که $b>0$ وي د b په اندازه له $-\frac{\pi}{2}$ څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې مکمل دورونه جوړوي ددې تابع پریود $\frac{\pi}{b}$ دی.

د مثال په ډول د $F(t)=\tan 2t$ د تابع پریود $\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ دی چې له $-\frac{\pi}{4}$ څخه تر $\frac{\pi}{4}$ پورې یو مکمل دور جوړوي او د $\mathrm{F(t)=\tan\frac{t}{3}}$ د تابع پریود $\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi$ دی. ددې تابعګانو ګرافونونه وګورئ:





د مثال په ډول د $F(x)=\tan(ax)$ د تابع د تناوب دوره یا پریود عبارت دی له:

$$F(x+T)=F(x)=\tan a(x+T)=\tan(ax)$$

$$\tan(ax+aT)=\tan(ax)$$

ددې لپاره چې پورتنې مساوات صدق وکړي، باید $aT=K\pi$ وي چې په نتیجه $T=\frac{K\pi}{a}$ کیږي چې ددې تابع اصلي پریود $\frac{\pi}{a}$ دی.

- په لنډ ډول د $y=a\tan bx$ د تابع د ګراف د رسمولو مرحلې په یو پریود کې چې $b>0$ وي، په لاندې ډول دي:

1- پریود $\frac{\pi}{b}$ پیدا کړئ.

2- د x پر محور له صفر پیل وکړئ او د پریود د نیمایي په اندازه دوه انټروالونه ښي او کیڼې خواته وټاکئ.

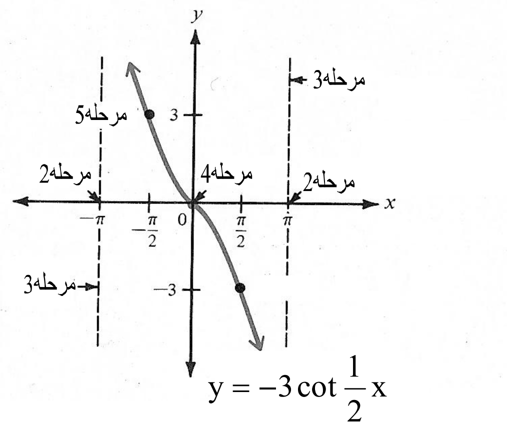
3- د دویمې مرحلې دا انټروال په اخرنیو نقطو کې د ټکو ، ټکو په واسطه عمودي مجانبونه رسم کړئ.

4- د $(0,0)$ نقطه په نښه کړئ.

5- د اړتیا په اساس یو څو نورې نقطې هم علاوه کړئ او ګراف یې رسم کړئ.

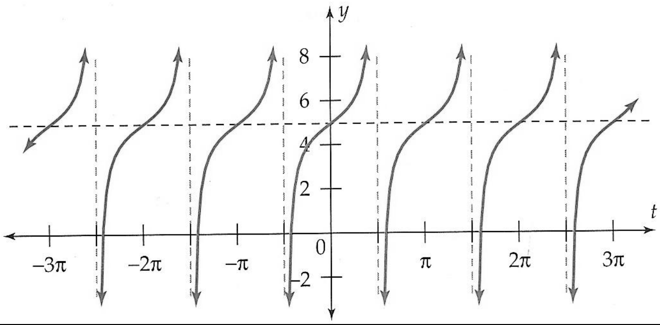
6- ښي او کیڼې خواته د اړتیا په اساس نور پریودونه علاوه کړئ.

د مثال په ډول د $y=-3\cot\frac{1}{2}x$ تابع گراف په لاندې شکل کې ښودل شوي دی



مثال: د $h(t)=\tan t+5$ د تابع گراف د $[-3\pi,3\pi]$ په انټروال کې په لاندې ډول دی .

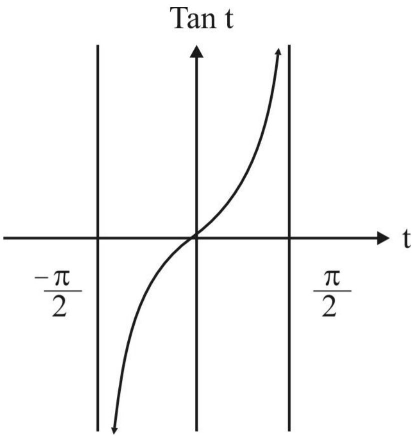
د تابعگانو له بحث څخه پوهیږي، د $F(t)=\tan t$ د تابع گراف د (5) واحدونو په اندازه پورته خواته انتقال شوی دي.



د پوښتنو ځوابونه

1- د t د زاویې په کوم قیمت د $\tan(t)$ قیمت د $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ په انټروال کې له صفره کوچنی دی؟

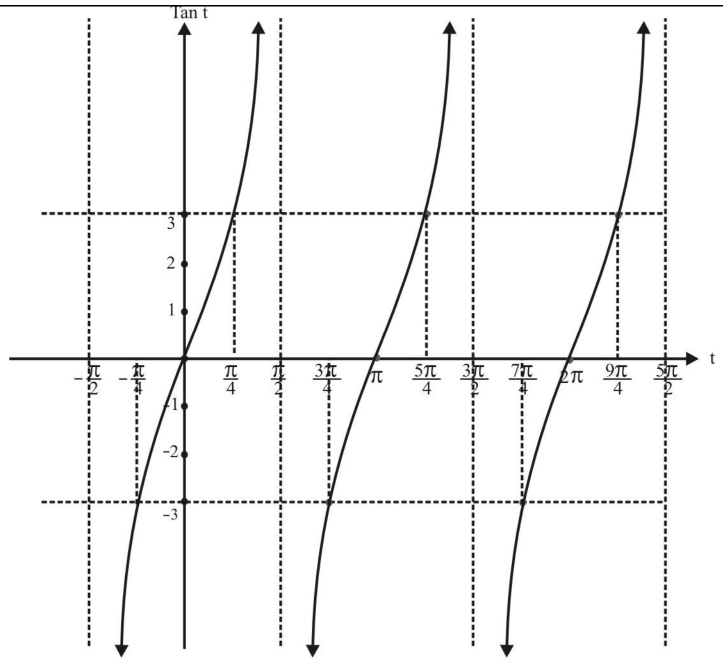
حل:



د $(-\frac{\pi}{2},0)$ په انتروال د $\tan(t)$ قیمت له صفره کوچنی دی.

2- د $y=3\tan\theta$ د تابع گراف رسم کړی.

حل:



θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
$y = 3\tan\theta$	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-3 ↗	0 ↗	3	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-3 ↗	0 ↗	3	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-3 ↗	0 ↗	3	$+\infty$ ‖ $-\infty$

3- د $\tan\theta$ د تابع پریود مساوي دی په:

a) 2π b) π c) 3π d) درې واړه سم نه دي

حل: د $\tan\theta$ د تابع پریود π دی. (د b جز سم دی.)

4-که د θ زاویه له 0^{o} څخه تر 90^{o} پورې تحول وکړي، د $\tan\theta$ تحول عبارت دی له:

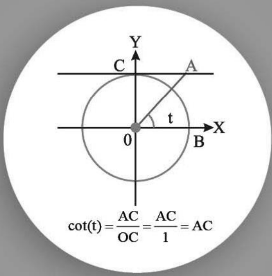
a) له $-\infty$ څخه تر 1- پورې

b) له صفر څخه تر $+\infty$ پورې

c) له $-\infty$ څخه تر $+\infty$ پورې

حل: که θ زاویه له صفر څخه تر 90° پورې تحول وکړي $\tan\theta$ له صفر څخه تر $+\infty$ تحول کوي.

د b جز سم دی.



گراف تابع cotangent (t)،
گراف تابع $\sec ant(t)$ و گراف تابع $\cos ecant(t)$

د درسي کتاب (207)مخ **د لوست وخت (2 درسي ساعتونه)**

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	• زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • د sec, cot او csc د تابعگانو د تعریف او قیمتونو ناحیې وپېژني. • ددې تابعگانو د گرافونو د رسمولو طریقه زده کړي. • ددې تابعگانو د عمودي مجانبونه معادلې پیدا کړای شي. • وپوهیږي چې د تانجانت د تابع پریود π او sec او csc د تابعگانو پریود 2π دی. • درک کړي چې د cot او csc تابعگاني طاقې او د sec تابع جفته تابع ده . • درک کړي چې د cot تابع یوه متناقصه تابع ده. • ددې تابعگانو گرافونه رسم کړای شي. • ددې تابعگانو عمودي مجانبونه رسم کړای شي. • ددې تابعگانو تحول درک کړي.
د تدریس میتودونه	پوښتنې او ځوابونه، یو کسیز او ډله ییز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت، او ...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته په داسې حالت کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، د ورودي پوښتنه لـه زده کوونکـو وکـړئ د cot د تـابع پریـود π دی او د هغو زاویو کوټانجانت چې sine یې صفر وي، تعریف شوی نه دی.

5- د لوست بهیر فعالیتونه: (28) دقیقې

په داسې حال کې د cot تابع گراف د شکل چارت موجود وي، ښـاغلی ښـوونکي دې ددې تـابع د تعریـف او قیمتونـو نـاحیې زده کوونکو ته توضیح کړي، بیا د شکل له مخې د cot د تابع تحول زده کوونکو ته پـه جـدول کـې وروښـودل شـي همدارنگـه په شکل کې دې sec د تابع تحول توضیح شي، چې زده کوونکـو ددې تـابع د تعریـف او قمیتونـو نـاحیې وپیژنـي او پـه دې وپوهیږي چې په کومو قیمتونو کې چې دا تـابع تعریـف شـوی نـه ده. پـه هغـو قیمتونـو کـې عمـودي مجانبونـه لـري او هـم هغه انټروالونه چې د sec تابع په کې متزایده او یا متناقصه ده په شکل کې ورونښودل شي.

د(209) مخ فعالیت دې زده کوونکي په گروپونو کې سرته ورسوي او د گروپونو نماینده دې خپل کار نورو ته توضیح کړي.

که چیرې زده کوونکي ستونزې ولري ښـاغلی ښـوونکي دې لارښـوونه او مرسـته ورسـره وکـړي پـه همـدې ډول د sec د تـابع د تدریس مرحلې د csc د تابع د تدریس په برخه کې تطبیق کړي او د (211)مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

د ز ده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

د (212) مخ لومړی او دویمه پوښتنه حل کړي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

له دې وروسته چې د لوست لنډیز زده کوونکو ته وویل شي دریمه او څلورمه پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د $y = f(t) = \cot(t)$ د تابع گراف له $-\pi$ څخه تر π پورې

پوهیږو چې $\cot(-t) = -\cot(t)$ او $\cot(\pi - t) = -\cot(t)$ دی

د cot د تابع پریود هم π دی، نو ددې تابع د گراف د رسمولو لپاره کولای شو له لاندې جدول څخه استفاده وکړو.

t	$-\pi$ یا -180°	$-\frac{\pi}{6}$ یا -150°	$-\frac{2\pi}{3}$ یا -120°	$-\frac{\pi}{2}-0$ یا $-90^\circ-0$	$-\frac{\pi}{2}+0$ یا $-90^\circ+0$	$-\frac{\pi}{3}$ یا -60°	$-\frac{\pi}{6}$ یا -30°	0	$\frac{\pi}{6}$ یا 30°	$\frac{\pi}{3}$ یا 60°
$\cot(t)$	$\pm\infty$	1.73	0.58	$+\infty$	$-\infty$	-0.58	-1.73	$\pm\infty$	1.73	0.58

$\frac{\pi}{2}-0$ یا -90°	$\frac{\pi}{2}+0$ یا $90^\circ+0$	$\frac{2\pi}{3}-0$ یا 120°	$\frac{5\pi}{6}-0$ یا 150°	π یا 180°
$+\infty$	$-\infty$	-0.58	-1.73	$\pm\infty$

همدارنگه د $[0,360]$ په انټروال کې د $y = \sec(t)$ د تابع گراف د رسمولو لپاره کولای شو له لاندې جدول څخه استفاده وکړو.

t	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
y	1	1.15	2	∞	-2	-1.15	-1	-1.15	-2	$-\infty$	2	1.15	1

Y=csc(t)

t	0	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$\csc(t)$	∞	2	1.15	1	1.15	2	$+\infty$ $-\infty$	-2	-1.15	-1	-1.15	-2	$-\infty$

د پوښتنو ځوابونه

1- د $f(t)=\cot(t)$ تابع د t په کومو قیمتونو کې تعریف شوي نه ده؟ ولې؟

حل: څرنګه چې $\cot(t)=\dfrac{\cos t}{\sin t}$ د $\sin t=0$ په قیمتونو کې تعریف شوي نه ده او یا غیر معین ده، ځکه چې د تابع مخرج صفر کیږي.

د $t=n\pi$, (چې n یو تام عدد دی) لپاره د $\sin t$ قیمت صفر کیږي یاپه بل عبارت د $f(t)=\cot(t)$ د تابع قیمت د π د تام مضرب په قیمتونو کې تعریف شوي نه ده.

2- څه وخت چې د θ زاویه له $\dfrac{\pi}{2}$ څخه π ته تحول وکړي د $\cot\,\theta$ تحول عبارت دی له:

a) $1\to+\infty$ b) $0\to-\infty$ c) دواړه سمې نه دي

جواب:د $\cot$ تحول له صفر څخه $-\infty$ پورې دی. (د b جز سم دی).

3- که $\hat{t}=\pi$ وي، $\cot(t)$ عبارت دی له:

$a)$ صفر $b)\ -1$ $c)$ نه دی تعریف شوی

حل: که $\hat{t}=\pi$ وي، د $\cot(t)$ قیمت تعریف شوی نه دی. (د c جز سم دی)

4- د $\sec$ او $\csc$ د تابعګانو *Range* عبارت دی له:

$a)\ R-\{x|-1<x<1\}$ $b)$ ټول حقیقي عددونه $c)\ R-\{x\ |-1\le x\le 1\}$

حل: د $\sec(t)$ او $cse(t)$ د تابعګانو *Range* له ټولو هغو حقیقي عددونو څخه عبارت دی چې له 1- سره مساوي او یا ترې کوچنی وي او یا یو او یا له یوه څخه لوی وي. (د c جز سم دی).

5- د $F(t)=\csc t$ د تابع د تعریف ساحه (*Domain*) عبارت ده، له:

a) ټول حقیقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه

b) ټول حقیقي عددونه پرته د $\dfrac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه

c) ټول حقیقي عددونه پرته د 2π له تام مضرب څخه

d) درې واړه سمې نه دي

حل: د $f(t)=\csc(t)$ د تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه دي، پرته د π له تام مضرب څخه: (د a جز سم دی).

6- د $F(t)=\csc t$ تابع د $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې:

$a)$ متزایده ده $b)$ متناقصه ده $c)$ نه متزایده او نه متناقصه ده

حل: د $f(t)=\csc(t)$ تابع د $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې متناقصه ده:

حل: $b)$ جز سم دی.

د څپرکي د پوښتنو ځوابونه

1- د 42.6033° زاویه په درجه، دقیقه او ثانیه بدله کړئ.

حل: $42.6033^\circ = 42^\circ + (0.6033\cdot 60)' = 42^\circ(636.198) = 42^\circ + 36' + (0.198\cdot 60)'' = 42^\circ\ \ 36^\circ\ \ 11.8''$

2- که د یوه ساعت د ثانیې د عقربې دوران 3 دقیقې او 25 ثانیې وي، د ثانیې عقربې به څو راډیانه مثبته زاویه طی کړې وي؟

حل: په دریو دقیقو کې د ثانیې عقربه درې دورونه $(3\cdot 2\pi) = 6\pi$ طی کوي او په "(25) کې کومه زاویه چې طی کوي عبارت ده له:

$$\left.\begin{array}{l} 30'' \text{——} \pi^R \\ \\ 25'' \text{——} x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{25\cdot \pi^R}{30} = \left(\frac{5\pi}{6}\right)^R$$

په نتیجه کې طی شوی زاویه مساوي ده په:

$$6\pi + \frac{5\pi}{6} = \left(\frac{41\pi}{6}\right)^R$$

$$\frac{6\pi + 5\pi}{6} = \left(\frac{41\pi}{6}\right)^R$$

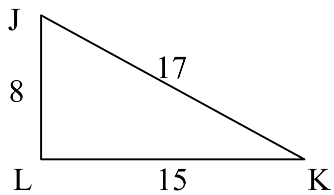
3- د JLK په مثلث کې لاندې قیمتونه پیدا کړئ.

$\sin k = \frac{8}{17} \approx 0.4706$, $\sin J = \frac{15}{17} \approx 0.8824$, $\cos J = \frac{8}{17} \approx 0.4706$

$\cos k = \frac{15}{17} \approx 0.8827$, $\tan k = \frac{8}{15} \approx 0.5333$, $\tan J = \frac{15}{8} = 1.875$

$\sec k = \frac{17}{15} \approx 1.333$, $\sec J = \frac{17}{8} = 2.125$, $\cot J = \frac{8}{15} \approx 0.5333$

$\cot k = \frac{15}{8} = 1.875$, $\csc J = \frac{17}{15} \approx 1.1333$, $\csc k = \frac{17}{8} = 2.125$



4- که د یوې دایرې شعاع $20cm$ او د مرکزي زاویې مقابل قوس یې $S = 85cm$ وي مرکزي زاویه څو راډیانه ده؟

حل:

$R = 20cm$

$s = 85cm \qquad \theta = \frac{S}{R} = \frac{85cm}{20cm} = \left(\frac{17}{4}\right)^R$

$\theta = ?$

5- د 1 راډیان او 2 راډیان مرکزي زاویو د مقابلو قوسونو اوږدوالی پیدا کړئ په داسې ډول چې د دایرې قطر $10cm$ وي.

$\theta = 1^R$

حل: $R = \frac{d}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow R = 5cm \qquad S = R\cdot\theta = 1\frac{cm}{cm}\cdot 5cm = 5cm$

$s = ?$

دویم جز:

$$S = 2\frac{cm}{cm} \cdot 5cm = 10cm$$

6- د لاندې راکړل شوو زاویو دویمې ضلعې چیرې واقع کیږي؟.

$$\frac{3\pi}{2}, \quad -7\pi, \quad \frac{11\pi}{2}, \quad -500^\circ, \quad -\pi, \quad 900^\circ$$

حل: د $\frac{3\pi}{2}$ زاویې دویمه ضلع د y د محور په منفي جهت پرته ده.

د -7π د زاویې دویمه ضلع د x د محور په منفي جهت پرته ده.

د $-\frac{11\pi}{2}$ د زاویې دویمه ضلع د y د محور په مثبت جهت پرته ده.

د -500° د زاویې دویمه ضلع په دریمه ناحیه کې پرته ده.

د $-\pi$ د زاویې دویمه ضلع د x د محور په منفي جهت پرته ده.

د 900° زاویې دویمه ضلع هم د x د محور په منفي جهت پرته ده.

7- لاندې زاویې چې په راډیان راکړل شوي دي، په درجه یې واړوئ.

$$\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{17\pi}{45}$$

حل:

$$\frac{\pi^R}{8} \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = \frac{180^\circ}{8} = 22{,}5^\circ$$

$$\frac{\pi^R}{15} \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = \frac{180}{15} = 12^\circ$$

$$\left(\frac{\pi^R}{4}\right) \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = 45^\circ$$

$$\frac{\pi^R}{3} \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = 60^\circ$$

$$\frac{\pi^R}{2} \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = 90^\circ$$

$$\frac{\pi^R}{6} \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = 30^\circ$$

$$\frac{17\pi^R}{45} \cdot \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) = 68^\circ$$

8- په 54 دقیقو کې د یوه ساعت د دقیقې او د ساعت عقربه هره یوه څو راډیانه طی کوي؟

حل:

$$60' — 2\pi$$

$$54 — x$$

$$x = \frac{54 \cdot 2\pi}{60}$$

(د دقیقې عقربه) $x = \left(\frac{9\pi}{5}\right)^R$

$$60' — \frac{\pi}{6}$$

$$54 — x$$

$$x = \frac{54 \cdot \frac{\pi}{6}}{60}$$

(د ساعت عقربه) $x = \left(\frac{3\pi}{20}\right)^R$

9-که د یوه ټراکټور د کوچني ټایر قطر یو متر ا و د لوی ټایر قطر یې 120cm وي، څه وخت چې کوچني ټایر د 70° درجو په اندازه وڅرخیږي، لوی ټایر څو راډیانه طی کوي؟

حل: خرنگه چې $S_1 = S_2$ او $70^\circ = 70 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi^R}{18}$:

$$r_1\theta_1 = r_2 \cdot \theta_2$$

$$\theta_2 = \frac{r_1 \cdot \theta_1}{r_2} = \frac{100cm \cdot \frac{7\pi}{18}}{120cm} = \frac{700\pi}{120 \cdot 18} = (\frac{35\pi}{108})^R$$

10- یو خرخ په یو ساعت کې $300 \,\mathrm{Re}\,v$ دورانونه خرخي، دا خرخ په یوه ثانیه کې څو راډیانه طی کوي؟

حل:

ساعت	دورانونه
$1 =$	300
$\frac{1}{3600} = x$	

دور $\frac{1}{12} = \frac{1}{3600} \cdot 300 =$ په یوه ثانیه کې دورانونه

$1 \longrightarrow 2\pi^R$

$\frac{1}{12} \longrightarrow x$

$\frac{\pi^R}{6} = 2\pi^R \cdot \frac{1}{12} =$ په یوه ثانیه کې طی شوي زاویه

په یوه ثانیه کې $\frac{\pi}{6}$ راډیانه یا 30° قوس طی کوي.

11- د یو مثلث زاویې په ترتیب سره $4x$ درجې $\frac{70x}{9}$ گراده او $\frac{\pi x}{20}$ راډیان دي هره یوه زاویه څو درجې ده؟

حل:

$$4x^\circ + (\frac{70x}{9} \cdot \frac{9}{10})^\circ + (\frac{\pi x}{20} \cdot \frac{180}{\pi})^\circ = 180^\circ$$

$$4x + 7x + 9x = 180^\circ$$

$$20x = 180^\circ$$

$$x = 9^\circ$$

نو زاویې عبارت دي له:

$$36^\circ + 64^\circ + 81^\circ = 180^\circ$$

$$4 \cdot 9 = 36^\circ$$

$$7 \cdot 9 = 63^\circ$$

$$9 \cdot 9 = 81^\circ$$

12- A , B , C, D د یوې څلور ضلعې زاویې دي که $\hat{A} + \hat{D} = 240^\circ$ او $\hat{C} + \hat{D} = 200g$ او $\hat{B} + \hat{D} = \frac{2\pi^R}{3}$ وي، ددې

څلور ضلعې زاویې د درجې په حساب پیدا کړئ.

حل: خرنگه چې $200^g = 180^\circ$ او $\frac{2\pi^R}{3} = 120^\circ$ کیږي، نو:

$$\hat{A} + \hat{D} = 240^\circ$$

$$\hat{C} + \hat{D} = (200 \cdot \frac{9}{10})^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{D} = (\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi})^\circ = 120^\circ$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360^\circ$$

$$\hat{A}=240-D$$

$$\hat{B}=120-D$$

$$C=1\hat{8}0-D$$

همدارنگه:

$$(240-D)+(120-D)+(180-D)+D=360^\circ$$
$$-2D+540=360\Rightarrow 2D=180^\circ$$

$$\hat{D}=90^\circ$$

$$\hat{A}=240^\circ-90^\circ=150^\circ$$

$$\hat{B}=120^\circ-90^\circ=30^\circ$$

$$\hat{C}=180^\circ-90^\circ=90^\circ$$

13- د یوه دوران $\frac{1}{12}$ برخه مساوي ده په:

$a=30°$ $\quad b:\frac{\pi}{6}\ radian$ $\quad c:\frac{100}{3}g$ $\quad d:$ درې واړه سمې دي

حل:

$$\frac{1}{12}\cdot 2\pi^R=\frac{\pi^R}{6}=30^\circ=(\frac{100}{3})^g$$

(د d جز سم دی).

14- د دوو زاویو مجموعه 17° او د تفریق حاصل یې 17g دی، ددې دواړو زاویو پراخوالی پیدا کړئ.

$$\hat{A}+\hat{B}=17^\circ\ldots\ I$$

$$\hat{A}-\hat{B}=15.3^\circ\ldots\ II \qquad 17g(\frac{9}{10})=(\frac{153}{10})^\circ=15.3^\circ$$

$$2A=32.3 \qquad A=\frac{32.3}{2}=(16.15)^\circ=16^\circ\quad 9'$$

$$\hat{B}=17^\circ-16.15^\circ=0.85^\circ=51'$$

15- د درجې په حساب د دوو زاویو مجموعه x او تفاضل یې د ګراد په حساب هم x دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

$$A+B=x^\circ$$
$$A-B=(\frac{9}{10}x)^\circ$$
$$2A=\frac{19x}{10}$$
$$A=(\frac{19x}{20})^\circ$$

$$(\frac{19x}{20})^\circ+B=x^\circ$$
$$B=x-\frac{19x^\circ}{20}=\frac{x^\circ}{20}$$

16- لاندې زاویې د درجې په اعشاري شکل ولیکئ.

$47^\circ\ 15'\ 36''$ $\qquad 15^\circ\ 24'\ 45'$

حل:

$$47^\circ\ \ 15'\ \ 36'' = 47^\circ + (\frac{15}{60})^\circ + (\frac{36}{3600})^\circ = \ 47^\circ + (0.25)^\circ + 0.01 = 47^\circ.26^\circ$$

$$15^\circ\ \ 24'\ \ 45' = 15^\circ + (\frac{24}{60})^\circ + (\frac{45}{3600})^\circ = 15^\circ + (0.4)^\circ + 0.0125 = (15.4125)^\circ$$

17- د لاندې زاويې په درجه، دقيقه او ثانيې (D.M.S) واړوئ.

حل:

23.16° $\qquad\qquad$ 4.2075°

$$23.16^\circ = 23^\circ + (0.16\cdot 60)' = 23^\circ + (9.60)' = 23^\circ + 9' + (0.6\cdot 60)'' = 23^\circ\ \ 9'\ \ \ 36''$$

$$4.2075^\circ = 4^\circ + (0.2045\cdot 60)' = 4^\circ + 12' + (0.27\cdot 60)'' = 4^\circ\ \ \ 12'\ \ \ \ \ 16.2''$$

18- $\sin(-\frac{\pi}{3})$, $\tan\frac{3\pi}{4}$ او $\cot\frac{7\pi}{6}$ پيداکړئ.

حل:

$$\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(\frac{3\pi}{4}) = \tan(3\cdot 45)^\circ = \tan(135^\circ) = \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

يا

$$\tan(\frac{3\pi}{4}) = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\cot(\frac{7\pi}{6}) = \cot(7\cdot 30)^\circ = \cot(210^\circ) = \cot(180^\circ + 30^\circ) = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

يا

$$\cot(\frac{7\pi}{6}) = \cot(\pi + \frac{\pi}{6}) = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

19- د $[-2\pi.2\pi]$ په انټروال کې د θ په کوم قيمت $\sin\theta = 1$ دی؟

حل:

$$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

20 د $[-2\pi,2\pi]$ په انټروال کې د $\tan\theta$ تابع د θ په کومو قيمتونو کې عمودي مجانب لري؟

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

حل: په هغه قيمتوکو کې چې $\cos\theta = 0$ وي، د $\tan\theta$ تابع عمودي مجانب لري.

$$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = 0\ ,\ \ \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0\ \ \ ,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0\ \ ,\ \ \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

نو د $\tan\theta$ تابع د $[-2\pi,2\pi]$ په انټروال کې د $-\frac{3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ په قيمتونو کې عمودي مجانب لري.

21- له $(i)-(iii)$ پورې کومه اړيکه سمه نه ده؟

(i) $\sin(-x) = -\sin x$

(ii) $\cos(-x) = -\cos x$

(iii) $\tan(-x) = -\tan x$

$a)$ (i) و (ii) سمې دي.

$b)$ فقط ii سمه ده.

$c)$ (i)و iii سمې دي.

$d)$ درې واړه سمې دي.

$e)$ هيڅ يو هم سمه نه ده.

حل: (c) جز سم دي.

22- $\sin(-13\pi), \cos\frac{47\pi}{2}$ او $\tan\frac{8\pi}{3}$ پيدا کړئ.

حل:

$$\cos\frac{47\pi}{2} = \cos(11\cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\sin(-13\pi) = -\sin 13\pi = -\sin(6\cdot 2\pi + \pi) = \sin\pi = 0$$

$$\tan\frac{8\pi}{3} = \tan(2\pi + \frac{2\pi}{3}) = \tan\frac{2\pi}{3} = \tan(\pi - \frac{\pi}{3}) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

23- داسې زاويه پيدا کړئ چې که د ګراډ په حساب يې له مقداره 23 واحده کم کړو، د زاويې مقدار په درجه لاس ته راشي.

حل:

$$\frac{10}{9}\mathrm{D} - 23 = \mathrm{D} \Rightarrow 10\mathrm{D} - 207 = 9\mathrm{D} \Rightarrow \mathrm{D} = 207^\circ = (207+23)^g = 230^g = 207^\circ$$

24- د دريو زاويو مجموعه 240 ګراده ده که لومړنۍ زاويه 40 ګراده اودويمه $\frac{3\pi}{4}$ راډيانه وي، دريمه زاويه څو درجې ده؟

حل:

$$(40\cdot\frac{9}{10})^\circ + (\frac{3\pi^R}{4}\cdot\frac{180}{\pi})^\circ + x^\circ = (240\cdot\frac{9}{10})^\circ$$

$$36^\circ + 135^\circ + x^\circ = 216^\circ$$

$$171^\circ + x^\circ = 216^\circ$$

$$x^\circ = 216^\circ - 171^\circ = 45^\circ$$

دريمه زاويه45 درجې يا 50 ګراده ده($50^g\cdot\frac{9}{10} = 45^\circ$ کيږي).

25- د 4185° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$$\sin 4185^\circ = \sin(11\cdot 360 + 225) = \sin 225 = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 4185^\circ = \cos(11\cdot 360 + 225) = \cos 225 = \cos(180 + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 4185 = \mathrm{tg}45^\circ = 1$$

$$\sec 4185 = -\sec 45^\circ = -\sqrt{2}$$

$$\cot 4185 = \cot 45^\circ = 1$$

$$\csc 4185 = -\csc 45^\circ = -\sqrt{2}$$

26- د $\left(-3660^\circ\right)$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل: $\sin\left(-3660^\circ\right)=-\sin 3660^\circ=-\sin\left(10\cdot 360+60\right)=-\sin 60=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-3660)=\cos 3660=\cos(10\cdot 360+60)=\cos 60=\dfrac{1}{2}$

$\tan(-3660)=-\tan 60=-\sqrt{3}$

$\cot(-3660)=-\cot 60=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\sec(-3660)=\sec 60=2$

$\csc(-3660)=-\csc 60=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

27- د $y=\cos\theta$ تابع د $\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$ په انتروال کې:

$a)$ متزایده ده $b)$ متناقصه ده $c)$ هم متزایده ده هم متناقصه

حل: متزایده ده د a جز سم دی.

28- د $y=\tan\theta$ د تابع پریود عبارت دی له:

$a)\ 2\pi$ $b)\ \pi$ $c)\ \dfrac{\pi}{2}$ $d)\ \dfrac{3\pi}{2}$

حل: پریود یې π دی(b جز سم دی).

29- د $F(t)=\cot(t)$ تابع:

a) جفته ده b) طاقه ده c) نه جفته او نه طاقه ده

حل: د $f(t)=\cot(t)$ یو تاقه تابع ده د b جز سم دی.

30- هغه تابع چې گراف یې نظر مبدا ته سره متناظر وي.

a) جفته ده b) طاقه ده c) نه جفته او نه طاقه ده

حل: طاقه ده د b جز سم دی.

31- د $y=\cos\theta$ تابع د تناوب دوره عبارت ده له:

$a)\ \pi$ $b)\ \dfrac{3\pi}{2}$ $c)\ 2\pi$ $d)\ 3\pi$

حل: 2π ده د c جز سم دی.

32- $\sin 67^\circ$ د $\sin 787^\circ$ سره څه اړیکه لري ؟

$a)\ \sin 787^\circ>\sin 67^\circ$ $b)\ \sin 787^\circ<\sin 67^\circ$ $c)\ \sin 67^\circ=\sin 787^\circ$

حل: $\sin 787^\circ=\sin\left(2\cdot 360+67\right)=\sin 67^\circ$

یو له بله سره مساوي دي (د c جز سم دی).

33- کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\sec 135^\circ=-\csc 45^\circ$ b) $\sec 135^\circ=\csc 40^\circ$ d) $\sec 135^\circ=-\sec 45^\circ$ c) $\sec 135^\circ=-\sec 45^\circ$

حل: د c جز سم دی.

34-کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\tan 240^{\circ}=\tan 60$ b) $\tan 240^{\circ}=-\tan 60^{\circ}$

c) $\tan 240^{\circ}=\cot 60^{\circ}$ d) $\tan 240^{\circ}=-\cot 60^{\circ}$

حل: د a جز سم دی.

-35 $\cot 0^{\circ}=?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی.

تعریف شوی نه ده (د d جز سم دی).

-36 $\cos 9\pi=?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)\frac{1}{2}$

حل: b جز سم دی.

-37 $\sin(-\frac{13\pi}{2})=?$

$a)$ 1 $b)-1$ $c)$ 0 $d)$ درې واړه سم نه دي

حل:

$$\sin(-\frac{13\pi}{2})=-\sin\frac{13\pi}{2}=-\sin\left(3\cdot 2\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$$

38 - د -2430° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin\left(-2430^{\circ}\right)=-\sin 2430^{\circ}=-\sin\left(6\cdot 360+270\right)^{\circ}=-\sin 270=1$$
$$\cos\left(-2430^{\circ}\right)=\cos 2430^{\circ}=\cos\left(6\cdot 360+270\right)^{\circ}=\cos 270=0$$

$\tan(-2430^{\circ})$ (غیر معین)

$\cot(-2430^{\circ})=0$

$\sec(-2430^{\circ})$ (غیر معین)

$\csc(-22430^{\circ})=1$

-39 $\sin(270^{\circ}-\theta)=?$

$a)\sin\theta$ $b)-\sin\theta$ $c)\cos\theta$ $d)-\cos\theta$

حل: $\sin(270^{\circ}-\theta)=-\cos\theta$ حل: d سم دی.

40

$\sin(-\frac{9\pi}{2})=?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$0 $d)$ تعریف شوی نه دی.

حل:

$$\sin(-\frac{9\pi}{2})=\sin(-\frac{\pi}{2})=1$$

b جز سم دی.

-41

$$\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$$

$a)\,1$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\,0$ $\quad d)$ تعریف شوی نه دی.

حل:

$$\sec(-\frac{9\pi}{2}) = \frac{1}{\cos(-\frac{9\pi}{2}} = \frac{1}{\cos(\frac{9\pi}{2})} = \frac{1}{\cos(2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$$

حل: تعریف شوی نه دی، نو d جز سم دی.

$\tan(-15\pi) = ?$ -42

$a)\,1$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\,0$ $\quad d)$ تعریف شوی نه دی.

حل:

$$\tan(-15\pi) = -\tan 15\pi = \tan(7\cdot 2\pi + \pi) = \tan\pi = 0$$

حل: c جز سم دی.

$\sec(-1530^\circ) = ?$ -43

$a)\,1$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\,0$ $\quad d)$ تعریف شوی نه دی.

حل: $\sec(-1530) = \sec(4\cdot 360 + 90) = \sec 90 =$ (تعریف شوی نه دی)

$\cot(-2430°) = ?$ -44

$a)\,1$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\,0$ $\quad d)$ تعریف شوی نه دی.

حل:

$$\cot(-2430^\circ) = -\cot 2430 = -\cot(6\cdot 360 + 270)$$
$$= -\cot 270 = -\cot(180+90) = -\cot 90 = 0$$

د c جز سم دی.

$\mathrm{Sin}(\frac{235\pi}{2}) = ?$ -45

$a)\,1$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\,0$ $\quad d)$ تعریف شوی نه دی.

حل:

$$\mathrm{Sin}\,\frac{235\pi}{2} = (58\cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2}) = \mathrm{Sin}(\frac{3\pi}{2}) = -1$$

حل: b سم دی.

$\cos(\frac{407\pi}{2}) = ?$ -46

a) 1 $\quad$ b) 0 $\quad$ c) -1 $\quad$ d تعریف شوی نه دی

حل:

$$\cos(\frac{407\pi}{2}) = \cos(203\pi + \frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

د b جز سم دی.

$\tan(90^\circ + \theta) = ?$ -47

$a)\ \cot\theta \quad b) -\cot\theta \quad c) -\tan\theta \quad d) \tan\theta$

حل:

$$\tan(90^\circ + \theta) = \tan(90^\circ - (-\theta)) = \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

د b جز سم دی.

$\tan(270^\circ + \theta) = ?$ -48

$a)\ \cot\theta \quad b)\ -\cot\theta \quad c)\ \tan\theta \quad d) -\tan\theta$

حل:

$$\tan(270^\circ + \theta) = \frac{\text{Sin}(270^\circ + \theta)}{\text{Cos}(270^\circ + \theta)} = \frac{-\text{Cos}\theta}{\text{Sin}\theta} = -\cot\theta$$

د b جز سم دی.

$\text{Sin}(-1980) = ?$ -49

$a)\ 1 \quad b)\ -1 \quad c)\ 0 \quad d)\ \frac{1}{2}$

حل:

$$Sin(-1980)^\circ = -\sin(1980^\circ) = -\sin(5\cdot 360^\circ + 180^\circ) = -\sin 180^\circ = 0$$

د c جز سم دی.

$\text{Sin}(-\frac{3\pi}{2}) = ?$ -50

$a)\ 1 \quad b)\ -1 \quad c)\ 0 \quad d)\ \frac{1}{2}$

حل:

$$\text{Sin}(-\frac{3\pi}{2}) = \sin(2\pi - \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

حل: a جز سم دی.

51- له لاندینو رابطو څخه کومه یوه سم ده؟

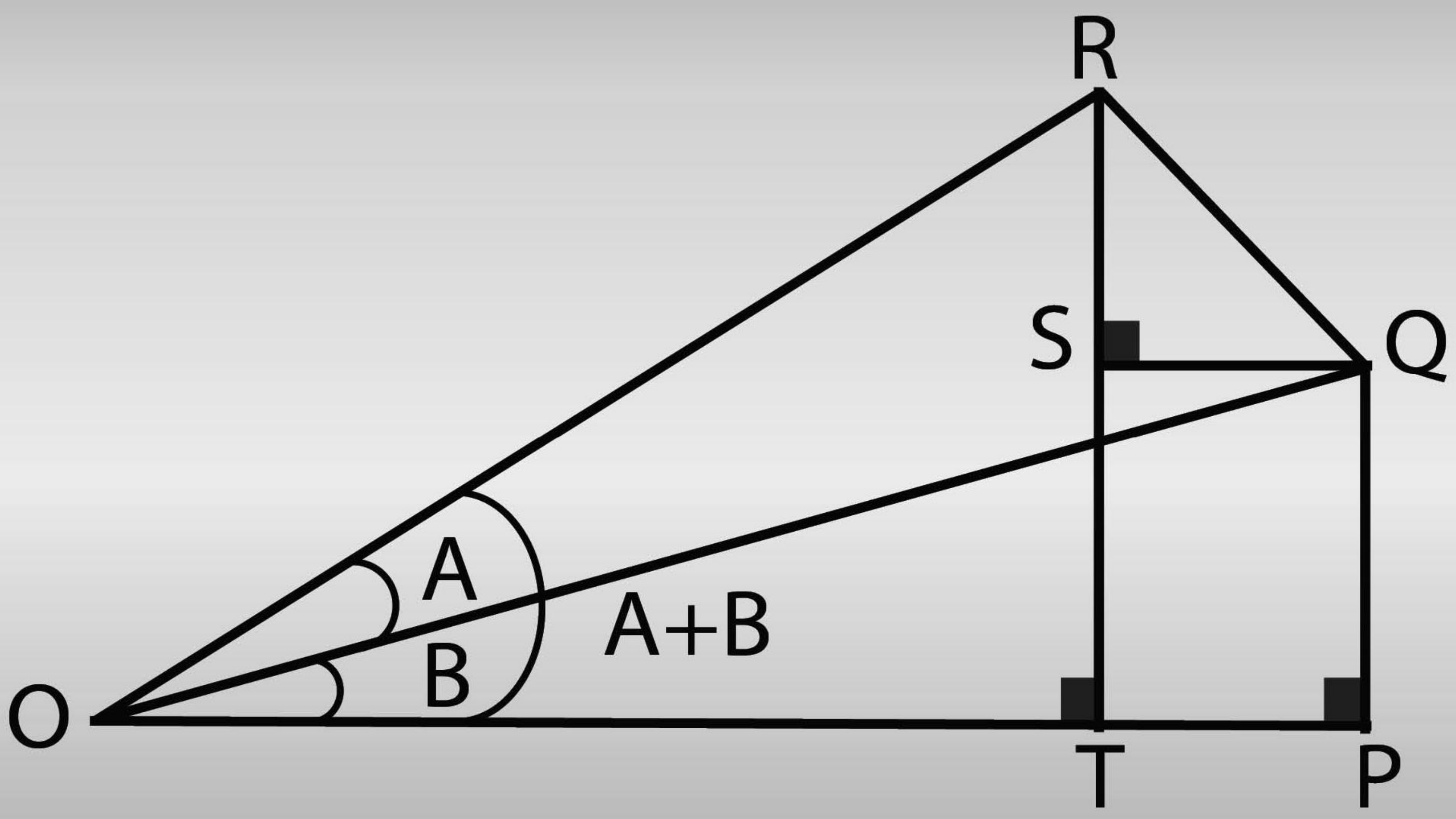
a) $\text{Sin}\frac{3\pi}{4} = \text{Sin}\frac{\pi}{4}$ b) $\text{Sin}\frac{3\pi}{4} > \text{Sin}\frac{\pi}{4}$ c) $\text{Sin}\frac{3\pi}{4} < \text{Sin}\frac{\pi}{4}$

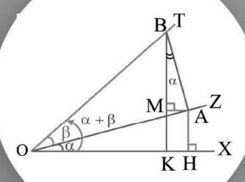
حل: a جز سم دی ځکه چې:

$$Sin\frac{3\pi}{4} = Sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4}$$

پنځم څپرکی

د مثلثاتو تطبیقات


R
S
Q
A
A+B
B
O
T
P



د جمعې او تفاضل فورمولونه

د درسي کتاب (223)مخ   د لوست وخت (1درسي ساعت)

د زده کړې موخې - **پوهنيزې** - **مهارتي** - **ذهنيتي**	ددې لوست په پای کې باید زده کوونکي: • د دوو زاويو د مجموعي او تفاضل د مثلثاتي نسبتونو د پیداکولو طريقه زده کړي. • د دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو له مخې د دوي د مجموعي او تفاضل مثلثاتي نسبتونه پیدا کړای شي. • د دوو زاويو د مجموعي او تفاضل د مثلثاتي نسبتونو په توپير وپوهيږي. • د مثلثاتي مسايلو په حل کې ددې فرمولونو اهميت درک کړي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخـــې توضـــيح (5) دقيقې	د لومړينو فعاليتونو لـه سـرته رسـولو وروسـته ورودي پوښـتنه د انگيـزې د پيـداکولـو لپـاره لـه زده کوونکو وکړئ. څرنگه چې دا رابطه سمه ده او له ثبوتولو وروسته يې زده کوونکي سموالی درک کوي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې:

په داسې حال کې چې ددې لوست د ورودي شکل چـارت موجـود وي، محتـرم ښـوونکی دې د $\cos(\propto +B)$ ، $\sin(\propto +B)$ او $\tan(\propto +B)$ ، فورمولونه ثبوت کړي، بيا د (224) مخ مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کـړئ، بيـا دې محتـرم ښوونکي د $(\propto -B)$ د زاويې مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړي او زده کوونکي دې د (226) مخ فعاليت سرته ورسوي.

لومړی،دويم، دريم او څلورم مثالونه د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حـل کـړئ او زده کـوونکي دې د (227) مـخ فعاليـت سرته ورسوي.

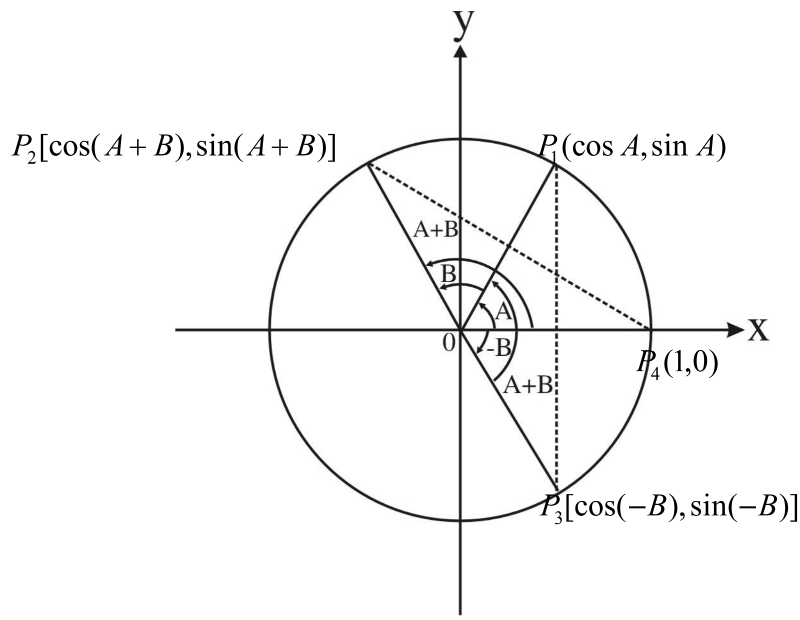
د زده کړې پياوړتيا: (7) دقيقې:

ددې لوست لومړی پوښتنه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقيقې:

ددې لوست د پوښتنو دريمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات



$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

د (O,R) ، پر مثلثاتي دايره د A , $A+B$ و $-B$ زاويې ټاکو ددې زاويو ضلعې د دايرې محيط د p_1,p_2,p_3 او p_4 په نقطوکې قطع کوي.

$\cos A=x_1 \qquad \sin A=y_1$

$p_1(x_1,y_1)=p_1(\cos A,\sin)$

خرنگه چې د P_1OP_3 او P_4OP_2 مثلثونه سره انطباق منونکي دي، نو $\overline{p_4p_2}=\overline{p_1p_3}$

$(\overline{p_1p_3})^2=[\cos A-\cos(-B)]^2+[\sin A-\sin(-B)]^2$

$(p_1p_3)^2=[\cos A-\cos B]^2+[\sin A+\sin B]^2$

$(p_1p_3)^2=\cos^2 A-2\cos A\cos B+\cos^2 B+\sin^2 A+2\sin A\sin B+\sin^2 B$

$(\overline{p_1p_3})^2=2-2\cos A\cos B+2\sin A\sin B$

همدارنگه

$(\overline{p_2p_4})^2=[\cos(A+B)-1]^2+[\sin(A+B)-o]^2$

$(\overline{p_2p_4})^2=1+1-2\cos(A+B)=2-2\cos(A+B)$

خرنگه چې $(\overline{p_3p_1})^2=(\overline{p_4p_2})^2$ ده، نو لرو چې:

$2-2\cos A\cos B+2\sin A\sin B=2-2\cos(A+B)$

په نتيجه کې:

$\boxed{\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B}$

$\cos[A+(-B)]=\cos A\cos(-B)-\sin(A)\sin(-B)$

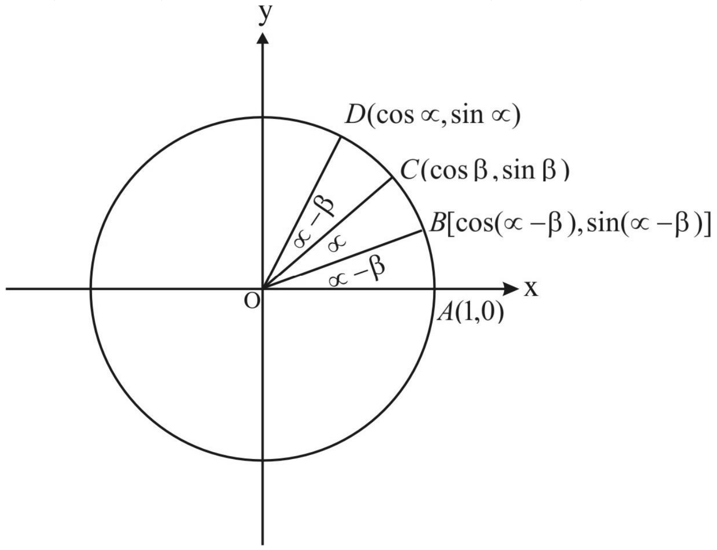
$\boxed{\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B}$

$\sin(A+B)=\cos[90^\circ-(A+B)]=\cos[(90^\circ-A)-B]$

$\sin(A+B)=\cos(90^\circ-A)\cos B+\sin(90^\circ-A)\sin B$

$\cos(90-\mathrm{A})=\sin\mathrm{A}$
$\sin(90-\mathrm{A})=\cos\mathrm{A}$
$\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\sin\mathrm{A}\cos\mathrm{B}+\cos\mathrm{A}\sin\mathrm{B}$

یا په بله طریقه: د مثلثاتي دایرې محیط چې مرکز یې O دی، د C,B,A او D نقطې په نظر کې نیسو:



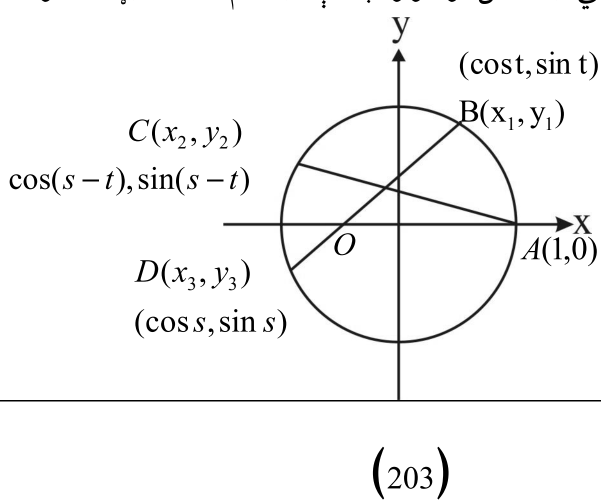
په دې ډول چې د AB د قوس اوږدوالی د CD قوس له اوږدوالی سره مساوي وي. له هندسي څخه پوهیږو څه وخت چې ددایرې دوه قوسونه سره انطباق منوونکي وي $(\mathrm{AB}\cong\mathrm{CD})$ نو اړونده وترونه یې هم سره انطباق مننونکي دي د AB د وتر اوږدوالی د CD د وتر له اوږدوالي سره مساوي دی $|AB|=|CD|$ که د $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{D}=\alpha$ او $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{C}=\beta$ وي نو $\mathrm{C}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{D}=\alpha-\beta$ کیږي او څرنګه چې $|AB|=|CD|$ دی، نو $C\hat{O}D=A\hat{O}B$ ده، په نتیجه کې $A\hat{O}B=\alpha-\beta$ ده د C,B,A او D د نقطو وضعیه کمیات عبارت دي له: $(1,0)$, $[\cos(\alpha-\beta)\ ,\sin(\alpha-\beta)]$, $(\cos\beta,\sin\beta)$، او $(\cos\alpha,\sin\alpha)$ څرنګه چې $|\mathrm{AB}|^2=|\mathrm{CD}|^2$ ده.

د فاصلې له فورمول څخه لرو چې:

$$[(1-\cos(\alpha-\beta)]^2+[0-\sin(\alpha-\beta)]^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$
$$2-2\cos(\alpha-\beta)=1+1-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

د دوو زاویو د مجموعي او تفاضل فرمولونه (Sum and Difference Identities)

که s او t دوه زاوېې وي ددې زاویو د مجموعي او تفاضل فورمولونه په دې ډول هم لاسته راوړلای شو:



که د مثلثاتي دايرې پر محيط د $A(1,0)$، $B(x_1, y_1)$، $C(x_2, y_2)$ او $D(x_3, y_3)$ نقطې واقع وي، په دې ډول چې د AD د قوس اوږدوالی s = AD , AB = t او AC = s − t وي او په دې فرض سره چې $0 < t < s < 2\pi$ وي، د BD د قوس اوږدوالی s-t سره مساوي دی (AC = BD) .

څرنګه چې د قوسونو اوږدوالي سره مساوي دي، نو د AC او BD د قطعه خطونو اوږدوالي هم سره مساوي دي د فاصلې د فورمول له مخې لرو چې:

$$\sqrt{(x_2-1)^2+(y_2-0)^2}=\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$$

دواړو خواوي مربع کوو، لرو چې:

$$x_2^2-2x_2+1+y_2^2=x_3^2-2x_3x_1+x_1^2+y_3^2-2y_3y_1+y_1^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

څرنګه چې د C,B او D نقطې د مثلثاتي دايرې پر محيط واقع دي، نو:

$$x_1^2+y_1^2=1 \quad , \quad x_2^2+y_2^2=1 \ , \quad x_3^2+y_3^2=1$$

دا قيمتونه په (I) معادله کې وضع کوو لرو چې:

$$2-2x_2=2-2x_3x_1-2y_3y_1$$

يا

$$x_2=x_3x_1+y_3y_1$$

څرنګه چې $x_2=\cos(s-t)$ و $x_3=\cos(s)\ ,\ x_1=\cos(t)\ ,\ y_3=\sin(s)\ ,\ y_1=\sin(t)$

په پايله کې لرو چې:

$$\boxed{\cos(s-t)=\cos s\cos t+\sin s\sin t}$$

$$\cos(s+t)=\cos[s-(-t)]=\cos s\cos(-t)\sin s\sin(-t)$$

څرنګه چې $\cos(-t)=\cos t$ او $\sin(-t)=-\sin t$ دی.

نو:

$$\boxed{\cos(s+t)=\cos s\cos t-\sin s\sin t}$$

په همدې ډول

$$\sin(s+t)=\cos[\frac{\pi}{2}-(s+t)]=\cos[(\frac{\pi}{2}-s)-t]$$

$$\sin(s+t)=\cos(\frac{\pi}{2}-s)\cdot\cos t+\sin(\frac{\pi}{2}-s)\cdot\sin t$$

$$\boxed{\sin(s+t)=\sin s\cos t+\cos s\sin t}$$

که $\sin(s-t)$ د $\sin[s+(-t)]$ په شکل وليکو $\sin(s+t)$ د فورمول له مخې لرو چې:

$$\sin(s-t)=\sin s\cos t-\cos s\sin t$$

څرنګه چې $\tan(s+t)=\dfrac{\sin(s+t)}{\cos(s+t)}$ دی.

د $\sin(s+t)$ او $\cos(s+t)$ د قميتونو له وضع کولو څخه وروسته لرو چې:

$$\tan(s+t)=\frac{\tan s+\tan t}{1-\tan s\tan t}$$

$$\tan(s-t)=\frac{\tan s-\tan t}{1+\tan s\tan t}$$

•

$$\frac{\cos 11^\circ + \sin 11^\circ}{\cos 11^\circ - \sin 11^\circ} = \tan 56^\circ$$

$$\tan 56^\circ = \tan(45^\circ + 11^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 11^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 11^\circ} = \frac{1 + \tan 11^\circ}{1 - \tan 11^\circ} = \frac{1 + \frac{\sin 11^\circ}{\cos 11^\circ}}{1 - \frac{\sin 11^\circ}{\cos 11^\circ}} = \frac{\cos 11^\circ + \sin 11^\circ}{\cos 11^\circ - \sin 11^\circ}$$

• که $\beta, \propto$ او γ د ABC د مثلث درې زاویې وي.

$$\tan\frac{\propto}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\propto}{2} = 1$$

$$(\propto + \beta + \gamma = 180\ )$$

$$\propto + \beta = 180 - \gamma$$

$$\frac{\propto}{2} + \frac{\beta}{2} = (90 - \frac{\gamma}{2})$$

$$\tan(\frac{\propto}{2} + \frac{\beta}{2}) = \frac{\tan\frac{\propto}{2} + \tan\frac{\beta}{2}}{1 - \tan\frac{\propto}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}} = \cot\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}$$

$$\tan\frac{\propto}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\beta}{2}\cdot\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma}{2}\cdot\tan\frac{\propto}{2} = 1$$

• د $\cot(\propto + \beta)$ محاسبه کول:

$$\cot(\propto + \beta) = \frac{1}{\tan(\propto + \beta)} = \frac{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = \frac{1 - \frac{1}{\cot\alpha}\cdot\frac{1}{\cot\beta}}{\frac{1}{\cot\alpha} + \frac{1}{\cot\beta}} = \frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta}$$

• که A، B او C د یو مثلث زاویې وي نو:

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

$$A + B + C = \pi \Rightarrow A = \pi - (\hat{B} + \hat{C})$$

$$\tan A = \tan[\pi - (\hat{B} + \hat{C})] = -\tan(\hat{B} + \hat{C}) = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B\cdot\tan C}$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

• که $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ او $\cos\beta = \frac{12}{13}$ او α په دریمه او β په څلورمه ربع کې واقع وي:

$$\sin(\alpha + \beta) = -\frac{33}{65} \qquad \sin(\alpha - \beta) = -\frac{63}{65}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{33}{65} \qquad \tan(\alpha - \beta) = \frac{63}{16}$$

• که $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$ ، $\cos\beta = -\frac{8}{17}$ ، α او β په دریمه ربع کې واقع وي:

$$\sin(\alpha + \beta) = 1 \qquad \sin(\alpha - \beta) = -\frac{161}{289}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = (\text{undifend}) \qquad \tan(\alpha - \beta) = -\frac{161}{240}$$

- که $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ او $\sin \beta = -\frac{1}{3}$ وي:

$\cos(\alpha + \beta) = \frac{-2\sqrt{10} + 2}{9}$ $\cos(\alpha - \beta) = \frac{-2\sqrt{10} - 2}{9}$

- که $\sin A = -\frac{4}{5}$ او $\sin B = \frac{12}{13}$ وي:

$\cos(A + B) = \frac{56}{65}$ $\cos(A - B) = \frac{16}{65}$

- که $\sin \theta = -\frac{8}{17}$ او $\cos \gamma = -\frac{8}{17}$ وي:

$\cos(\theta + \gamma) = 0$ $\cos(\theta - \gamma) = \frac{240}{289}$

- که $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ او $\cos \beta = -\frac{3}{5}$ وي:

α او β په دریمه ربع کې قرار لري.

$\sin(\alpha + \beta) = \frac{77}{85}$ $\sin(\alpha - \beta) = \frac{13}{85}$

$\tan(\alpha + \beta) = -\frac{77}{36}$ $\tan(\alpha - \beta) = \frac{13}{84}$

د پوښتنو ځوابونه:

1- وښایاست چې:

$$\tan(45 - \theta) = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

حل:

$$\tan(45^\circ - \theta) = \frac{\tan 45^\circ - \tan \theta}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan \theta} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

2- وښایاست چې:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \ \sin \beta$$

حل:

$a)$ $(\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \beta \cdot \sin \alpha) + (\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$

$b)$ $(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) - (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta)$

$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$

3- $\cos 277^\circ \cos 97^\circ + \sin 277^\circ \sin 97^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

حل:

$$\cos 277^\circ \cos 97^\circ + \sin 277^\circ \cdot \sin 97^\circ = \cos(227^\circ - 97^\circ) = \cos(180^\circ) = -1$$

(د a جز سم دی).

4- د جمعې د فورمولو په واسطه ، $\sin 240°$ ، $\cos 240°$ او $\tan 240°$ پيدا کړئ.

حل:

$$a)\quad \sin 240° = \sin(180° + 60°) = \sin 180° \cdot \cos 60° + \cos 180° \cdot \sin 60° = 0 \cdot \frac{1}{2} + (-1)\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b)\quad \cos 240° = \cos(180° + 60°) = \cos 180° \cdot \cos 60° - \sin 180° \cdot \sin 60° = (-1)(\frac{1}{2}) - 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$c)\quad \tan 240° = \tan(180° + 60°) = \frac{\tan 180° + \tan 60°}{1 - \tan 180° \cdot \tan 60°} = \frac{0 + \sqrt{3}}{1 - 0 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

5- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په واسطه وښيي چې $\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y] = \cos x \cdot \cos y$ دی.

حل:

$$\frac{1}{2}[(\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y) + (\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y)] = \frac{1}{2} \cdot 2\cos x \cdot \cos y = \cos x \cdot \cos y$$

6- د جمعې د فورمولونو په واسطه د $210°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$$a:\quad \sin 210° = \sin(180° + 30°) = \sin 180° \cos 30° + \cos 180° \cdot \sin 30° = (0) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$b:\quad \cos 210° = \cos(180° + 30°) = \cos 180° \cos 30° - \sin 180° \cdot \sin 30° = (-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c:\quad \tan 210° = \tan(180° + 30°) = \frac{\tan 180° + \tan 30°}{1 - \tan 180° \cdot \tan 30°} = \frac{0 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

درې پاتې مثلثاتي نسبتونه ($\csc 21^{o}$, $\sec 210^{o}$ او $\cot 210^{o}$) هم په همدې ډول په اسانۍ سره پيدا کولای شو.

7- $\sin 105°$ ، $\cos 105°$ او $\tan 105°$ پيدا کړئ. $(105° = 60° + 45°)$

حل:

$$\text{a)}\quad \sin 105^{\circ} = \sin(60^{\circ} + 45^{\circ}) = \sin 60^{\circ} \cdot \cos 45^{\circ} + \cos 60^{\circ} \cdot \sin 45^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}$$

$$\text{b)}\quad \cos 105^{\circ} = \cos(60^{\circ} + 45^{\circ}) = \cos 60^{\circ} \cdot \cos 45^{\circ} - \sin 60^{\circ} \cdot \sin 45^{\circ}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}(1 - \sqrt{3})}{4}$$

يا

$$\cos 105^{\circ} = \cos 60^{\circ} \cdot \cos 45^{\circ} - \sin 60^{\circ} \cdot \sin 45^{\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$c)\quad \tan 105^{\circ} = \tan(60^{\circ} + 45^{\circ}) = \frac{\tan 60^{\circ} + \tan 45^{\circ}}{1 - \tan 60^{\circ} \cdot \tan 45^{\circ}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

8- که $\sin x = -\frac{3}{4}$ او $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ وي، $\cos(\frac{\pi}{4} + x)$ پیدا یې کړئ.

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} + x) = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos x - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{3}{4}) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{7}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}+3)}{8}$$

9- وښایاست چې: $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\cos\beta$ دی.

$$(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) - (\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta) = -2\sin\alpha \cdot \sin\beta$$

-10

$$\sin 2^\circ \cos 88^\circ + \cos 2^\circ \sin 88^\circ = ?$$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

حل:

$\sin = 90^\circ = 1$ (د b جز سم دی).

$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=?$

$\cos^2 x-\sin^2 x=?$

د 2α د زاویې مثلثاتي نسبتونه د α د مثلثاتي نسبتونو له جنسه

د درسي کتاب (229)مخ **د لوست وخت**: (2 **درسي ساعتونه**)

د زده کړې موخې - **پوهنيزې** - **مهارتي** - **ذهنيتي**	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د یوې زاویې د مثلثاتي نسبتونو لـه جنـسه د زاویې د دوه چنـده مثلثـاتي نـسبتونو د لاس تـه راوړلو په طریقه وپوهیږي. • زده کړې چې د یوې زاویې مثلثاتي نـسبتونه د دې زاویـې د نیمـایې tan لـه جنـسه څنګـه لاس ته راځي. • د یـوې زاویـې د مثلثـاتي نـسبتونو لاس تـه راوړل د زاویـې د دوه چنـده مثلثـاتي نـسبتونو لـه جنسه زده کړي. • د زاویې د دوه چنده مثلثاتي نسبتونه د زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پیدا کړای شي. • د یوې زاویې مثلثاتي نسبتونه ددې زاویې د نیمایي ټانجانت له مخې پیدا کړای شي. • د مثلثاتي مسایلو د حلولو په وخت کې لـه دې اړیکـو څخـه ګټـه واخیـستلای شـي ا و پـه اهمیت یې وپوهیږي.
د تدریس لارې (**میتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو څخه وروسته د انګیزې پیـدا کولـو لپـاره د ورودي پوښـتنې له زده کوونکو وکړئ. $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=\sin\frac{2x}{3}$ $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x=1-2\sin^2 x=2\cos^2 x-1$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې**:

محترم ښوونکي دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره د $\cos 2x, \sin 2x$ ، او $\tan 2x$ فورمولونه ثبوت او لـومړی مثـال دې حل کړي.

زده کوونکي دې ددې لوست د (230) مخ فعالیت سرته ورسوي چې ددې فعالیت ځواب په لاندې ډول دی:

د لومړی برخې حل:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2(\frac{3}{5})(\frac{4}{5})}{(\frac{4}{5})^2 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{24}{7}$$

د دويمې برخې حل:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-(\frac{12}{13})^2} = \sqrt{\frac{25}{169}} \Rightarrow \cos\beta = -\frac{5}{13}$$ (د β دويمه ضلعه په دويمه ناحيه کې واقع ده)

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta = 2(\frac{12}{13})(-\frac{5}{13}) = -\frac{120}{169}$$

ښوونکي دې د زده‌کوونکو په ونډې اخيستنې سره دويم او دريم مثال حل کړي او د (231)مخ فعاليت دې زده‌کوونکي په مناسبو گروپونو کې سرته ورسوي، بيا د θ د زاويې مثلثاتي نسبتونه د $\tan\frac{\theta}{2}$ له جنسه په لاس راوړل شي او هم دې د θ مثلثاتي نسبتونو په لاس راوړل د 2θ د مثلثاتي نسبتونو له جنسه ثبوت شي او ددې لوست د 233 مخ لومړی او دويم مثال دې د زده‌کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي او د 234 مخ فعاليت دې زده‌کوونکي سرته ورسوي او دريم او څلورم مثال دې محترم ښوونکي حل کړي.

د زده‌کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**:

د 90° زاويې مثلثاتي نسبتونه د 45° زاويې له جنسه پيدا کړئ.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې**:

د $\cos\frac{\pi}{12}$ د $\cos\frac{\pi}{6}$ له جنسه په لاس راوړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د $2\propto$ مثلثاتي نسبتونه (Multiple – Angle Identities)

1- که $\cos 2\theta = \frac{4}{5}$ وي، د θ مثلثاتي نسبتونو په داسې حال کې چې د θ دويمه ضلعه په دويمه ناحيه‌کې واقع وي عبارت دي له:

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\frac{4}{5} = 1 - 2\sin^2\theta \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$-\frac{1}{5} = -2\sin^2\theta \qquad \cos^2\theta = \frac{9}{10}$$

$$\frac{1}{10} = \sin^2\theta \qquad \cos\theta = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{10}}{10} \qquad \cos\theta = \frac{-3\sqrt{10}}{10}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{1}{3} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \sqrt{10}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{-\sqrt{10}}{3} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = -3$$

2- که $\cos\theta = \frac{3}{5}$ او $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ وي $\cos 2\theta, \sin 2\theta$ او $\tan 2\theta$ په لاندې ډول دي.

څرنګه چې $\cos\theta = \frac{3}{5}$ دی، نو $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ دی.

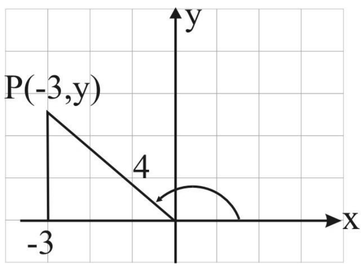
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2(-\frac{4}{5})(\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25} \qquad \cos 2\theta = \cos^2 - \sin^2\theta = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$$

یا

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2(-\frac{4}{3})}{1-\frac{16}{9}} = \frac{\frac{-8}{3}}{-\frac{7}{9}} = \frac{24}{7}$$

3- که $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ او $90^\circ \le \theta \le 180^\circ$ وي $\cos 2\theta$ عبارت دی له



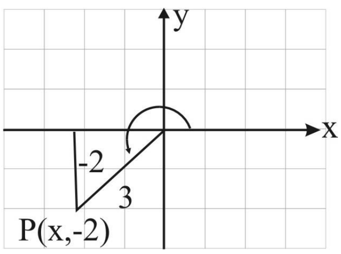
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(-3)^2 + y^2 = 4^2$$

$y = \sqrt{7}$ (په دویمه ناحیه کې د y قیمت مثبت دی)

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (-\frac{3}{4})^2 - (\frac{\sqrt{7}}{4})^2 = \frac{1}{8}$$

که $\sin\theta = -\frac{2}{3}$ او $180^\circ \le \theta \le 270^\circ$ وي $\cos\frac{\theta}{2}$ قیمت عبارت دی له:



$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + (-2)^2 = 3^2$$
$$x = -\sqrt{5}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

څرنګه چې $180^\circ \le \theta \le 270^\circ$ دی، نو $90^\circ \le \frac{\theta}{2} \le 135^\circ$ په نتیجه کې $\cos\frac{\theta}{2}$ منفي دی.

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1+(-\frac{5}{3})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1-\frac{\sqrt{5}}{3})} = -\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{6}}$$

4- په همدې ډول تاسو کولای شئ چې لاندې درکړل شوي ځوابونه په لاس راوړئ:

- که $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ او $90^\circ \le \theta \le 180^\circ$ وي، $\sin 2\theta = -\frac{24}{25}$ او $\cos 2\theta = -\frac{7}{25}$ دي.

- که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ او $90^\circ \le \theta \le 180^\circ$ وي، $\sin 2\theta = -\frac{24}{25}$ او $\cos 2\theta = \frac{7}{25}$ دي.

- که $\cos\theta = \frac{2}{5}$ او $270^\circ \le \theta \le 360^\circ$ وي، $\sin 2\theta = -\frac{4\sqrt{21}}{25}$ او $\cos 2\theta = -\frac{17}{25}$ دي.

- که $\sin\theta=-\frac{2}{5}$ او $270^\circ\le\theta\le360^\circ$ وي، $\sin 2\theta=-\frac{4\sqrt{21}}{25}$ او $\cos 2\theta=\frac{17}{25}$ دي.

- که $\sin\theta=\frac{1}{4}$ او $0^\circ\le\theta\le90^\circ$ وي، $\sin 2\theta=\frac{\sqrt{15}}{8}$ او $\cos 2\theta=\frac{7}{8}$ دي.

- که $\cos\theta=\frac{1}{4}$ او $0^\circ\le\theta\le90^\circ$ وي، $\sin 2\theta=\frac{\sqrt{15}}{8}$ او $\cos 2\theta=-\frac{7}{8}$ دي.

- که $\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{4}$ او $180^\circ\le\theta\le270^\circ$ وي، $\sin 2\theta=\frac{\sqrt{55}}{8}$ او $\cos 2\theta=\frac{3}{8}$ دي.

- که $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{4}$ او $180^\circ\le\theta\le270^\circ$ وي، $\sin 2\theta=\frac{\sqrt{55}}{8}$ او $\cos 2\theta=-\frac{3}{8}$ دي.

-که $\sin\theta=\frac{1}{5}$ او $0^\circ\le\theta\le90^\circ$ وي، $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{5}}$ او $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{5}}$ دي.

- که $\cos\theta=\frac{1}{5}$ او $0^\circ\le\theta\le90^\circ$ وي، $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{2}{5}}$ او $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{3}{5}}$ دي.

- که $\cos\theta=-\frac{5}{6}$ او $90^\circ\le\theta\le180^\circ$ وي، $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{11}{12}}$ او $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{12}}$ دي.

- که $\sin\theta=\frac{5}{6}$ او $90^\circ\le\theta\le180^\circ$ وي، $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{11}{12}}$ او $\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{11}{12}}$ دي.

- که $\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ او $180^\circ\le\theta\le270^\circ$ وي، $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{5}{6}}$ او $\cos\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ دي.

-که $\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ او $180^\circ\le\theta\le270^\circ$ وي $\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}}$ او $\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{6}}$ دي.

5- واضح ده چې:

$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$ $\quad\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\sin\theta$ $\quad\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\cos\theta-\sin\theta$

$\frac{\cos 2\theta}{\cos-\sin\theta}=\cos\theta$ $\quad\sin^2 2\theta=4\sin^2\theta\cos^2$ $\quad 2\cos^2-\sin^2\theta=\cos^2\theta+\cos 2\theta$

$2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos 2\theta$

6- د يوې زاويې د دوچنده مثلثاتي نسبتونو په مرسته $\cos\frac{2\pi}{3}$ په لاندې ډول په لاس راځي:

$$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=\cos^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{3}=(\frac{1}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

7- د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

په همدې ډول تاسو کولای شی چې لاندې درکړل شوی ځوابونه په لاس راوړئ:

$\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\quad\sin\frac{7\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\quad\tan\frac{7\pi}{8}=-\sqrt{2}+1=1-\sqrt{2}$

8-که $\cos\theta=\frac{2}{3}$ او $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ وي $\tan\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}$ او $\sin\frac{\theta}{2}$ عبارت دي له:

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}\qquad \cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{2}}=-\sqrt{\frac{5}{6}}=-\frac{\sqrt{30}}{6}\qquad \tan\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{-\frac{\sqrt{30}}{6}}=\frac{-\sqrt{5}}{5}$$

9- ښودلای شو چې $\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ دی او ددې په مرسته $\tan 22.5^\circ$ په لاندې ډول په لاس راوړلای شو:

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

$$\tan 22.5^\circ=\frac{\sin 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{2}=\sqrt{2}-1$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د 120° زاویې د مثلثاتي نسبونو له مخې د 240° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړې.

حل:

$$\sin 240^\circ=2\sin 120^\circ\cdot\cos 120^\circ=2(\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(\frac{-1}{2})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ=\cos^2 120^\circ-\sin^2 120^\circ=(-\frac{1}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 240^\circ=\frac{2\tan 120^\circ}{1-\tan^2 120^\circ}=\frac{2(-\sqrt{3})}{1-3}=\sqrt{3}$$

2- که $\sin\theta=\frac{3}{5}$ او د θ دویمه ضلعه په لومړۍ ناحیه کې واقع وي $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ.

حل:

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$ (د θ دویمه ضلعه په لومړنۍ ناحیه کې واقع ده.)

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta=2\cdot\frac{3}{5}(\frac{4}{5})=\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=(\frac{4}{5})^2-(\frac{3}{5})^2=\frac{16}{25}-\frac{9}{25}=\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}}=\frac{24}{7}$$

3- که $\sin\theta=\frac{4}{5}$ وي او د θ دویمه ضلعه په دویمه ناحیه کې واقع وي $\cos\theta/2$ پیدا کړئ.

حل: په دویمه ربعه کې $\cos\theta<0$ دی. لومړی $\cos\theta$ د $\sin\theta$ له جنسه په لاس راوړو:

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin\theta}=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

څرنګه چې $90^\circ<\theta<180^\circ$ څکه چې د θ دویمه ضلعه په دویمه ناحیه کې واقع ده، نو $45^\circ<\frac{\theta}{2}<90^\circ$ ده او $\cos\frac{\theta}{2}>0$ دی.

4- د $\sin\frac{\pi}{6}$ له جنسه $\sin\frac{\pi}{12}$ پیدا یې کړئ.

حل: که $\theta=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{12}$ وي:

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

5- که $\sin\theta=\frac{12}{13}$ وي او د θ دویمه ضلعه په دویمه ناحیه کې وي $\sin\theta/2$ او $\tan\theta/2$ پیدا کړئ.

حل:

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin\theta}=\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\sqrt{\frac{169-144}{169}}=\sqrt{\frac{25}{169}}=-\frac{5}{13}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{18}{13}}{2}}=\sqrt{\frac{18}{26}}=\sqrt{\frac{9}{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{1-\frac{5}{13}}}=\sqrt{\frac{\frac{18}{13}}{\frac{8}{13}}}=\sqrt{\frac{18}{8}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

6- د 30° زاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 15° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin^2 15^\circ=\frac{1-\cos 30^\circ}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos^2 15^\circ=\frac{1+\cos 30^\circ}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ=\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=2-\sqrt{3}$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45-30) = \cos 45 \cos 30 + \sin 45 \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3} \qquad \cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

7- که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ وي او β دويمه ضلعه په دويمه ناحيه کې وي، $\sin 2\beta$ مساوي دی په:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) $= \frac{169}{120}$ d) درې واړه سم نه دي

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cdot\cos\beta$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-(\frac{12}{13})^2} = \pm\sqrt{\frac{169-144}{169}} = -\frac{5}{13}$$ (د θ دويمه ضلعه په دويمه ناحيه کې پرته ده)

$$\sin 2\beta = 2\cdot\frac{12}{13}(-\frac{5}{13}) = -\frac{120}{169}$$

(د b جز سم دی).

8- $\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = ?$ مساوي دی په:

a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

حل:

$$\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\beta\cos 3\beta - \cos\beta\cdot\sin 3\beta}{\cos\beta\cdot\sin\beta} = \frac{\sin(\beta-3\beta)}{\cos\beta\cdot\sin\beta} = \frac{\sin(-2\beta)}{\cos\beta\cdot\sin\beta} = -\frac{\sin 2\beta}{\cos\beta\cdot\sin\beta}$$

$$= -\frac{2\sin\beta\cdot\cos\beta}{\cos\beta\cdot\sin\beta} = -2$$

(د c جز سم دی).

$4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = ?$

3α مثلثاتي نسبتونه د (α) د مثلثاتي د نسبتونو له جنسه

د درسي کتاب (237) **مخ** **د تدریس وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې - **پوهنیزې** - **مهارتي** - **ذهنیتي**	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د 3α د مثلثاتي نسبتونو د پیداکولو طریقه د α د مثلثاتي نسبتونو له جنسه زده کړي. • د یوې زاویې درې چنده مثلثاتي نسبتونه ددې زاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې پیدا کړای شي. • د دریو زاویو د مجموعي مثلثاتي نسبتونو پیداکول ددې زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه زده کړي. • د دریو زاویو د مجموعي مثلثاتي نسبتونه د هرې زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پیدا کړای شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	د لومړنیو فعالیتونو له سرته رسولو وروسته د انګیزې د پیداکولو لپاره د ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. $4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = \cos 135^\circ$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې:**

محترم ښوونکي دې $\sin 3\alpha$ د $\sin \alpha$ له جنسه په لاس راوړئ او د (237) مخ لومړی مثال دې حل کړي. بیا دې د $\cos 3\alpha$ فرمول ثبوت کړئ او زده کوونکي دې د (238) مخ فعالیت په مناسبو ګروپونو کې سرته ورسوي او د خپل کار پایله دې نورو ته توضیح کړي. ښاغلی ښوونکي دې دویم، دریم او څلورم مثالونه د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي. بیا د $\cos(\propto+\beta+\gamma), \sin(\propto+\beta+\gamma)$ او $\tan(\propto+\beta+\gamma)$ ثبوت کړي او پنځم مثال دی یو زده کوونکي په خپله خوښه حل کړي او که ستونزه یې درلوده تاسو یې حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې:**

د پوښتنو څخه لومړی پوښتنه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې:**

دویمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتنئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

• څرنګه چې $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots \binom{n}{n-3}a^3b^{n-3} + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{1}ab^{n-1} + b^n$ دي.

د پورتني باينوم له ضريبونو څخه په استفاده په مثلثاتوکې د $\cos na, \sin na$ او $\tan na$ د مثلثاتي نسبتونو د پيداکولو لپاره له لاندينو فورمولو څخه کار اخيستل کيږي:

$$\cos na = \binom{n}{0}\cos^n a - \binom{n}{2}\cos^{n-2} a\sin^2 a \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$\sin na = \binom{n}{1}\cos^{n-1} a\sin a - \binom{n}{3}\cos^{n-3} a\sin^2 a \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

پام مو وي چې:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال: په I او II فورمولونوکې کولای شو د n پر ځای هر عدد عوض کړو:

$$\cos 3\theta = \binom{3}{0}\cos^3\theta - \binom{3}{2}\cos\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta - 3\cos(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\cos 7\theta = \binom{7}{0}\cos^7\theta - \binom{7}{2}\cos^5\theta\sin^2\theta + \binom{7}{4}\cos^3\theta\sin^4\theta - \binom{7}{6}\cos\theta\sin^6\theta$$

$$= \cos^7\theta - 21\cos^5\theta(1-\cos^2\theta) + 35\cos^3\theta(1-\cos^2\theta)^2 - 7\cos\theta(1-\cos^2\theta)^3$$

$$= 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta$$

$$\sin 3\theta = \binom{3}{1}\cos^2\theta\sin\theta - \binom{3}{3}\cos^0\theta\sin^3\theta = 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

$$\sin 7\theta = \binom{7}{1}\cos^6\theta\sin\theta - \binom{7}{3}\cos^4\theta\sin^3\theta + \binom{7}{5}\cos^2\theta\sin^5\theta + \binom{7}{7}\cos^0\theta\sin^7\theta$$

له ساده کولو څخه وروسته لرو چې: $\sin 7\theta = 7\sin\theta - 56\sin^3\theta + 112\sin^5\theta - 64\sin^7\theta$

د $\tan(na)$ لپاره لرو چې:

$$\tan(na) = \frac{\binom{n}{1}\tan a - \binom{n}{3}\tan^3 a + \binom{n}{5}\tan^5 a - \ldots}{1 - \binom{n}{2}\tan^2 a + \binom{n}{4}\tan^4 a - \binom{n}{6}\tan^6 a + \ldots}$$

$$\tan 3x = \frac{\binom{3}{1}\tan x - \binom{3}{3}\tan^3 x}{1 - \binom{3}{2}\tan^2 x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

$$\tan 5x = \frac{5\tan x - 10\tan^3 x + \tan^5 x}{1 - 10\tan^2 x + 5\tan^4 x}$$

$$\tan x\tan(60^\circ - x)\tan(60^\circ + x) = \tan 3x$$

- $$\frac{\sin x\sin(60^\circ - x)\sin(60^\circ + x)}{\cos x\cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x)} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = \tan 3x$$

- $$\cot 3\alpha = \frac{1}{\tan 3\alpha} = \frac{1 - 3\tan^2\alpha}{3\tan\alpha - \tan^3\alpha} = \frac{1 - \frac{3}{\cot^2\alpha}}{\frac{3}{\cot\alpha} - \frac{1}{\cot^3\alpha}} = \frac{\cot^3\alpha - 3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha - 1} = \frac{3\cot\alpha - \cot^3\alpha}{1 - 3\cot^2\alpha}$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- $\sin 90^\circ$ ، $\cos 90^\circ$ ، $\tan 90^\circ$ په ترتيب سره د $\sin 30^\circ$ ، $\cos 30^\circ$ او $\tan 30^\circ$ له جنسه په لاس راوړئ.

$$\sin 90^\circ = \sin(30^\circ + 30^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 30^\circ\cos 30^\circ\cos 30^\circ - \sin 30^\circ\sin 30^\circ\sin 30^\circ + \sin 30^\circ\cos 30^\circ\cos 30^\circ + \sin 30^\circ\cos 30^\circ\cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{3-1+3+3}{8}=1$$

$$\cos 90^\circ=\cos(30^\circ+30^\circ+30^\circ)$$

$$=\cos 30^\circ\cdot\cos 30^\circ\cdot\cos 30^\circ-\cos 30^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 30^\circ-\cos 30^\circ\cdot\sin 30^\circ\sin 30^\circ$$

$$-\cos 30^\circ\sin 30^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{8}=\frac{0}{8}=0$$

$$\tan(\propto+\beta+\gamma)=\frac{\tan\propto+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\propto\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma}{1-\tan\propto\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\propto\cdot\tan\gamma}$$

$$\tan 90^\circ=\tan(30^\circ+30^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 30^\circ+\tan 30^\circ+\tan 30-\tan 30^\circ\cdot\tan 30^\circ\cdot\tan 30^\circ}{1-\tan 30^\circ\tan 30^\circ-\tan 30^\circ\tan 30^\circ-\tan 30^\circ\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}}{1-3\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{3}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}}{0}$$ (تعریف شوی نه دی)

2- $\cos 135^\circ$ او $\tan 135^\circ$ پیداکړئ. $(135^\circ=(30^\circ+45^\circ+60^\circ))$

حل:

$$\cos 135^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$$

$$=\cos 30^\circ\cos 45^\circ\cos 60^\circ-\cos 30^\circ\sin 45^\circ\sin 60^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ\sin 60^\circ-\cos 60^\circ\sin 30^\circ\sin 45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{8}-\frac{3\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{6}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{-4\sqrt{2}}{8}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 135^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$$

$$=\sin 30^\circ\cos 45^\circ\cos 60^\circ+\sin 45^\circ\cos 30^\circ\cos 60^\circ+\sin 60^\circ\cos 30^\circ\cos 45^\circ-\sin 30^\circ\sin 45^\circ\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{6}}{8}=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135^\circ=\frac{\sin 135^\circ}{\cos 135^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$$

3-

$$8\cos^3\theta-6\cos\theta=?$$

a) $\cos 3\theta$ b) $2\cos 3\theta$ c) $-2\cos 3\theta$

b جز سم دی ځکه چې:

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$8\cos^3\theta - 6\cos\theta = 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) = 2\cos 3\theta$

4- $\text{Cos}(\hat{A} - \hat{B} + \hat{C})$ د $\hat{A}$, $\hat{B}$ او $\hat{C}$ د زاويو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پيدا کړئ.

حل: لومړی طريقه:

$$Cos(\hat{A} - \hat{B} + \hat{C}) = \cos[(A + (-B) + C]$$
$$= \cos A \cos(-B)\cos C - \cos A \sin(-B)\sin C - \cos C \sin A \sin(-B) - \cos(-B)\sin A \sin C$$
$$= \cos A \cos B \cos C + \cos A \sin B \sin C + \cos C \sin A \sin B - \cos B \cdot \sin A \sin C$$

دويمه طريقه:

$$\text{Cos}(\hat{A} - \hat{B} + \hat{C}) = \cos[(\hat{A} - \hat{B}) + \hat{C}]$$
$$= \cos(\hat{A} - \hat{B})\cos\hat{C} - \sin(A - B)\sin C$$
$$= (\cos A \cos B + \sin A \sin B)\cos C - (\sin A \cos B - \cos A \sin B)\sin C$$
$$= \cos A \cos B \cos C + \sin A \sin B \cos C - \sin A \cos B \sin C + \cos A \sin B \sin C$$

5- وښاياست چې:

$a)\ \ 4\cos x \cos(60° - x)\cos(60° + x) = \cos 3x$

$b)\ \ \tan x \cdot \tan(60° - x)\tan(60° + x) = \tan 3x$

حل:

a)

$$4\cos x \cos(60° - x)\cos(60° + x) = \cos 3x$$
$$4\cos x(\cos 60 \cos x + \sin 60° \sin x)(\cos 60° \cos x - \sin 60° \sin x)$$
$$= 4\cos x(\cos^2 60° \cos^2 x - \sin^2 60° \sin^2 x) = 4\cos x(\frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{3}{4}\sin^2 x)$$
$$= 4\cos x\left[\frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{3}{4}(1 - \cos^2 x)\right] = \cos^3 x - 3\cos x + \cos^3 x$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x$$

b)

$$\tan x(\frac{\tan 60° - \tan x}{1 + \tan 60° \cdot \tan x})(\frac{\tan 60° + \tan x}{(1 - \tan 60° \tan x)}) = \tan x(\frac{\tan^2 60° - \tan^2 x}{1 - \tan^2 60° \tan^2 x}) = \tan x(\frac{(\sqrt{3})^2 - \tan^2 x}{1 - (\sqrt{3})^2 \tan^2 x}$$
$$= \tan x \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} = \tan 3x$$

$\sin 30° + \sin 60° = ?$
$\tan 45° + \tan 60° = ?$

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د جمعې او تفاضل تبدیلول د ضرب د حاصل په شکل

د درسي کتاب (241)مخ **د تدریس وخت** (2 **درسي ساعتونه**)

د زده کړې موخې - **پوهنیزې** - **مهارتي** - **ذهنیتي**	ددې لوست په پای کې زده‌کوونکي باید: • د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او یا تفاضل د ضرب د حاصل په شکل د بدلولو په طریقه وپوهیږي. • د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د مجموعې یا تفاضل په شکل د بدلولو په فورمولونو وپوهیږي. • ددې فورمولونو په واسطه مثلثاتي مطابقتونه ثبوت کړای شي. • د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د جمعې او یا تفاضل، د ضرب د حاصل په شکل او د ضرب حاصل یې د جمعې او تفاضل په شکل تبدیل کړای شي. • د مثلثاتي مسایلو په حل کې ددې بدلولو اهمیت درک کړي.
د تدریس لارې (**میتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5 **دقیقې**)	د لومړنیو فعالیتونو د سرته رسولو وروسته د ورودي پوښتنه له زده‌کوونکو وکړئ. $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = 2\sin\frac{30^\circ + 60^\circ}{2}\cos\frac{30^\circ - 60^\circ}{2} = 2\sin 45^\circ \cos 15^\circ$ $\tan 45^\circ + \tan 60^\circ = \frac{\sin(45^\circ + 60^\circ)}{\cos 45^\circ \cos 60}$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې**:

د هغو فورمولونو له ثبوت کولو وروسته چې د دوو زاویو مثلثاتي نسبتونو د جمعې او یا تفاضل حاصل د ضرب د حاصل په شکل بدلوي. زده‌کوونکي دې د (242) مخ فعالیت په‌ګروپونو کې سرته ورسوي او د خپل کار پایله دې توضیح کړي.

بیا دې محترم ښوونکي د (242) مخ د لومړی مثال د a او b برخې د زده‌کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي.

زده‌کوونکي دې د (243) مخ فعالیت سرته ورسوي او که یې ونه شو کولای ښوونکي دې لارښوونه او همکاري وکړي چې حل یې په لاندې ډول دی:

$$\cot p + \cot q = \frac{\cos p}{\sin p} + \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\sin q \cos p + \cos q \sin p}{\sin p \sin q} = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}$$

$$\cot p - \cot q = \frac{\cos p}{\sin p} - \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\sin q \cos p - \cos q \sin p}{\sin p \sin q} = \frac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}$$

او دویم مثال دې ښوونکي کار کړي.

د هغه فرمولونو له ثبوتولو وروسته چې د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمعې او تفاضل په حاصل بدلوي د 244

مخ د لومړی مثال د a او b برخې دې ښوونکي د زده‌کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي او په همدې ډول دې ددې لوست دویم، دریم، څلورم او پنځم مثال په ثبوت ورسوي.

د زده‌کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**:

لاندې پوښتنه حل کړئ.

وښایاست چې: $\sin 5x + \sin 7x = 2\sin 6x \cos x$ کیږي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**:

د ارزونې لپاره ددې لوست له پوښتنو څخه د دویمې پوښتنې یوه برخه له زده‌کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1-

$$\sin\frac{7\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}[\sin\pi+\sin\frac{\pi}{6}]=\frac{1}{2}[0+\frac{1}{2}]=\frac{1}{4}$$

2-

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{4}\left[4\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ\right]=\frac{1}{4}\left[(2\cos 20^\circ \cos 40^\circ)2\cos 80^\circ\right]$$

$$\frac{1}{4}\left[(\cos 60^\circ+\cos 20^\circ)2\cos 80^\circ\right]=\frac{1}{4}\left[(\frac{1}{2}+\cos 20^\circ)2\cos 80^\circ\right]$$

$$\frac{1}{4}\left[\cos 80^\circ+2\cos 80^\circ\cos 20^\circ\right]=\frac{1}{4}\left[\cos 80^\circ+\cos 100^\circ+\cos 60^\circ\right]$$

$$\frac{1}{4}\left[\cos 80^\circ+\cos(180^\circ-80^\circ)+\cos 60^\circ\right]=\frac{1}{4}\left[\cos 80^\circ-\cos 80^\circ+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

3- د ضرب د حاصل په شکل یې واړوئ.

$$\cos A+\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A=2\cos 2A\cos A+2\cos 6A\cos 2A$$

$$2\cos A\left[\cos 2A+\cos 6A\right]=2\cos A\left[2\cos 4A\cos 2A\right]=4\cos A\cos 2A\cos 4A$$

4- وښایاست چې $\sin 19^\circ \cos 11^\circ + \sin 71^\circ \sin 11^\circ = \frac{1}{2}$ دی.

حل:

$$=\frac{1}{2}\left[2\sin 19^\circ\cos 11^\circ+2\sin 71\sin 11^\circ\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sin(19^\circ+11^\circ)+(\sin(19^\circ-11^\circ)-\cos(71^\circ+11^\circ)-\cos(71^\circ-11^\circ))\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\sin 30^\circ+\sin 8^\circ-\cos 82^\circ+\cos 60^\circ\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\sin 8^\circ-\cos(90^\circ-8^\circ)+\cos 60^\circ\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\sin 8^\circ-\sin 8^\circ+\cos 60^\circ\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

-5

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{8}$$

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \sin 10^\circ \cdot \sin(60^\circ - 10^\circ)\sin(60^\circ + 10^\circ)$$

$$= \frac{1}{4}\sin(3\cdot 10) = \frac{1}{4}\sin 30^\circ = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

ځکه چې:

$$4\sin x \sin(60^\circ - x)\sin(60^\circ + x) = \sin 3x$$

$$4\cos x \cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x) = \cos 3x$$

$$\tan x \tan(60^\circ - x)\tan(60^\circ + x) = \tan 3x$$

$$\cot x \cot(60^\circ - x)\cot(60^\circ + x) = \cot 3x$$

$$\cot x \cot(60^\circ - x)\cot(60^\circ + x) = \frac{1}{\tan x \tan(60^\circ - x)\cdot\tan(60^\circ + x)} = \frac{1}{\tan 3x} = \cot 3x$$

:6

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

$$A + B + C = \pi \Rightarrow A = \pi - (B + C)$$

$$\tan A = \tan[\pi - (B + C)] = -\tan(B + C)$$

$$\tan A = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B\cdot\tan C} \Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

7- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول د مجموعي یا تفاضل په شکل:

$$1:\quad \sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ = -\frac{1}{2}[\cos(50^\circ + 70^\circ) - \cos(50^\circ - 70)]$$

$$= -\frac{1}{2}[\cos 120^\circ - \cos 20^\circ] = \frac{1}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\cos 120^\circ$$

$$2:\quad \sin 105^\circ\cdot\cos 65^\circ = \frac{1}{2}[\sin 170^\circ + \sin 40^\circ] = \frac{1}{2}\sin 170^\circ + \frac{1}{2}\sin 40^\circ$$

$$3:\quad \cos 70^\circ\cdot\sin 10^\circ = \frac{1}{2}[\sin(70^\circ + 10^\circ) - \sin(70^\circ - 10^\circ)] = \frac{1}{2}\sin 80^\circ - \frac{1}{2}\sin 60^\circ$$

$$4:\quad \cos 80^\circ\cdot\cos 20^\circ = \frac{1}{2}[\cos 100^\circ + \cos 60^\circ] = \frac{1}{2}\cos 100^\circ + \frac{1}{2}\cos 60^\circ$$

$$5:\quad \cos 35^\circ \sin 25^\circ = \frac{1}{2}[\sin 60^\circ - \sin 10^\circ]$$

$$3\cos 5x \cos 3x = \frac{3}{2}[\cos 8x + \cos 2x]$$

$$\sin(-\theta)\sin(-3\theta) = \frac{1}{2}[\cos 2\theta - 4\cos 4\theta]$$

$$6:\quad -8\cos 4y \cos 5y = -4[\cos 9y + \cos y]$$

$7: \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ = \frac{1}{4}$

$$\sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ = -\frac{1}{2}[\cos(15^\circ + 75^\circ) - \cos(15^\circ - 75^\circ)] = -\frac{1}{2}[\cos 90^\circ - \cos(-60^\circ)]$$

$$= -\frac{1}{2}[0 - \cos 60^\circ] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

8- د ضرب د حاصل په شکل یې واړوی.

$$1: \quad \cos 16^\circ + \sin 34^\circ + \sin 50^\circ = 2\cos\frac{16+34}{2}\cos\frac{34-16}{2} + 2\sin 25 \cos 25$$

$$= 2\cos 25^\circ \cos 9^\circ + 2\sin 25^\circ \cos 25^\circ = 2\cos 25^\circ(\cos 9^\circ + \cos 65^\circ)$$

$$= 2\cos 25^\circ (2\cos\frac{9+65}{2}\cos\frac{65-9}{2}) = 4\cos 25^\circ \cos 37^\circ \cos 28^\circ$$

$$\sin 60^\circ - \sin 30^\circ = 2\cos 45^\circ \sin 15^\circ$$

$$\cos 42^\circ + \cos 148^\circ = 2\cos 95^\circ \cos 35^\circ$$

$$\sin 12\beta - \sin 3\beta = 2\cos\frac{15\beta}{2}\sin\frac{9\beta}{2}$$

$$\cos 50^\circ - \cos 20^\circ = -2\sin 35^\circ \sin 15^\circ$$

$$\sin 70^\circ + \sin 20^\circ = \sqrt{2}\cos 25^\circ$$

$$\tan 70^\circ + \tan 10^\circ = \frac{\sin(70^\circ + 10^\circ)}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\sin 80^\circ}{\cos 70^\circ \cos 10^\circ} = \frac{1}{\cos 70^\circ}$$

$$\cot 80^\circ - \cot 20^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2\sin 80^\circ \cdot \sin 20^\circ}$$

$$2: \quad \sin A - \sin 5A) + (\sin 9A + \sin 3A)$$

$$= (2\cos\frac{A+5A}{2}\sin\frac{A-5A}{2}) + (2\sin\frac{9A+3A}{2}\cos\frac{9A-3A}{2})$$

$$= 2\cos 3A \sin(-2A) + 2\sin 6A \cos 3A \cos 3A = -2\cos 3A \sin 2A + 2\sin 6A \cos 3A$$

$$= 2\cos 3A(\sin 6A - \sin 2A) = 2\cos 3A(2\cos\frac{6A+2A}{2}\sin\frac{6A-2A}{2})$$

$$= 4\cos 3A \cos 4A \sin 2A$$

$$3: \quad \sin A + \sin B + \sin C - \sin(A+B+C)$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C-A-B-C}{2}\cos\frac{C+A+B+C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{2C+A+B}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}[\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{2C+A+B}{2}]$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}[2\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}] = 4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}$$

4- که A,B او C د یو مثلث درې زاویې وي نو:

$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 4\cos A \cos B \cos C + 1 = 0$ دی.

$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=2\cos^2 A-1+2\cos(B+C)\cos(B-C)$

$=2\cos^2 A-1-2\cos A\cos(B-C)=2\cos A[\cos A-\cos(B-C)]-1$

$=-2\cos A[\cos(B+C)+\cos(B-C)]-1=-4\cos A\cos B\cos C-1$

$\Rightarrow \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C+4\cos A\cos B\cos C+1=0$

9- وښایاست چې:

$$\frac{\sin 3\propto+\sin 5\propto+\sin 7\propto+\sin 9\propto}{\cos 3\propto+\cos 5\propto+\cos 7\propto+\cos 9\propto}=\tan 6\propto$$

$$\frac{\sin 3\propto+\sin 5\propto+\sin 7\propto+\sin 9\propto}{\cos 3\propto+\cos 5\propto+\cos 7\propto+\cos 9\propto}=\frac{2\sin 6\propto\cdot\cos(-3\propto)+2\sin 6\propto\cdot\cos(-\propto)}{2\cos 6\propto\cdot\cos(-3\propto)+2\cos 6\propto\cos(-\propto)}=\tan 6\propto$$

$$\frac{\sin^2 x+\sin x\sin 3x+\sin x\sin 5x}{\cos^2 x+\cos x\cos 3x+\cos x\cos 5x}=\tan x\cdot\tan 3x$$

$$\frac{\sin x(\sin x+\sin 3x+\sin 5x)}{\cos x(\cos x+\cos 3x+\cos 5x)}=\tan x\cdot\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}$$

$$=\tan\cdot\frac{2\sin 3x\cos 2x+\sin 3x}{2\cos 3x\cos 2x+\cos 3x}=\tan x\cdot\frac{\sin 3x(2\cos 2x+1)}{\cos 3x(2\cos 2x+1)}=\tan x\cdot\tan 3x$$

10- وښایاست چې $\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 80^\circ=\frac{3}{16}$ دی.

یا:

$$\sin\frac{\pi}{9}\cdot\sin\frac{2\pi}{9}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{4\pi}{9}=\frac{3}{16}$$

11- که $A=\frac{\pi}{8}$ وي:

$$\frac{\cos 13A+\cos A}{\cos 7A\cdot\cos 2A}=-2$$

$$\frac{\cos 13A+\cos A}{\cos 7A\cdot\cos 2A}=\frac{2\cos 7A\cdot\cos 6A}{\cos 7A\cdot\cos 2A}=\frac{2(-\cos 2A)}{\cos 2A}=-2\quad\begin{cases}8A=\pi\Rightarrow 6A+2A=\pi\\6A=\pi-2A\\\cos 6A=\cos(\pi-2A)=-\cos 2A\end{cases}$$

12) $$\frac{\sin 12^\circ}{\sin 4^\circ}-\frac{\cos 12^\circ}{\cos 4^\circ}=2$$

$$\frac{\sin 12^\circ}{\sin 4^\circ}-\frac{\cos 12^\circ}{\cos 4^\circ}=\frac{\sin 12^\circ\cos 4^\circ-\cos 12^\circ\sin 4^\circ}{\sin 4^\circ\cos 4^\circ}=\frac{2\sin 8^\circ}{2\sin 4^\circ\cos 4^\circ}=\frac{2\sin 8^\circ}{\sin 8^\circ}=2$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- وښایاست چې:

$$\frac{\cos 37^\circ+\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ-\sin 37^\circ}=\cot 8^\circ$$

حل:

$$\frac{\cos 37^\circ+\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ-\sin 37^\circ}=\frac{\sin 53^\circ+\sin 37^\circ}{\sin 53^\circ-\sin 37^\circ}=\frac{2\sin\frac{53^\circ+37^\circ}{2}\cdot\cos\frac{53^\circ-37^\circ}{2}}{2\cos\frac{53^\circ+37^\circ}{2}\cdot\sin\frac{53^\circ-37^\circ}{2}}=\frac{\sin 45^\circ\cdot\cos 8^\circ}{\cos 45^\circ\cdot\sin 8^\circ}=\cot 8^\circ$$

په دویمه طریقه:

$$\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \frac{\cos 37^\circ + \cos(90^\circ - 37^\circ)}{\cos 37^\circ - \cos(90^\circ - 37^\circ)}$$

$$= \frac{\cos 37^\circ + \cos 53^\circ}{\cos 37^\circ - \cos 53^\circ} = \frac{2\cos\frac{37^\circ + 53^\circ}{2}\cos\frac{37^\circ - 53^\circ}{2}}{-2\sin\frac{37^\circ + 53^\circ}{2}\sin\frac{37^\circ - 53^\circ}{2}} = \frac{\cos 45^\circ \cos(-8^\circ)}{-\sin 45^\circ \sin(-8^\circ)} = \frac{\cos 8^\circ}{\sin 8^\circ} = \cot 8^\circ$$

2- د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمعې يا تفاضل په شکل تبديل کړئ.

$a)\ \sin 5x\cos 8x$ $\quad b)\ \sin 3\theta\cos 5\theta$ $\quad c)\ \cos 30^\circ\cos 60^\circ$ $\quad d)\ \sin 32^\circ\cdot\cos 24^\circ$

$e)\ \cos 5x\sin 8x$ $\quad f)\ \cos 7\theta\sin 5\theta$ $\quad g)\ \sin 88^\circ\sin 12^\circ$ $\quad h)\ 2\sin 60^\circ\cdot\sin 20^\circ$

$i)\ 2\cos 8\theta\cdot\sin 4\theta$ $\quad j)\ 2\cos 75\alpha\cdot\sin 25\alpha$ $\quad k)\ \sin\frac{A+B}{2}\quad\cos\frac{A\quad B}{2}$

حل:

$$a)\ \sin 5x\cos 8x = \frac{1}{2}(\sin 13x - \sin 3x)$$

$$b)\ \sin 3\theta\cos 5\theta = \frac{1}{2}(\sin 8\theta - \sin 2\theta)$$

$$c)\ \cos 30^\circ\cos 60^\circ = \frac{1}{2}(\cos 90^\circ + \cos 30^\circ)$$

$$d)\ \sin 32^\circ\cdot\cos 24^\circ = \frac{1}{2}(\sin 56^\circ + \sin 8^\circ)$$

$$e)\ \cos 5x\sin 8x = \frac{1}{2}(\sin 13x + \sin 3x)$$

$$f)\ \cos 7\theta\sin 5\theta = \frac{1}{2}(\sin 12\theta - \sin 2\theta)$$

$$g)\ \sin 88^\circ\sin 12^\circ = -\frac{1}{2}(\cos 100^\circ - \cos 76^\circ) = \frac{1}{2}(\cos 76^\circ - \cos 100^\circ)$$

$$h)\ 2\sin 60^\circ\cdot\sin 20^\circ = -(\cos 80^\circ - \cos 40^\circ) = \cos 40^\circ - \cos 80^\circ$$

$$i)\ 2\cos 8\theta\cdot\sin 4\theta = (\sin 12\theta - \sin 4\theta)$$

$$j)\ 2\cos 75\alpha\cdot\sin 25\alpha = (\sin 100 - \sin 50)$$

$$k)\ \sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\right) + \sin\left(\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}[\sin A + \sin B]$$

3- د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د جمعې يا تفاضل حاصل، د ضرب د حاصل په شکل تبديل کړئ.

$a:\ \cos 56^\circ + \cos 22^\circ$ $\quad b:\ \sin 84^\circ - \sin 76^\circ$ $\quad c:\ \sin 94^\circ - \sin 86^\circ$ $\quad d:\ \cos 86^\circ + \cos 22^\circ$

$e:\ \cos 84^\circ - \cos 76^\circ$ $\quad f:\ \sin 8\theta + \sin 4\theta$ $\quad g:\ \cos 95^\circ - \cos 41^\circ$ $\quad h: \sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2}$

$i:\ \sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6}$ $\quad j:\ \cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3}$ $\quad k: \cos 84^\circ + \cos 76^\circ$ $\quad l:\ \cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}$

حل:

$$a)\ \cos 56^\circ + \cos 22^\circ = 2\cos\frac{56^\circ + 22^\circ}{2}\cdot\cos\frac{56^\circ - 22^\circ}{2} = 2\cos 39^\circ\cos 17^\circ$$

$$b)\ \sin 84^\circ - \sin 76^\circ = 2\cos\frac{84^\circ + 76^\circ}{2}\cdot\sin\frac{84^\circ - 76^\circ}{2} = 2\cos 80^\circ\cdot\sin 4^\circ$$

c) $\sin 94° - \sin 86° = 2\cos\frac{94°+86°}{2}\cdot\sin\frac{94°-86°}{2} = 2\cos\frac{180°}{2}\cdot\sin\frac{8°}{2} = 2\cos 90°\cdot\sin 4°$

d) $\cos 86° + \cos 22° = 2\cos\frac{86°+22°}{2}\cdot\cos\frac{86°-22°}{2} = 2\cos 54°\cdot\cos 32°$

e) $\cos 84° - \cos 76° = -2\sin\frac{84°+76°}{2}\cdot\sin\frac{84°-76°}{2} = -2\sin 80°\cdot\sin 4°$

f) $\sin 8\theta + \sin 4\theta = 2\sin\frac{8\theta+4\theta}{2}\cdot\cos\frac{8\theta-4\theta}{2} = 2\sin 6\theta\cdot\cos 2\theta$

g) $\cos 95° - \cos 41° = -2\sin\frac{95°+41°}{2}\cdot\sin\frac{95°-41°}{2} = -2\sin 68°\cdot\sin 27°$

h) $\sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2} = 2\cos(\frac{P+Q}{2}+\frac{P-Q}{2})\frac{1}{2}\cdot\sin(\frac{P+Q}{2}-\frac{P-Q}{2})\frac{1}{2} = 2\cos\frac{P}{2}\cdot\sin\frac{Q}{2}$

i) $\sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6} = 2\cos\frac{10x+5x}{6}\cdot\sin\frac{10x-5x}{6}) = 2\cos\frac{15x}{6}\cdot\sin\frac{5x}{6}$

j) $\cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3} = 2\cos\frac{\frac{3A}{4}+\frac{4A}{3}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{3A}{4}-\frac{4A}{3}}{2} = 2\cos\frac{25A}{24}\cdot\cos\frac{7A}{24}$

k) $\cos 84° + \cos 76° = 2\cos\frac{84°+76°}{2}\cdot\cos\frac{84°-76°}{2} = 2\cos\frac{160°}{2}\cdot\cos\frac{8°}{2} = 2\cos 80°\cdot\cos 4°$

l) $\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2} = 2\cos\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2} = 2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}$

4- وښاياست چې:

a) $\frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A$

$$\frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \frac{2\cos\frac{6A}{2}\cdot\sin\frac{2A}{2}}{2\cos\frac{6A}{2}\cdot\cos\frac{2A}{2}} = \frac{2\cos 3A\cdot\sin A}{2\cos 3A\cdot\cos A} = \tan A$$

b) $\frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta$

$$\frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \frac{2\cos(\frac{\beta+9\beta}{2})\cos(\frac{\beta-9\beta}{2})}{2\sin(\frac{\beta+9\beta}{2})\cos(\frac{\beta-9\beta}{2})} = \frac{2\cos 5\beta\cdot\cos(-4\beta)}{2\sin 5\beta\cdot\cos(-4\beta)} = \cot 5\beta$$

c) $\sin 10°\cdot\sin 30°\cdot\sin 50°\cdot\sin 70° = \frac{1}{16}$

په $= \sin 10°\cdot\sin 30°\cdot\frac{1}{2}(2\sin 50°\cdot\sin 70°) = \sin 10°\cdot\sin 30°\cdot\frac{1}{2}[-\cos(50°+70°)+\cos(50°-70°)]$

$= \sin 10°\cdot\sin 30°\cdot\frac{1}{2}[-\cos 120° + \cos(-20°)] = \sin 10°\cdot(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})[\cos 20° - \cos 120°]$

$= \frac{1}{4}(\sin 10°\cdot\cos 20° - \sin 10°\cdot\cos 120°) = \frac{1}{4}[\sin 10°\cdot\cos 20° - \sin 10°(-\frac{1}{2})]$

$= \frac{1}{4}\left[\sin 10°\cos 20° + \frac{1}{2}\sin 10\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{2\sin 10°\cos 20°}{2} + \frac{1}{2}\sin 10°\right]$

$= \frac{1}{8}[2\sin 10°\cos 20° + \sin 10°] = \frac{1}{8}[\sin 30° - \sin 10° + \sin 10°] = \frac{1}{8}(\sin 30°) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

دويمه طريقه:

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \sin 30^\circ \cdot (\sin 10^\circ \cdot \sin 70^\circ) \cdot \sin 50^\circ$$

$$= \frac{1}{2}[-\frac{1}{2}(\cos 80^\circ - \cos(-60^\circ))] \cdot \sin 50^\circ = -\frac{1}{4}[\cos 80^\circ - \frac{1}{2}] \cdot \sin 50^\circ$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 50^\circ \cdot \cos 80^\circ + \frac{1}{8} \cdot \sin 50 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}[\sin 130^\circ + \sin(-30^\circ)] + \frac{1}{8}\sin 50^\circ$$

$$= -\frac{1}{8}[\sin 50^\circ - \sin 30^\circ] + \frac{1}{8}\sin 50^\circ = -\frac{1}{8}\sin 50^\circ + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sin 50^\circ = \frac{1}{16}$$

d) $\cos 20° \cdot \cos 40° \cdot \cos 60° \cdot \cos 80° = \frac{1}{16}$

$$\cos 20° \cdot \cos 40° \frac{1}{2} \cdot \cos 80° = \frac{2}{2}\cos 20° \cdot \cos 40°(\frac{1}{2})\cos 80° = \frac{1}{4}[2\cos 20° \cdot \cos 40 \cdot \cos 80°]$$

$$= \frac{1}{4}[2\cos 20° \cos 40°]\cos 80° = \frac{1}{4}[\cos 60° + \cos 20°]\cos 80° = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + \cos 20°\right]\cos 80°$$

$$= \frac{1}{4}\left[(\frac{1}{2})\cos 80° + \cos 20° \cdot \cos 80°\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\left[2(\frac{1}{2})\cos 80° + 2\cos 20° \cos 80°\right]$$

$$= \frac{1}{8}[\cos 80° + \cos(20° + 80°) + \cos(20° - 80°)] = \frac{1}{8}[\cos 80° + \cos 100° + \cos 60°]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\cos 80° + \cos(180° - 80) + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{8}\left[\cos(80° - \cos 80°) + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

5- که $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ وي(د يو مثلث د داخلي زاويو مجموعه) وښاياست چې:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

حل: لومړی طريقه:

$$(\sin A + \sin B) + \sin C = 2\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} + \sin C$$

$$= 2\cos\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} = 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right]$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}(\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}) = 2\cos\frac{C}{2}(2\cos\frac{\frac{A+B+A-B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A+B-A+B}{2}}{2})$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}(2\cos\frac{2A}{4} \cdot \cos\frac{2B}{4}) = 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}$$

$$A + B + C = 180$$

$$A + B = 180 - C$$

$$\sin(\frac{A+B}{2}) = \sin(90 - \frac{C}{2}) = \cos\frac{C}{2}$$

دويمه طريقه:

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$
$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right]=2\sin\frac{A+B}{2}\left[2\cos\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2}\right]$$
$$=4\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

6- وښاياست چې $\sin 10°+\sin 50°-\sin 70°=0$

پام مو وي چې: د درسي کتاب د 248 مخ په لومړۍ کرښه کې په اشتباهي ډول $\sin 75^{\circ}$ ليکل شوي دی، مهرباني وکړئ هغه $\sin 70^{\circ}$ کړئ.

حل:

$$\sin 10°+(\sin 50°-\sin 70°)=\sin 10°+2\cos\frac{50°+70°}{2}\cdot\sin\frac{50°-70°}{2}$$
$$=\sin 10°+2\cos 60°\cdot\sin(-10)$$
$$=\sin 10°-2\cos 60°\cdot\sin 10°=\sin 10°-2\cdot\frac{1}{2}\sin 10°=0$$

7- $\sin 30°\cos 60°+\cos 30°\sin 60°=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

حل:

$$\sin 30°\cos 60°+\cos 30°\sin 60°$$
$$=\frac{1}{2}[\sin(60°+30°)+\sin(60°-30°)]+\frac{1}{2}[\sin(60°+30°)-\sin(60°-30°)]$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 90°+\sin 30°)+\frac{1}{2}(\sin 90°-\sin 30°)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=1$$

(د b جز سم دی).

8- د جمعې يا تفاضل د فورمولونو په واسطه وښاياست چې:

a) $\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$ c) $\cos(180°+\theta)=-\cos\theta$ e) $\sin(360°-\theta)=-\sin\theta$

b) $\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$ d) $\cos(270°+\theta)=\sin\theta$ f) $\cos(360°-\theta)=\cos\theta$

حل:

a) $\sin(180°+\theta)=\sin 180\cdot\cos\theta+\cos 180\cdot\sin\theta=0+(-1)\cdot\sin\theta=-\sin\theta$

b) $\sin(270°+\theta)=\sin 270\cdot\cos\theta+\cos 270\cdot\sin\theta=-\cos\theta$

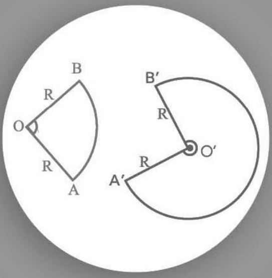
c) $\cos(180°+\theta)=\cos 180\cdot\cos\theta+\sin 180\cdot\sin\theta=-\cos\theta$

d) $\cos(270°+\theta)=\cos 270\cdot\cos\theta-\sin 270\cdot\sin\theta=-\sin\theta$

e) $\sin(360°-\theta)=\sin 360\cdot\cos\theta-\cos 360\cdot\sin\theta=-\sin\theta$

f) $\cos(360°-\theta)=\cos 360\cdot\cos\theta+\sin 360\cdot\sin\theta=\cos\theta$

$$\begin{cases}\sin 270=-1\\ \cos 180=-1\\ \cos 270=0\\ \cos 360=1\\ \sin 360=0\end{cases}$$



د قوس اوږدوالی (Arc Length)

د درسي کتاب: (249)مخ **د لوست وخت**: (2 درسي ساعتونه)

د زده کړې موخې - **پوهنيزې** - **مهارتي** - **ذهنيتي**	ددې لوست په پای زده کوونکي باید: • د يوې دايرې د قوس د اوږدوالي د پيدا کولو طريقه زده کړي. • د قطاع او قطعې تعريفونه زده کړي. • د قوس د اوږدوالی د دايرې د شعاع د قطاع د مساحت او د دايرې د مرکزي زاويې ترمنځ په اړيکه وپوهيږي. • د يوې دايرې د قطعې او قطاع مساحت پيدا کړای شي. • د يوې دايرې د قوس اوږدوالی پيدا کړای شي. • د هندسې مسايلو په حلولو کې ددې اړيکو اهميت درک کړي او زده کړې ته يې علاقه مند شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه، بحث کول او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته د انګيزې د پيدا کولو لپاره ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. $R = 5cm \qquad \theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}\text{Radian} \qquad L = ?$ $L = R\theta = 5cm(\frac{\pi}{4})^R = \frac{5\pi cm}{4} \qquad L = \frac{5\cdot\frac{22}{7}}{4}cm = \frac{110}{7}\cdot\frac{1}{4}cm \approx 3.92cm$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**:

محترم ښوونکي په داسې حال کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، د شکل له مخې دې وروښودل شي چې که د دوو قوسونو شعاعګانې سره مساوي وي، ددې قوسونو اوږدوالي د راډيان په حساب د قوسونو له اندازې سره متناسب دي.د قوس د اوږدوالی فرمول په لاس راوړئ، بيا دې ښوونکي لومړی او دويم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي او دريم مثال دې په خپله خوښه يو زده کوونکي حل کړي، بيا دې د يوې دايرې قطاع تعريف شي او د قطاع د مساحت فورمول په لاس راوړئ. د 251 مخ لومړی، دويم او دريم مثال حل کړئ.

څلورم او پنځم مثال دې زده کوونکي په خپله خوښه حل کړي او د (252) مخ فعاليت دې زده کوونکي په ګروپونو کې کار کړي او خپل کار دې نورو ته توضيح کړي.

شپږم او اووم مثال دې حل شي، بيا د دايرې قطعه تعريف کړئ او د قطعې د مساحت فورمول دې ثبوت شي لومړی او دويم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ

د (256) مخ فعالیت دې زده‌کوونکي سرته ورسوي او ښاغلی ښوونکي دې د دریم مخ مثال حل کړي.

د زده‌کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې:**

ددې لوست لومړی پوښتنه دې حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې:**

د ارزونې لپاره دې د (256) مخ دویمه پوښتنه حل شي.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- د هغې دایرې د شعاع اوږدوالی چې د 45° زاویې د مخامخ قوس اوږدوالی $3\pi cm$ وي، عبارت دی له:

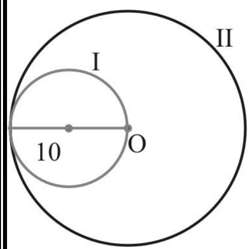
$45^\circ = (\frac{\pi}{4})\text{Radian}$ $\qquad L = R\theta \Rightarrow 3\pi cm = R\frac{\pi}{4} \Rightarrow R = 12cm$

- د هغې دایرې د شعاع اوږدوالی چې محیط او مساحت یې سره مساوي وي عبارت دی له:

$\pi R^2 = 2\pi R \Rightarrow R = 2$

- د هغې دایرې د شعاع اوږدوالی چې مساحت یې د محیط شپږ چنده وي مساوي دی په:

$$\pi R^2 = 6 \cdot 2\pi R \Rightarrow R^2 = \frac{12\pi R}{\pi} \Rightarrow \frac{R^2}{R} = \frac{12R}{R} \Rightarrow R = 12$$



لومړی دایره د دویمې دایرې له مرکز څخه تیریږي او له دویمې دایرې سره مماس ده که د لومړی دایرې مساحت $4cm^2$ وي، د دویمې دایرې مساحت $16cm^2$ دی.

- که د یوې دایرې د شعاع اوږدوالی 10 واحده وي، د هغو قطاعګانو مساحت چې د $90^\circ, 72^\circ, 80^\circ, 216^\circ$ او 324° قوسونو په مقابل کې واقع دي عبارت دي له:

  $60\pi, 50\pi, 20\pi, 25\pi$ او 90π د اوږوالی د واحد مربع.

- که د یوې دایرې مساحت $180cm^2$ وي، د 80° قطاع مساحت یې $40cm^2$ دی.
- که د یوې دایرې قطر 10m وي، د لاندینیو مرکزي زاویو د مقابلو قوسونو اوږدوالی یې په لاندې ډول دی:

د مخامخ قوس اوږدوالي	مرکزي زاویه
19m	3.8 radian
12m	2.4 radian
225m	45 radian
360m	72 radian
$\frac{5\pi}{3}$ m	$\frac{\pi}{3}$ radian
$\frac{5\pi}{2}$ m	$\frac{\pi}{2}$ radian
$\frac{35\pi}{4}$ m	$\frac{7\pi}{4}$ radian
$\frac{35\pi}{6}$ m	$\frac{7\pi}{6}$ radian

د پوښتنو ځوابونه:

1- که د يوې دايرې شعاع 20cm وي، د $\frac{\pi}{6}$ راډيان مرکزي زاويې د قطاع مساحت پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې:

$$S=\frac{1}{2}R^2\cdot\theta$$

$$S=\frac{1}{2}(20cm)^2\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}400\cdot\frac{\pi}{6}cm^2=\frac{100}{3}\pi cm^2\approx104.6cm^2$$

2- که د يوې قطاع مساحت $55.5cm^2$ او د دايرې شعاع $12cm$ وي، اړونده مرکزي زاويه يې پيدا کړئ.

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta\Rightarrow\theta=\frac{2S}{R^2}$$

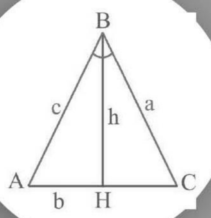
$$\theta=\frac{2(55.5)cm^2}{(12cm)^2}=\frac{111}{144}(Radian)$$

3- که د يوې دايرې د شعاع اوږدوالی $10m$ وي، د 3,8 او 27 راډيان مرکزي زاويو د مقابلو قوسونو اوږدوالی پيدا کړې.

حل:

$$a)\ \ S=r\theta\Rightarrow S=10cm(3\cdot8)=38cm$$

$$b)\ \ S=10cm\cdot27=270cm$$



د دوو ضلعو او د دوی تر منځ د زاويې له مخې د مثلث د مساحت پيدا کول

د درسي کتاب (257)مخ **د لوست وخت**: (3 **درسي ساعتونه**)

د زده کړې موخې - **پوهنيزې** - **مهارتي** - **ذهنيتي**	ددې لوست په پای کې زده کوونکي بايد: • د درېو ضلعو او د دوو ضلعو او د دوی تر منځ زاويې له جنسه د مثلث د مساحت د پيدا کولو په طريقه وپوهېږي. • د مثلث د ضلعو د اوږدالی له جنسه د مثلث د مساحت او د مثلث د محيطي دايرې د شعاع د اوږدوالی د پيدا کولو په فورمولونو وپوهيږي. • د يو مثلث د محيطي او محاطي دايرو شعاعګاني پيدا کړای شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې ددې فورمولونو اهميت درک او زده کړې ته يې علاقه مند شي.
د تدريس لارې (**ميتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته د ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. $s=\frac{1}{2}(4\cdot 8)cm^2\cdot\sin 30=16\cdot\frac{1}{2}cm^2=8cm^2$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**:

له دې وروسته چې ښاغلی ښوونکي د مساحت فورمول لاس ته راوړ، ددې لوست فعاليت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي او تاسو لومړی، دويم او دريم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي.

له دې وروسته د $\sin\frac{A}{2}$ فورمول ثبوت کړئ، د (259) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي او ښاغلي ښوونکي دې لارښوونه او مرسته ورسره وکړي. له دې وروسته چې ښوونکي د $\cos\frac{A}{2}$ فرمول ثبوت کړي. زده کوونکي دې د (260) مخ فعاليت سرته ورسوي . محترم ښوونکي دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره د مثلث د درېو ضلعو د اوږدوالي له مخې دمثلث مساحت د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره په لاس راوړي. دريم مثال دې حل کړي، د (261) مخ فعاليت دې په خپله خوښه يو زده کوونکی حل کړي، څلورم او پنځم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره ښوونکي حل کړي، بيا دې ښوونکي د مثلث د محيطي شعاع د اوږدوالي فورمول په لاس راوړي او لومړی مثال دې حل کړي او ددې مخ فعاليت دې زده کوونکي حل کړي، بيا کولای شي چې ددې مخ دويم مثال يو زده کوونکي په خپله خوښه حل کړي. محترم ښوونکي دې د محاطي دايرې د شعاع د اوږدوالی فورمول ثبوت کړي او د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره دې دريم، څلورم او پنځم مثال حل کړي.

د پنځم مثال په لیکنه کې اشتباه شوي ده او د مثلث مساحت په $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}$ سره ښودل شوی دی چې په حقیقت کې محیطي شعاع $R=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}$ ده، له دې وروسته چې ښوونکي د شکل له مخې د متساوي الاضلاع مثلث لوړوالی، مساحت، محیطي او محاطي شعاعګاني په لاس راوړي، د زده‌کوونکو په ونډې اخیستنې سره دې شپږم مثال حل کړي.

د زده‌کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**:

د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a=7\text{cm}\quad b=9\text{cm}\quad c=12\text{cm}$ وي؟

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**:

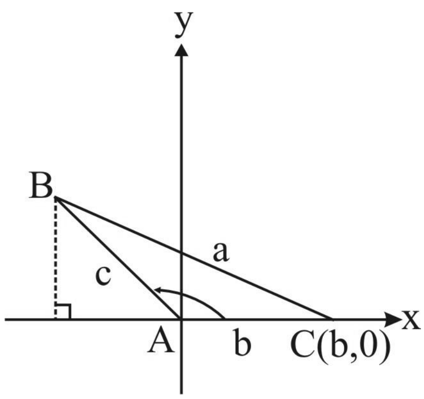
د (267) مخ دویمه پوښتنه له زده‌کوونکو وکړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

په هره مثلث کې

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

چې د کوساین د قضیې په نامه یادیږي.



د $A\overset{\Delta}{B}C$ په پام کې نیسو چې د A زاویه په معیاري حالت کې رسم شوي ده.

د B د نقطې وضعیه کمیات د $(c\cos A, c\sin A)$ څخه عبارت دی.

$$\overline{B}C=\sqrt{(c\cos A-b)^2+(c\sin A-0)^2}=\sqrt{c^2\cos^2 A-2bc\cos A+b^2+c^2\sin^2 A}$$
$$=\sqrt{c^2(\cos^2 A+\sin^2 A)+b^2-2bc\cos A}=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$$
$$|BC|=a$$
$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

یا:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

په همدې ډول:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos c$$

د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونو پيدا كول، د زاويې د ضلعو د اوډدوالي له جنسه:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad , \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

څرنگه چې پوهيږو:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \qquad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

$$a + b + c = 2p$$
$$a + b + c - 2b = 2p - 2b$$
$$a + c - b = 2(p-b)$$
$$a + b + c + 2p$$
$$a + b + c - 2c = 2p - 2c$$
$$a + b - c = 2(p-c)$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

همدارنگه دوه نورې اړيكې هم ثبوتيږي.

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$a + b + c = 2p$$
$$a + b + c - 2a = 2p - 2a$$
$$b + c - a = 2(p-a)$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2p\cdot 2(p-a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

په پایله کې لرو چې:

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \qquad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

- څه وخت چې د مثلث دوې ضلعې او د دوي ترمنځ زاویه معلومه وي، د لاندینیو مثلثونو مساحت تر یوې اعشاري خانې پورې په لاندې ډول دی.

$a=5in \quad c=8in \quad A=45^\circ \quad \Rightarrow \quad S=14.1in^2$

$a=10\,ft \quad c=12\,ft \quad B=30^\circ \quad \Rightarrow \quad S=30\,ft^2$

$a=9in \quad b=11in \quad C=60^\circ \quad \Rightarrow \quad S=42.9\,in^2$

$b=7cm \quad c=10cm \quad A=45^\circ \quad \Rightarrow \quad S=24.7cm^2$

$a=6km \quad c=10km \quad B=57^\circ \quad \Rightarrow \quad S=25.2km^2$

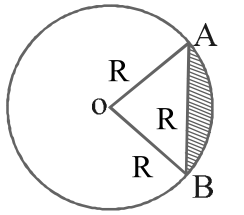
$a=25\,ft \quad b=32\,ft \quad C=67^\circ \quad \Rightarrow \quad S=368.2\,ft^2$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د شکل په شان د OAB مثلث، متساوي الاضلاع مثلث دی، چې هره ضلعه یې R ده، د O په مرکز یوه دایره رسم شوې ده چې د A او B له نقطو څه تیریږي، د AB له وتر سره د اړوندې قطعې مساحت مساوي دی په:

a) $(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4})R^2$ b) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{5})R^2$ c) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})R^2$

d) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2})R^2$ e) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2$



حل:

د قطعې مساحت $S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$

$$S=\frac{1}{2}R^2(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})=R^2(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}) \qquad \theta=60=\frac{\pi}{3}^R,\ \sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(دe جز سم دی).

2- که د یو متساوي الساقین مثلث د هر ساق اوږدوالی $6cm$ او ترمنځ زاویه یې $30°$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\sin 30^\circ=18\cdot\frac{1}{2}=9cm^2$$

3- که د یوه مثلث د دوو ضلعو اوږدوالی $5\sqrt{2}cm$ او $6cm$ او ترمنځ زاویه یې $45°$ وي ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 6cm\cdot 5\sqrt{2}cm\cdot\sin 45^\circ$$

$$S=5\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=15cm^2$$

4- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $3cm$ ، $4cm$ او $5cm$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل:

$$P = \frac{3+4+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$S = \sqrt{P(p-a)(p-b)(P-c)} = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1} = \sqrt{36} = 6cm^2$$

5- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 7cm$ ، $b = 9cm$ او $c = 12cm$ وي.

حل: څرنګه چې:

$$\mathrm{P} = \frac{9+7+12}{2} = \frac{28}{2} = 14\mathrm{cm}$$

$$\mathrm{S} = \sqrt{\mathrm{P(p-a)(p-b)(p-c)}} = \sqrt{14(14-9)(14-7)(14-12)} = \sqrt{14(5)(7)(2)} = \sqrt{2.7.5.7.2} = 14\sqrt{5}\mathrm{cm}^2$$

6- د هغه قایمه الزاویه مثلث د محیطي دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ چې د قایمو ضلعو اوږدوالی یې $12cm$ او $5cm$ وي.

$$R = \frac{a.b.c}{4S}$$

$$C^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

$$c = 13$$

$$P = \frac{12+13+5}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$S = \sqrt{15(15-12)(15-5)(15-13)} = \sqrt{15\cdot3\cdot10\cdot2} = \sqrt{900} = 30cm^2$$

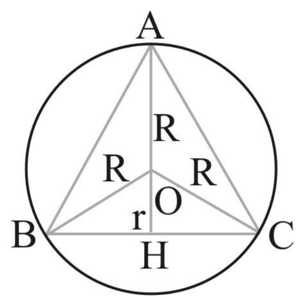
$$R = \frac{12\cdot5\cdot13cm^3}{4\cdot30cm^2} = \frac{13}{2}cm = 6.5cm$$

7- که د ABC د متساوي الساقین مثلث د قاعدې اوږدوالی $a = 8cm$ او محاطي شعاع یې $\mathrm{r = 3cm}$ وي ددې مثلث د ساقو او محیطي دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړې.

حل: څرنګه چې د OBC مثلث متساوي الساقین دی، نو دوه ضلعې یې سره مساوي او د ABC د مثلث د محیطي دایرې شعاعګانې سره مساوي دي او لوړوالی (ارتفاع) یې $r = 0H$ د BC مقابله ضلع نیمایي کوي.

$$R = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5cm$$

$$AC = AB = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}cm$$



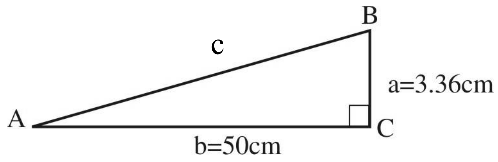
8- که د یو قایم الزاویه مثلث مساحت $84\mathrm{cm}^2$ او د یوې قایمې ضلعې اوږدوالی یې $3.36\mathrm{cm}$ وي ددې مثلث د محیطې دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

حل:

$$S=\frac{b\cdot h}{2}\Rightarrow 84=\frac{b\cdot 3{,}36}{2}\Rightarrow b=\frac{2\cdot 84}{3{,}36}=50cm$$

$$C^2=(3{,}36)^2+(50)^2=2511.7896\Rightarrow c=50.11cm$$

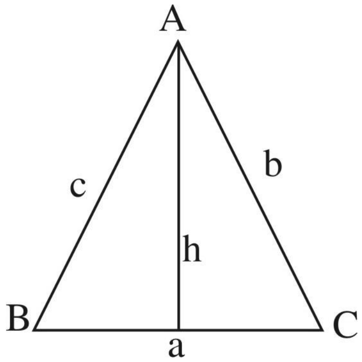
$$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4S}=\frac{3.36\cdot 50\cdot 50.11}{4\cdot 84}=25.055\approx 25cm$$



د څپرکی د پوښتنو حل:

1- که د یوه متساوي الاضلاع مثلث هره ضلعه a وي وښایاست چې ددې مثلث مساحت $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a$ دی.

حل:



$$c^2=h^2+(\frac{a}{2})^2$$

$$h^2=a^2-\frac{a^2}{4}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$S=\frac{\frac{a(\sqrt{3}a)}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

2- که د یو مثلث د ضلعو اوږدوالی $C=9cm,\ b=8cm,\ a=7cm$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل:

$$P=\frac{7+8+9}{2}=\frac{24}{2}=12cm$$

$$S=\sqrt{P(p-a)(p-b)(p-c)}\Rightarrow$$

$$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=\sqrt{12\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=\sqrt{3\cdot 4\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=12\sqrt{5}cm^2$$

3- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې د فرمولونو په مرسته $\mathrm{Cos}165^\circ$ او $\mathrm{Sin}165^\circ$ پیدا کړئ.

$$\mathrm{Sin}(165^\circ)=\mathrm{Sin}(120^\circ+45^\circ)=\mathrm{Sin}120^\circ\cdot\mathrm{Cos}45^\circ+\cos 120^\circ\sin 45^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})+(-\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\mathrm{Cos}(165^\circ)=\mathrm{Cos}(120^\circ+45^\circ)=\mathrm{Cos}120^\circ\mathrm{Cos}45^\circ-\mathrm{Sin}120^\circ\mathrm{Sin}45^\circ$$

$$=(\frac{-1}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}-(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

4- $\mathrm{Sin}(-165^\circ)=?$

a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

c) $-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(د b جز سم دی) ځکه چې $\mathrm{Sin}(-165^\circ)=-\sin 165^\circ=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

5- وښایاست چې:

$$\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos 3\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

حل:

$$\frac{\cos 2\theta\cdot\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{\cos(2\theta+\theta)}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{\cos 3\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$$

6- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې یا تفاضل د فرمولونو په مرسته د لا ندینیو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړي.

$$a)\ \sin(30^\circ+45^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30\cdot\sin 45=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

b:

$$\cos(135^\circ)=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(135^\circ)=\sin(180^\circ-45^\circ)=\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(135^\circ+180^\circ)=\sin 135^\circ\cdot\cos 180^\circ+\cos 135^\circ\sin 180=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)+(-\frac{\sqrt{2}}{2})(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c)\ \cos(150^\circ-45^\circ)=\cos 150^\circ\cdot\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\cdot\sin 150^\circ$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$d)\ \sin(135^\circ-180^\circ)=\sin 135^\circ\cdot\cos 180^\circ-\cos 135^\circ\cdot\sin 180^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1)+0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$e)\ \tan(30^\circ+60^\circ)=\frac{\tan 30^\circ+\tan 60^\circ}{1-\tan 30\tan 60}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\frac{1+3}{\sqrt{3}}}{0}$$ (تعریف شوی نه دی)

$$f)\ \tan(180-45)=\frac{\tan 180-\tan 45}{1+\tan 180\cdot\tan 45}=\frac{0-1}{1}=-1$$

7- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل د فرمولونو په مرسته د لاندینیو اړیکو سموالی وښایاست.

$$\sin(90^\circ-\theta)=\sin 90^\circ\cos\theta-\cos 90^\circ\sin\theta=\cos\theta-0(\sin\theta)=\cos\theta$$

$$\sin(270^\circ+\theta)=\sin 270^\circ\cos\theta+\cos 270^\circ\sin\theta=(-1)\cos\theta+(0)\sin\theta=-\cos\theta$$

$$\cos(90^\circ+\theta)=\cos 90^\circ\cos\theta-\sin 90^\circ\sin\theta=0-(1)\sin\theta=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=\cos 180^\circ\cos\theta+\sin 180^\circ\sin\theta=(-1)\cos\theta+(0)\sin\theta=-\cos\theta$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\cos 90^\circ\cos\theta+\sin 90^\circ\sin\theta=(0)\cos\theta+\sin\theta=\sin\theta$$

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin 180^\circ\cos\theta-\cos 180^\circ\sin\theta=(0)\cos\theta-(-1)\sin\theta=\sin\theta$$

8- که $0^\circ<\theta<90^\circ$ او $\sin\theta=\frac{2}{5}$ وي $\sin 2\theta, \cos 2\theta$ $\cos\frac{\theta}{2}$, $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمتونه پیدا کړئ.

$$a)\ \cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2(\frac{2}{5})^2=1-\frac{8}{25}=\frac{17}{25}$$

$$b)\sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta=2\cdot\frac{2}{5}(\sqrt{1-\sin^2\theta})=\frac{4}{5}\sqrt{1-\frac{4}{25}}=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{21}{25}}=\frac{4\sqrt{21}}{25}$$

$$(\cos\theta=\sqrt{1-\frac{4}{25}}=\frac{\sqrt{21}}{5})$$

$$c)\ \cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{21}}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{5+\sqrt{21}}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{10}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{10}}$$

$$d)\ \sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{21}}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{10}}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{10}}$$

9- وښاياست چې:

$$a)\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$$

$$b)\cos 2\theta+1=2\cos^2\theta\Rightarrow\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$c)\cos 2\theta+2\sin^2\theta=1$$

$$\cos 2\theta+2\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta+2\sin^2\theta=1$$

$$d)\ 2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos 2\theta\Rightarrow 2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=2\cos 2\theta$$

$$e)\ \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{\cos^2-\sin^2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\cos\theta+\sin\theta)}=\cos\theta-\sin\theta$$

10- که د يوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتيب سره $8cm,\ 7cm,\ 5cm$ وي، ددې مثلث د محيطي او محاطي شعاګانو اوږدوالی پيدا کړئ.

حل:

$$P=\frac{8+7+5}{2}=\frac{20}{2}=10$$

$$S=\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)^1}=\sqrt{10\cdot5\cdot3\cdot2}=10\sqrt{3}$$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{5\cdot7\cdot8}{4(10\sqrt{3})}=\frac{7}{\sqrt{3}}\qquad r=\frac{S}{P}=\frac{10\sqrt{3}}{10}=\sqrt{3}$$

11- $\sin(180^\circ+\theta)=?$

a) $\sin\theta$

b) $-\cos\theta$

c) $-\sin\theta$

d) $\cos\theta$

حل: $\sin(180^\circ+\theta)=\sin180^\circ\cdot\cos\theta+\cos180^\circ\cdot\sin\theta=-\sin\theta$ (د c جز سم دی).

12- د جمعې او تفاضل د فرمولونو په مرسته وښاياست چې:

a) $\sin(360°-\theta)=-\sin\theta$

$$\sin(360°-\theta)=\sin 360\cdot\cos\theta-\cos 360\cdot\sin\theta=0\cdot\cos\theta-1\cdot\sin\theta=-\sin\theta$$

b) $\tan(180°+\theta)=\tan\theta$

$$\tan(180°+\theta)=\frac{\tan180+\tan\theta}{1-\tan180\cdot\tan\theta}=\frac{0+\tan\theta}{1-0}=\tan\theta$$

c) $\sec(360° - \theta) = \sec\theta$

$$\sec(360° - \theta) = \frac{1}{\cos(360° - \theta)} = \frac{1}{\cos 360° \cdot \cos\theta + \sin 360 \cdot \sin\theta}$$

$$= \frac{1}{1 \cdot \cos\theta + 0 \cdot \sin\theta} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$$

13- $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = ?$

a) $2\sin\alpha\sin\beta$

b) $2\cos\alpha\cos\beta$

c) $-2\sin\alpha\sin\beta$

$(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) - (\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta) = -2\sin\alpha \cdot \sin\beta$

(د c جز سم دی).

14- وښاياست چې: $\frac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha} = \sin 5\alpha$ دی.

حل:

$$= \frac{\sin\alpha \cdot \csc 4\alpha + \cos\alpha \cdot \sec 4\alpha}{\sec 4\alpha \cdot \csc 4\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\sin 4\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha}}{\frac{1}{\sin 4\alpha \cos 4\alpha}} = \frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos 4\alpha + \cos\alpha \cdot \sin 4\alpha}{\sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha}}{\frac{1}{\sin 4\alpha \cdot \cos 4\alpha}}$$

$$= \sin(\alpha + 4\alpha) = \sin 5\alpha$$

يا:

$$= \frac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha} = \sin\alpha \cdot \cos 4\alpha + \cos\alpha \cdot \sin 4\alpha = \sin(\alpha + 4\alpha) = \sin 5\alpha$$

15- د لاندې مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصلونه د جمعې يا تفاضل په شكل واړوئ.

a) $\cos 100 \cdot \sin 50^\circ = \frac{1}{2}[\sin(100^\circ + 50^\circ) - \sin(100^\circ - 50^\circ)] = \frac{1}{2}(\sin 150^\circ - \sin 50^\circ)$

b) $\cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ = -\frac{1}{2}[\cos(60^\circ + 40^\circ) + \cos(60^\circ - 40^\circ)] = \frac{1}{2}(\cos 100^\circ + \cos 20^\circ)$

c) $\sin 8\theta \cdot \cos 10\theta = \frac{1}{2}[\sin(8\theta + 10\theta) - \sin(8\theta - 10\theta)] = \frac{1}{2}(\sin 18\theta + \sin 2\theta)$

d) $\sin\frac{3\theta}{2} \cdot \sin\frac{5\theta}{2} = -\frac{1}{2}[\cos(\frac{3\theta}{2} + \frac{5\theta}{2}) - \cos(\frac{3\theta}{2} - \frac{5\theta}{2})] = -\frac{1}{2}(\cos 4\theta - \cos\theta) = \frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 4\theta)$

16- د لاندې مثلثاتي نسبتونو مجموعه يا تفاضل د ضرب د حاصل په شكل واړوئ.

$\sin 80° - \sin 72°$ ، $\sin 12\theta + \sin 8\theta$

a) $\sin 80^\circ - \sin 72^\circ = 2\cos\frac{80^\circ + 72^\circ}{2} \cdot \sin\frac{80^\circ - 72^\circ}{2} = 2\cos\frac{152^\circ}{2} \cdot \sin\frac{8^\circ}{2} = 2\cos 76^\circ \cdot \sin 4^\circ$

b) $\sin 12\theta + \sin 8\theta = 2\sin\frac{12\theta + 8\theta}{2} \cdot \cos\frac{12\theta - 8\theta}{2} = 2\sin 10\theta \cdot \cos 2\theta$

17- وښاياست چې:

$$\frac{\sin 5\theta + \sin 3\theta}{\cos 5\theta - \cos 3\theta} = -\cot\theta$$

حل:

$$\frac{\sin 5\theta+\sin 3\theta}{\cos 5\theta-\cos 3\theta}=\frac{2\sin 4\theta\cdot\cos\theta}{-2\sin 4\theta\cdot\sin\theta}=-\cot\theta$$

18- د يوې دايرې مساحت $180cm^2$ دی، ددې دايرې د $80°$ زاويې د قطاع مساحت پيدا کړئ.

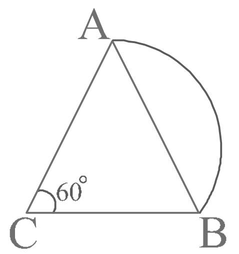
د دايرې مساحت $=\pi r^2$

$$r^2=\frac{180}{\pi}$$

$$r=\sqrt{\frac{180}{\pi}}\ ,\ s=\frac{1}{2}r^2\cdot\theta\Rightarrow S=\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{180}{\pi}})^2\cdot\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{180}{\pi}\cdot\frac{4\pi}{9}=40cm^2$$

19- د شکل په شان د $60°$ درجې مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی $1cm$ دی ددې قوس د شعاع او د $\overline{AB}$ د وتر اوږدوالی پيدا کړئ.

حل:



$$S=R\cdot\theta$$

$$1=R\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$R=\frac{3}{\pi}cm$$

څرنگه چې مثلث متساوي الاضلاع دی، نو د $AB=R=\frac{3}{\pi}cm$ دی.

20- $\dfrac{\tan 60°-\tan 30°}{1+\tan 60°\cdot\tan 30°}=?$

a) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{3}$

d) $-\sqrt{3}$

حل:

$$\frac{\tan 60°-\tan 30°}{1+\tan 60°\cdot\tan 30°}=\tan 60-30=\tan 30=\frac{\sin 30}{\cos 30}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(د b جز سم دی).

21- که $\sin\theta=\frac{3}{5}$ او د θ دويمه ضلعه په لومړنی ناحيه کې وي، د $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ قيمتونه پيدا کړئ.

حل:

$a)\ \sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta$

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta\ ,\ \cos\theta=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{25-9}{25}}=\frac{4}{5}\Rightarrow\sin 2\theta=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$

$$b)\quad \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2(\frac{3}{5})^2 = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

$$c)\quad \tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{25} \cdot \frac{25}{7} = \frac{24}{7}$$

22- وښاياست چې: $\tan(45° + \theta) = \dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ کيږي.

حل:

$$\tan(45° + \theta) = \frac{\tan 45 + \tan\theta}{1 - \tan 45 \cdot \tan\theta} = \frac{1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$$

23- $\cos 37° \cos 53° - \sin 37° \sin 53°$ مساوي دی په:

a) 1　　b) -1　　c) 0　　d) درې واړه سم نه دی

حل:

$$\cos 37° \cos 53° - \sin 37° \sin 53° = \cos(37 + 53) = \cos 90 = 0$$

(د c جز سم دی).

24- $\cos 60° \cos 14° + \sin 60° \sin 14°$ مساوي دی په:

a) $\cos 74°$　　b) $\cos 46°$　　c) $\sin 74°$　　d) $\sin 46°$

حل:

$$\cos 60° \cos 14° + \sin 60° \sin 14° = \cos(60 - 14) = \cos 46$$

(د b جز سم دی).

-25

$$\cos 14° \cos 31° - \sin 14° \sin 31° = ?$$

a) $\cos 17°$　　b) $\cos 45°$　　c) $\sin 17°$　　d) $-\sin 17°$

حل:

$$\cos 14° \cos 31° - \sin 14° \sin 31° = \cos(14 + 31) = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(د b جز سم دی).

26- $\cos 80° \cos 35° + \sin 80° \sin 35°$ مساوي دی په:

a) $\cos 115°$　　b) $\sin 115°$　　c) $\cos 45°$　　d) $\sin 45°$

حل: $\cos 80° \cos 35° + \sin 80° \sin 35° = \cos(80 - 35) = \cos 45$

(د c جز سم دی).

27- که $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ ، $\sin\beta = \dfrac{5}{13}$ وي او α او β په لومړنۍ ناحيه کې واقع وي، $\cos(\alpha - \beta)$ پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې:

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$$

له بلې خوا:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{36}{65}+\frac{20}{65}=\frac{56}{65}$$

28- که $\cos\theta=-\frac{8}{17}$ ، $\cos\gamma=-\frac{3}{5}$ او د θ او γ دويمې ضلعې په دريمه ناحيه کې پرتې وي $\cos(\theta-\gamma)$ پيدا کړئ.

حل:

$$\cos(\theta-\gamma)=\cos\theta\cdot\cos\gamma+\sin\theta\cdot\sin\gamma$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-(-\frac{8}{17})^2}=\sqrt{1-\frac{64}{289}}=\sqrt{\frac{189-64}{289}}=\pm\sqrt{\frac{125}{289}}=-\frac{15}{17}$$

(د θ دويمه ضلعه په دريمه ناحيه کې واقع ده)

$$\sin\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\gamma}=\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$$

$$\cos(\theta-\gamma)=(-\frac{18}{17})(-\frac{3}{5})+(-\frac{15}{17})(-\frac{4}{5})=\frac{24}{85}+\frac{60}{85}=\frac{84}{85}$$

29- وښاياست چې $\tan x\cdot\tan y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}$ کېږي.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}=\frac{\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y-(\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y)}{\cos x\cos y+\sin x\cdot\sin y+\cos x\cos y-\sin x\cdot\sin y}$$

$$=\frac{2\cdot\sin x\sin y}{2\cos x\cos y}=\tan x\tan y$$

30- $\cos(0°-t)=?$

$a)\sin t$ $\quad b)\cos t$ $\quad c)-\sin t$ $\quad d)-\cos t$

حل: $\cos(0°-t)=\cos(-t)=\cos t$

(د b جز سم دی).

31- وښاياست چې: $\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\sin\theta$ دی.

$$\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{\cos\theta(2\sin\theta\cdot\cos\theta)}{1+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{2\sin\theta\cdot\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\frac{2\sin\theta\cdot\cos^2\theta}{2\cos^2\theta}=\sin\theta$$

يا:

$$\frac{\cos\theta\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\frac{\cos\theta(2\sin\theta\cos\theta)}{1+\cos^2\theta-1}=\sin\theta$$

32- وښایاست چې:

a) $\dfrac{\cos 8x+\cos 4x}{\cos 8x-\cos 4x}=-\cot 6x\cot 2x$

b) $\dfrac{\sin 4x+\sin 6x}{\cos 4x-\cos 6x}=\cot x$

c) $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\cos x-\cos 3x}=-\cot 2x$

d) $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=-\tan x$

e) $\dfrac{\sin t+\sin 3t}{\cos t+\cos 3t}=\tan 2t$

حل:

a) $\dfrac{\cos 8x+\cos 4x}{\cos 8x-\cos 4x}=\dfrac{2\cdot\cos\dfrac{8x+4x}{2}\cdot\cos\dfrac{8x-4x}{2}}{-2\sin\dfrac{8x+4x}{2}\cdot\sin\dfrac{8x-4x}{2}}=\dfrac{2\cos 6x\cdot\cos 2x}{-2\sin 6x\cdot\sin 2x}=-\cot 6x\cdot\cot 2x$

b) $\dfrac{\sin 4x+\sin 6x}{\cos 4x-\cos 6x}=\dfrac{2\sin\dfrac{6x+4x}{2}\cdot\cos\dfrac{6x-4x}{2}}{-2\sin\dfrac{4x+6x}{2}\cdot\sin\dfrac{4x-6x}{2}}=\dfrac{2\sin 5x\cdot\cos x}{-2\sin 5x(-\sin x)}=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

c) $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\cos x-\cos 3x}=\dfrac{2\cos\dfrac{x+3x}{2}\cdot\sin\dfrac{x-3x}{2}}{-2\sin\dfrac{x+3x}{2}\cdot\sin\dfrac{x-3x}{2}}=\dfrac{2\cos 2x}{-2\sin 2x}=-\cot 2x$

d) $\dfrac{\sin x-\sin 3x}{\cos x+\cos 3x}=\dfrac{2\cos\dfrac{x+3x}{2}\cdot\sin\dfrac{x-3x}{2}}{-2\cos\dfrac{x+3x}{2}\cdot\cos\dfrac{x-3x}{2}}=\dfrac{-2\cos 2x\cdot\sin x}{2\cos 2x\cdot\cos x}=-\tan x$

e) $\dfrac{\sin t+\sin 3t}{\cos t+\cos 3t}=\dfrac{2\sin\dfrac{t+3t}{2}\cdot\cos\dfrac{t-3t}{2}}{2\cos\dfrac{t+3t}{2}\cdot\cos\dfrac{t-3}{2}}=\dfrac{2\sin 2t\cdot\cos t}{2\cos 2t\cdot\cos t}=\tan 2t$

33- $\cos(x+y)\cos y+\sin(x+y)\sin y$ افاده مساوي ده په:

a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $-\sin x$ d) $-\cos x$

حل:

$(\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y)\cos y+(\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y)\sin y$

$=\cos x\cdot\cos^2 y-\sin x\cdot\sin y\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin^2 y$

$=\cos x\cos^2 y+\cos x\sin^2 y=\cos x(\cos^2 y+\sin^2 y)=\cos x$

(د b جز سم دی).

34- $\sin(x-y)\cos y+\cos(x-y)\sin y=?$

a) $\sin x$ b) $\cos x$ c) $-\sin x$ d) $-\cos x$

حل:

$$\sin x \cdot \cos^2 y - \cos x \cdot \sin y \cdot \cos y + \cos x \cdot \cos y \cdot \sin y + \sin x \cdot \sin^2 y$$
$$= \sin x \cdot \cos^2 y + \sin x \cdot \sin^2 y = \sin x(\cos^2 y + \sin^2 y) = \sin x$$

نو د a جز سم دی.

35- د هغه قطاع مساحت چې شعاع يې 2m او مرکزي زاويه يې 0.5Radian وي، مساوي دی په:

a) $3m^2$ b) $2m^2$ c) $1m^2$ d) دريواړه سمې نه دي

حل:

$$A = \frac{1}{2}R^2 \cdot \theta = \frac{1}{2}(2m)^2(0.5) = \frac{4m^2}{2}(0.5) = 1m^2$$

د c جز سم دی.

36- که د يوې قطاع مساحت $200cm^2$ او مرکزي زاويه يې 2 راډيانه وي، ددې دايرې شعاع مساوي ده په:

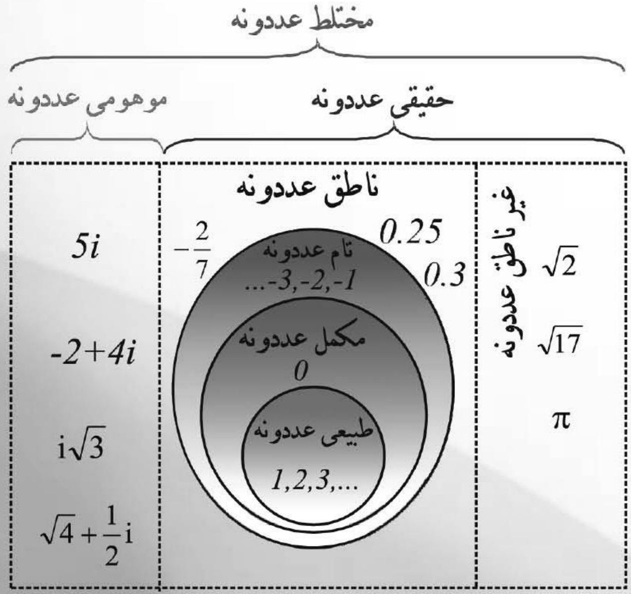
a) 14.14cm b) -14.14cm c) 14cm d) دريواړه سمې نه دي

حل:

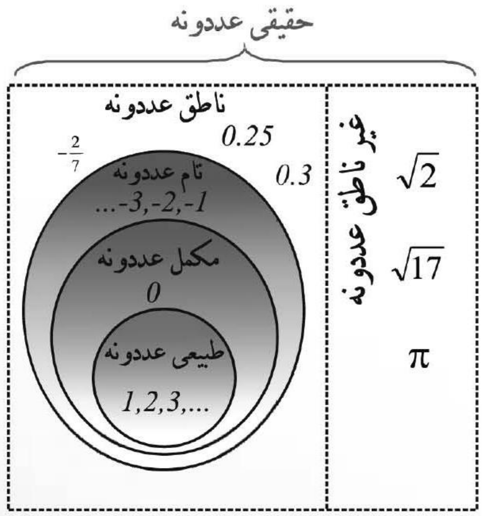
$$A = \frac{1}{2}R^2 \cdot \theta$$
$$200 = \frac{1}{2}R^2 \cdot 2 \Rightarrow R^2 = \sqrt{200} = 14.14cm$$

د a جز سم دی.

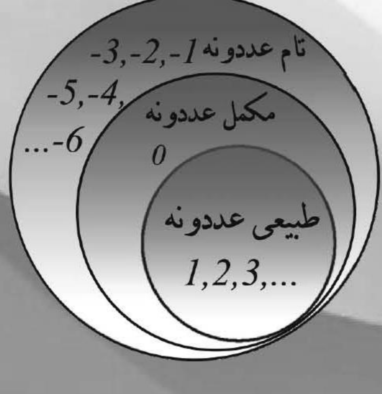
شپږم څپرکی
مختلط عددونه



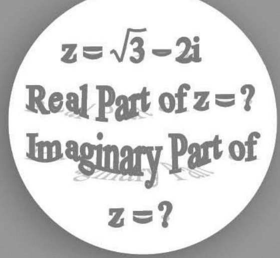
مختلط عددونه
موهومي عددونه
حقیقي عددونه
ناطق عددونه
غیر ناطق عددونه
5i
-2+4i
$i\sqrt{3}$
$\sqrt{4}+\frac{1}{2}i$
$-\frac{2}{7}$
0.25
0.3
تام عددونه
...-3,-2,-1
مکمل عددونه
0
طبیعي عددونه
1,2,3,...
$\sqrt{2}$
$\sqrt{17}$
π



حقیقي عددونه
ناطق عددونه
غیر ناطق عددونه
$-\frac{2}{7}$
0.25
0.3
تام عددونه
...-3,-2,-1
مکمل عددونه
0
طبیعي عددونه
1,2,3,...
$\sqrt{2}$
$\sqrt{17}$
π



تام عددونه -1,-2,-3
-5,-4,
...-6
مکمل عددونه
0
طبیعي عددونه
1,2,3,...



مختلط عددونه

د درسي کتاب (277)مخ **د لوست وخت**: (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې - **پوهنيزې** - **مهارتي** - **ذهنيتي**	ددې لوست په پای کې زده کوونکي بايد: • د مختلطو عددونو تعريف زده کړي، موهومي عددونه او د موهومي عددونو واحد وپيژني او د (i) توانونه پيدا کړای شي. • د مختلطو عددونو حقيقي او موهومي برخې وپيژني. • هرمختلط عدد په معياري شکل وليکلای شي. • د مختلطو عددونو خالصې حقيقي او موهومي برخې وښودلای شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې له هغو څخه ګټه واخيستلای شي.
د تدريس لارې (**ميتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	د لومړنيو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته داسې دويمه درجه معادلې پر چارت يا پر تخته وليکئ چې د حقيقي عددونو په سټ کې حل و نه لري، ترڅو زده کوونکي د مختلطو عددونو د سټ اړتيا او اهميت درک کړي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**:

د موهومي عددونو مفهوم زده کوونکو ته وروپيژنئ او د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره لومړی او دويم مثال حل کړئ. د (i) د توانونو د پيدا کولو طريقه زده کوونکو ته واضح کړئ، د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره دې دريم مثال حل شي. ددې لوست د 278 مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

څلورم مثال حل کړئ او د مختلطو عددونو د سټ اړتيا زده کوونکو ته واضح کړئ، صفري مختلط عدد زده کوونکو ته تعريف کړئ، د (280) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

ددې مخ لومړی او دويم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**:

د ارزونې لپاره ددې لوست لومړۍ پوښتنه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې**:

له زده کوونکو دويمه پوښتنه وکړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

واضح ده چې $\sqrt{-1}$ يو حقيقي عدد نه دی، $\sqrt{-1}=i$ دی چې i يو موهومي عدد دی، همدارنګه $2i, -3i, \sqrt{5}i$ موهومي عددونه دي.

-1

$i^2=-1$ $\qquad$ $i^{43}=-i$

$i^3=i^2\cdot i=-i$ $\qquad$ $i^{20}=1$

$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$ $\qquad$ $i^{23}=-i$

$i^{13}=(i^2)^6\cdot i=(-1)^6\cdot i=i$ $\qquad$ $-i^{25}=-i$

$i^{256}=1$

$(-i)^{-19}=\frac{1}{i}$

-2

$\sqrt{-1}=i\Rightarrow\sqrt{-2}=\sqrt{-1\cdot 2}=\sqrt{2}i$

$\sqrt{-3}=\sqrt{-1\cdot 3}=\sqrt{3}i$

$\sqrt{-4}=\sqrt{-1\cdot 4}=\sqrt{(2i)^2}=2i$

$\sqrt{-9}=\sqrt{-1\cdot 9}=\sqrt{(3i)^2}=3i$

-3

$-\sqrt{-400}=-20i$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{-40}}{\sqrt{-10}}=2$

$\sqrt{-7}=i\sqrt{7}=\sqrt{7}i$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{3}}=-2$

$\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-5}=-5$ $\qquad$ $\frac{1}{i^9}=-i$

$\sqrt{-8}\cdot\sqrt{-2}=-4$

$\sqrt{-1}b=ib=bi$

$\sqrt{\frac{-16}{25}}=\frac{4}{5}i$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{1}{-4}}=\frac{1}{2}i$

-4

$z_1=2-5i\Rightarrow \mathrm{Re}(z_1)=2 \quad , \quad \mathrm{im}(z_1)=-5$

$z_2=-3i\Rightarrow \mathrm{Re}(z_2)=0 \quad , \quad \mathrm{im}(z_2)=-3$

$z_3=-5\Rightarrow \mathrm{Re}(z_3)=-5 \quad , \quad \mathrm{im}(z_3)=0$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د $(i)^{-33}$, $(i)^{79}$, i^{202} , $(2i)^2$, $(3i)^2$ قيمتونه پيدا کړئ.

حل:

$a)\ i^{-33}=\frac{1}{i^{33}}=\frac{1}{i^{4\cdot 8+1}}=\frac{1}{1\cdot i}=\frac{1}{i}=\frac{(1)(i)}{i(i)}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i$

$b)\ (i)^{79}=(i)^{4\cdot 19+3}=i^{4\cdot 19}\cdot i^2\cdot i=1(-1)\cdot i=-i$

$c)\ (i)^{202}=i^{4\cdot 50+2}=i^{4\cdot 50}\cdot i^2=1(-1)=-1$

$d)\ (2i)^2=4i^2=4(-1)=-4$

$e)\ (3i)^2 = 9i^2 = 9(-1) = -9$

2- لاندې عددونه د مختلطو عددونو په معياري شکل وليکئ.

حل:

$-i-4 \quad , \quad 5i \quad , -4i+\sqrt{2} \quad , \quad -3i$

$a)\ -i-4 = -4-i$
$b)\ 5i = 0+5i$

$c)\ -4i+\sqrt{2} = \sqrt{2}-4i$

$d)\ -3i = 0-3i$

3- د $\sqrt{5}-\sqrt{7i},\ 7-i,\ 5+3i,\ -3i$ مختلط عددونه د مرتبو جوړو په شکل وليکئ.

$a)\ -3i = (0.-3)$

$b)\ 5+3i = (5,3)$

$c)\ 7-i = (7.-1)$

$d)\ \sqrt{5}-\sqrt{3}i = (\sqrt{5},-\sqrt{3})$

4- د $i-$ د مختلط عدد حقيقي برخه مساوي دی په:

$a)1 \quad b)-1 \quad c)0 \quad d)2$

حل: څرنګه چې د $i-$ حقيقي برخه 0 ده، نو د c جز سم دی.

5- د $\sqrt{-16}$ د عدد جذر مساوي دی په:

$.a)\ \pm 4 \quad b)-4 \quad c)\pm 4i \quad d)\pm 2$

حل: $\sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = \pm 4i$ د c جز سم دی.



د موهومي عددونو څلور ګوني عملیې

د درسي کتاب (283) **مخ**　　　**د لوست وخت:** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې - **پوهنيزې** - **مهارتي** - **ذهنيتي**	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د موهومي عددونو څلور ګوني عملې زده کړي او په دې پوه شي چې د موهومي عددونو د جمعې او ضرب په عملیو کې د تبديلي خاصيت صدق کوي. • موهومي عددونه سره جمع، تفريق، ضرب او تقسيم کړای شي او په دې پوه شي چې د دوو موهومي عددونو د ضرب او وېش حاصل يو حقيقي عدد دی. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې له دې عمليو څخه ګټه واخيستلای شي.
د تدريس لارې (**ميتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنو فعاليتونو څخه وروسته په داسې حال کې چې د ورودي شکل چارت موجود وي، د تختې پر مخ دې ورودي پوښتنه وليکل شي او د انګيزې د پيدا کولو لپاره له زده کوونکو دا پوښتنه وکړئ. $3i + 4i = 7i$ $(10i)(5i) = 50i^2 = 50(-1) = -50$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې:**

لومړی، دويم او دريم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ او ددې لوست لومړی فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي څلورم مثال هم د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ. او ددې لوست دويم فعاليت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**

له پوښتنو څخه لومړۍ پوښتنه دې حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې:**

ددې لوست دويمه پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

• $\sqrt{3-x}$ يو موهومي عدد دی که د $(3-x)$ عدد منفي وي.

$3 - x < 0 \qquad 3 < x$

په هغه صورت کې چې $x > 3$ وي، نو $\sqrt{3-x}$ يو موهومي عدد دی.

د $\sqrt{2-3x}$ عدد په هغه صورت کې يو موهومي عدد دی چې که $(2-3x)$ منفي وي. يا $x > \frac{2}{3}$ وي.

• $(\sqrt{2+\sqrt{3}}) + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}} + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = 4 + 2\sqrt{4-3}$
$= 4 + 2 = 6$

ځرنگه چې $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ عدد يو مثبت عدد دی، نو د $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ عدد د 6 د عدد مربع جذر دی.

همدارنگه $10=(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$ کيږي، نو د $(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})$ عدد د 10 د عدد مربع جذر دی.

د پوښتنو ځوابونه:

1- جمع يې کړئ.

$\sqrt{-1}\ b+\sqrt{-1}\,c \quad , \quad \sqrt{-7}+\sqrt{-4} \quad , \quad \sqrt{7}i+\sqrt{7}i$

حل:

$a)\ (\sqrt{-1}\,b+\sqrt{-1}\ c)=ib+ic=(b+c)i$

$b)\ \sqrt{-7}+\sqrt{-4}=\sqrt{7}i+2i=(2+\sqrt{7})i$

$c)\ \sqrt{7}i+\sqrt{7}i=(\sqrt{7}+\sqrt{7})i=2\sqrt{7}i$

2- تفريق يې کړئ.

$\sqrt{5}i-\sqrt{5}i \quad , \quad 12i-7i \quad , \quad 5i-2i$

حل:

a) $\sqrt{5}i-\sqrt{5}i=(\sqrt{5}-\sqrt{5})i=0i$

b) $12i-7i=(12-7)i=5i$

c) $5i-2i=(5-2)i=3i$

3- لانديني موهومي عددونه ضرب او تقسيم کړئ.

a) $(\frac{7}{4}i)(\frac{-2}{9}i)=(\frac{7}{4})(\frac{-2}{9})i\cdot i=-\frac{7}{18}i^2=-\frac{7}{18}(-1)=\frac{7}{18}$

b) $(\sqrt{7}i)(-7i)=(\sqrt{7})(-7)(i\cdot i)=-7\cdot\sqrt{7}i^2=7\sqrt{7}$

c) $(3i)(5i)=3\cdot 5i\cdot i=15i^2=-15$

d) $\frac{16i}{-4i}=\frac{16}{-4}=-4$

e) $\frac{13i}{26i}=\frac{13}{26}=\frac{1}{2}$



د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې

د درسي کتاب (285)مخ **د لوست وخت**: (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې - پوهنیزې - مهارتي - ذهنیتي	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د مختلطو عددونو د جمع کولو او تفریق کولو عملیې زده کړي. • مساوي مختلط عددونه، دمختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینیت عنصر او جمعې معکوس یې وپیژني. • مختلط عددونه جمع او تفریق کړای شي. • د مختلطو عددونو جمعې معکوسونه پیدا کړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حل کې له دې عملیو څخه استفاده وکړای شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له لومړنو فعالیتونو څخه وروسته د انګیزې د پیدا کولو لپاره یا د چارت او یا د تختې له مخې د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. $3x-2yi=6+i$ $\quad 3x=6\Rightarrow x=2$ $\quad -2y=1\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

5- د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې**:

د مساوي مختلطو عددونو له تعریفولو څخه وروسته د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره دې لومړی مثال حل شي.

د 285 مخ فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي.

د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې له تعریفولو څخه وروسته دې دویم مثال حل شي او د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینیت عنصر دې وروپیژندل شي، د یو مختلط عدد جمعې معکوس دې تعریف شي. همدارنګه دې وروښودل شي چې د یو مختلط عدد او د عدد د جمعې معکوس د جمعې حاصل د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینیت عنصر دی. ددې لوست دویم فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي د مختلطو عددونو د تفریق د عملیې له تعریفولو څخه وروسته دې لومړی او دویم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل شي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

ددې لوست د پوښتنو څخه لومړۍ پوښتنه دې حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**:

له پوښتنو څخه دویمه پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

• لاندې مختلط عددونه په معیاري حالت کې عبارت دي له:

$(1-i)-(3+4i)+2i=-2-3i$

$(2a+ib)-(2a-ib)=0+2bi=2bi$

$(3+5i)+(2+4i)=5+9i$

$(8-3i)+(-5+6i)=3+3i$

$(3-4i)-(-5+6i)=8-10i$

$2+(3i+5)=7+3i$

$(2-5i)-(3+4i)-(-2+i)=1-10i$

$-i-2-(3-4i)-(5-2i)=-10+5i$

- که لاندیني مختلط عددونه سره مساوي وي، د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

$(2x-1)+(3y+2)i=5-4i$

$2x-1=5 \qquad 3y+2=-4$

$x=3 \qquad y=-2$

- که لاندیني مختلط عددونه سره مساوي وي، د m او k قیمتونه پیدا کړئ.

د $(m,k\in IR)$ $2+mi=k-3i$ لپاره لرو چې: $k=2$, $m=-3$

- که لاندیني مختلط عددونه سره مساوي وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

$a+3i=5+3bi+2a \Rightarrow a=-5 \qquad b=1$

- که $z_1=x+3y-2i$ او $z_2=1-(x+2y)i$ په داسې حال کې چې $z_1=z_2$ وي نو $x=4$ او $y=-1$ دي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- لاندې مختلط عددونه سره جمع کړئ.

$a)\ (2+5i)+(3+4i)=(2+3)+(5+4)i=5+9i$

$b)\ (-3+6i)+(10-7i)=(-3+10)+(6-7)i=7-i$

$c)\ (13-12i)+(13+12i)=(13+13)+(-12+12)i=26+0i=26$

$d)\ (\sqrt{3}-ci)+(d+5ci)=(\sqrt{3}+d)+(-c+5c)i=(\sqrt{3}+d)+4ci$

2- لاندې مختلط عددونه یو له بله تفریق کړئ.

$a)\ (5-i)-(7+3i)=(5-i)+(-7-3i)=(5-7)+(-1-3)i=-2-4i$

$b)\ (2\sqrt{3}+5\sqrt{7}i)-(\sqrt{3}+3\sqrt{7}i)=2\sqrt{3}+5\sqrt{7}i+(-\sqrt{3}-3\sqrt{7}i$

$=(2\sqrt{3}-\sqrt{3})+(5\sqrt{7}-3\sqrt{7})i=\sqrt{3}+2\sqrt{7}i$

$c)\ (3c+4di)-(3c+8di)=(3c+4di)+(-3c-8di)=(3c-3c)+(4d-8d)i=-4di$

3- د لاندې مختلطو عددونو جمعي معکوسونه پیدا کړئ.

$2+3i \ , \quad (2,-3) \ , \quad \sqrt{2}+\sqrt{3}i$

د a حل:: د $2+3i$ جمعې معکوس $-2-3i$ څخه عبارت دی.

ځکه چې: $(2+3i)+(-2-3i)=(2-2)+(3-3)i=0+0i$

د b حل: د $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$ جمعې معکوس له $-\sqrt{2}-\sqrt{3}i$ څخه عبارت دی.

ځکه چې: $(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)+(-\sqrt{2}-\sqrt{3}i)=(\sqrt{2}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{3})i=0+0i$

د c حل: د $(2,-3)$ جمعي معکوس له $(-2,3)$ څخه عبارت دی.

4- که چیرې $(x,y,\in R)$ او $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ وي، د y,x قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$3x+2iy-ix+5y=3x+5y+(2y-x)i$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-x+2y=5\\3x+5y=7\end{cases}\qquad\begin{cases}-3x+6y=15\\3x+5y=7\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$$

5- لاندینې عملیې سرته ورسوي او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

a) $(2+3i)+(-5+2i)=(2-5)+(3+2)i=-3+5i$

b) $(-5-4i)-(-2-\sqrt{2}i)=(-5-4i)+(2+\sqrt{2}i)=(-5+2)+(-4+\sqrt{2})i$
$=-3+(-4+\sqrt{2})i$

c) $(2+3i)+(-5-i)=(2-5)+(3i-i)=-3+(3-1)i=-3+2i$

d) $(6-5i)+(3+2i)=(6+3)+(-5+2)i=9-3i$

e) $(3.7+6.1i)-(1+5.9i)=(3.7+6.1i)+(-1-5.9i)=(3.7-1)+(6.1-5.9)i$
$=2.7+0.2i$

f) $(8+\frac{3}{4}i)-(-7+\frac{2}{3}i)=(8+7)+(\frac{3}{4}-\frac{2}{3})i=15+\frac{1}{12}i$

g) $(-6-\frac{5}{8}i)+(4+\frac{1}{2}i)=(-6+4)+(-\frac{5}{8}+\frac{1}{2})i=-2-\frac{1}{8}i$

h) $(-2+5i)+(3-i)=(-2+3)+(5-1)i=1+4i$

i) $(3+\frac{3}{5}i)-(-11+\frac{7}{15}i)=(3+11)+(\frac{3}{5}-\frac{7}{15})i=14+\frac{2}{15}i$

j) $(-4-\frac{5}{6}i)+(13+\frac{3}{8}i)=(-4+13)+(-\frac{5}{6}+\frac{3}{8})i=9-\frac{11}{24}i$

k) $(-7-\sqrt{-72})+(8+\sqrt{-50})=(-7-\sqrt{-1}\sqrt{72})+(8+\sqrt{-1}\sqrt{50}$
$=(-7-\sqrt{72}i)+(8+\sqrt{50}i)=(-7+8)+(-\sqrt{72}+\sqrt{50})i=1+(\sqrt{50}-\sqrt{72})i$

l) $(\sqrt{3}+\sqrt{-2})-(\sqrt{12}+\sqrt{8})=\sqrt{3}+\sqrt{2}i-\sqrt{12}-\sqrt{8}=(\sqrt{3}-\sqrt{12}-\sqrt{8})+\sqrt{2}i$
$=\sqrt{3}-2\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{2}i=(-\sqrt{3}-2\sqrt{2})+\sqrt{2}i$

6- د لاندې مختلطو عددونو جمعې معکوسونه پیدا کړئ.

$a)2-3i$

چې جمعي معکوس یې $-2+3i$ دی.

$b)1-i\Rightarrow-1+i$ (جمعي معکوس)

$c)5-8i\Rightarrow-5+8i$ (جمعي معکوس)

$d)-5i\Rightarrow5i$ (جمعي معکوس)

$e) 8+11i \Rightarrow -8-11i$ (جمعي معكوس)

$f) -1+i \Rightarrow 1-i$ (جمعي معكوس)

$g) -13+13i \Rightarrow 13-13i$ (جمعي معكوس)

$h) 2i \Rightarrow -2i$ (جمعي معكوس)



د مختلطو عددونو د ضرب عمليه

د درسي کتاب (289)مخ **د لوست وخت:** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې **- پوهنيزې** **- مهارتي** **- ذهنيتي**	ددې لوست په پای کې زده کوونکي بايد: • د دوو مختلطو عددونو د ضرب کولو په طريقه وپوهيږي. • د يو مختلط عدد مزدوج وپيژني. • د يو مختلط عدد د ضربي معکوس د پيداکولو طريقه زده کړي. • مختلط عددونه يو له بله سره ضرب کړای شي. • د مختلطو عددونو مزدوجونه پيدا کړای شي. • د رياضي د مسايلو په حلولو کې له مختلطو عددونو څخه استفاده وکړای شي او اهميت يې درک کړي.
د تدريس لارې (**ميتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړې تر څو انګيزه پيدا شي. $(2-3i)(3+4i)=6+8i-9i-12i^2=6-i-12(-1)=6-i+12=18-i$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**:

د ضرب د عمليې له تعريفوولو وروسته دې لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي او د دې لوست لومړنی فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي. د يو مختلط عدد مزدوج دې زده کوونکو ته توضيح شي، ترڅو د هر مختلط عدد مزدوج پيدا کړای شي او دا زده کړي چې د دوو مختلطو عددونو د جمعې او ضرب حاصل يو حقيقي عدد، خو د دوو مختلطو عددونو د تفريق حاصل يو موهومي عدد دی.

دويم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي او ددې لوست دويم فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي. د يو مختلط عدد د ضربي معکوس د پيداکولو طريقه دې توضيح شي او د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره دې دريم او څلورم مثال حل شي او ددې لوست اخيرنی فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**

ددې لوست د لومړۍ پوښتنې يوه برخه دې حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې**:

د دويمې پوښتنې يوه برخه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- د مختلطو عددونو الجبري خاصيتونه:

که z_3, z_2, z_1 مختلط عدونه وي، نو لاندې خاصيتونه په کې صدق کوي.

1- د جمعې د عمليې د تبديلي خاصيت: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

2- د جمعې د عمليې اتحادي خاصيت: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

3- د جمعې د عمليې د بستګي خاصيت: $z_1 \in C, z_2 \in C \Rightarrow (z_1 + z_2) \in C$

4- د ضرب د عمليې د تبديلي خاصيت: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

5- د ضرب د عمليې اتحادي خاصيت: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

6- د ضرب د عمليې د بستګي خاصيت: $z_1 \in C, z_2 \in C \Rightarrow (z_1 \cdot z_2) \in C$

7- د ضرب د عمليې توزيعي خاصيت پر جمع باندې: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

-

$(2i)(4i) = -8$ $\qquad$ $(3-i)(4+i) = 13 - i$

$-2i(4-6i) = -12 - 8i$ $\qquad$ $(1+2i)(3-4i) = 11 + 2i$

$(3-\sqrt{-4})(-2+\sqrt{-49}) = 8 + 25i$ $\qquad$ $(2+9i)(2-9i) = 85$

$(2-3i)(1+i) = 5 - i$ $\qquad$ $(1+i)(2+3i) = -1 + 5i$

$(5+2\sqrt{-4})(3-\sqrt{-4}) = 23 + 2i$ $\qquad$ $(2+\sqrt{-3})(3-\sqrt{-3}) = 9 + \sqrt{3}i$

-

عدد	$1+2i$	$2-3i$	$\sqrt{2}+\sqrt{3}i$	$2a-b$	$1-2i$	$-3-5i$	$-3i$
ضربي معکوس	$\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$	$-\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{i}{3}$	$\frac{2a}{b^2+4a}+\frac{bi}{b^2+4a}$	$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$	$-\frac{3}{34}+\frac{5}{34}i$	$\frac{1}{3}i$

-

$(1+i)^2 = 2i$

$(1-i)^{18} = [(1-i)^2]^9 = (1-2i+i^2)^9 = (1-2i-1)^9 = (-2i)^9 = -2^9 \cdot i^9 = -2^9 i$

$z = 2 + 5i \Rightarrow z^{-1} = \frac{2}{29} - \frac{5}{29}i$

$(2+3i)^2 = -5 + 12i$ $\qquad$ $(3-4i)^{-1} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$

$(3-2i)^2 = 5 - 12i$ $\qquad$ $(3,4)^2 = -7 + 24i$

$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2ab$ $\qquad$ $(3-\sqrt{-4})^{-3} = \frac{-9}{2197} + \frac{46}{2197}i$

$(a+bi)^{-2} = \frac{a^2 - b^2}{(a^2+b^2)^2} - \frac{2ab}{(a^2+b^2)}i \quad (a \neq 0\ ,\ \ b \neq 0)$

$(a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i$

$(a-bi)^3 = a^3 - 3ab^2 - (3a^2b - b^3)i$

همدارنګه $a^4 = (-ai)^4$ دی.

$(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-3}=1 \qquad (-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-3}=1 \qquad (-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-2}(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=1$

•

$$(3-\sqrt{-4})^{-3}=\frac{1}{(3-\sqrt{-4})^3}=\frac{1}{(3-\sqrt{4}\sqrt{-1})^3}=\frac{1}{(3-2i)^3}=\frac{(3+2i)^3}{(3-2i)^3(3+2i)^3}$$

$$=\frac{(3)^3+3\cdot 3^2\cdot 2i+3\cdot 3(2i)^2+(2i)^3}{[(3-2i)(3+2i)]^3}=\frac{27+54i-36-8i}{(9+4)^3}=\frac{-9+46i}{2197}=\frac{-9}{2197}+\frac{26}{2197}i$$

•

$$(a+bi)^{-2}=\frac{1}{(a+bi)^2}\cdot\frac{(a-bi)^2}{(a-bi)^2}=\frac{(a-bi)^2}{[(a+bi)(a-bi)]^2}=\frac{a^2-2abi-b^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}-\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}i$$

$(a\neq 0, b\neq 0)$

$$(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^{-3}=\frac{1}{(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3}=\frac{1}{(-\frac{1}{2})^3-3(-\frac{1}{2})^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i+3(-\frac{1}{2})\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2-(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3}$$

$$=\frac{1}{-\frac{1}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{8}i-\frac{9}{8}i^2+\frac{3\sqrt{3}}{8}i}=\frac{8}{-1-3\sqrt{3}i+9+3\sqrt{3}i}=\frac{8}{8}=1$$

• خاصیت هاي مزدوج یک عدد مختلط:

$z=\overline{z}$ که z یو حقیقي عدد وي:

$1:\ \overline{(\overline{z_1})}=z_1 \qquad 2:\ \overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}\ ,\ \overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

$3:\ \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2} \qquad 4:\ \overline{(\frac{z_1}{z_2})}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad (z_2\neq 0)$

$5:\ \overline{(\frac{1}{z_1})}=\frac{1}{\overline{z_1}} \qquad (z_1\neq 0) \qquad 6:\ \overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$

$7:\ |z_1|=|\overline{z}_1|=|-z_1|=|-\overline{z}| \qquad 8:\ z_1\cdot\overline{z}_1=|z_1|^2$

- $x^2+4=(x+2i)(x-2i)$
- $x^2+9=(x+3i)(x-3i)$
- $x^2+2x+5=[(x+1)+2i][(x+1)-2i]$
- $x^2-6x+11=[x-3+\sqrt{2}i][x-3-\sqrt{2}i]$

د پوښتنو ځوابونه:

1- لاندې مختلط عددونه سره ضرب کړئ.

a) $(2+i)(3-2i)=2(3)+2(-2i)+3(i)-2(i)^2=6-4i+3i+2=8-i$

b) $(-2+3i)(4-2i)=-8+4i+12i-6i^2=-8+16i+6=-2+16i$

c) $(5+2i)(5-3i)=25-15i+10i-6i^2=25-5i-6(-1)=25-5i+6=31-5i$

d) $(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)=3-\sqrt{6}i+\sqrt{6}i+2=5$

e) $(3+i)(3-i)=9-3i+3i-i^2=9+1=10$

f) $(2-5i)(2+5i)=4+10i-10i-25i^2=4+25=29$

g) $(\sqrt{6}+i)(\sqrt{6}-i)=6-i^2=7$

2- د لاندینیو مختلطو عددونو ضربي معکوس پیدا کړئ.

$1-i\ ,\ \ 2+4i\ ,\ \ 5-3i\ \ ,\ \ 3a-4bi\ \ ,\ \ (7,4)$

حل: د $1-i$ ضربي معکوس:

a) $\frac{1}{(1-i)}\frac{(1+i)}{(1+i)}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$:2+4i$

b) $\frac{1}{(2+4i)}\frac{(2-4i)}{(2-4i)}=\frac{2-4i}{20}=\frac{1}{10}-\frac{1`}{5}i$

c) $\frac{1}{(5-3i)}\frac{(5+3i)}{(5+3i)}=\frac{5+3i}{25+9}=\frac{5+3i}{34}=\frac{5}{34}+\frac{3}{34}i$

یا په مستقیمه طریقه (Direct method) کولای شو چې د 5-3i عدد ضربي معکوس په لاندې ډول په لاس راوړو:

$(5-3i)(x+yi)=1+0i$

$5x+5yi-3xi-3yi^2=1+0i$

$5x+3y=1$

$5y-3x=0\Rightarrow x=\frac{5}{34}\qquad y=\frac{3}{34}$

نو د 5-3i جمعي معکوس عبارت دی له:

$\frac{5}{34}+\frac{3}{34}i$

d) $\frac{1}{(3a-4bi)}(\frac{3a+4bi}{3a+4bi})=\frac{3a+4bi}{9a^2-16b^2i^2}=\frac{3a+4bi}{9a^2+16b^2}=\frac{3a}{9a^2+16b^2}+\frac{4b}{9a^2+16b^2}i$

لومړی $(7,4)$ د $7+4i$ په شکل لیکو او بیا یې ضربي معکوس پیدا کوو:

یا په مستقیم ډول:

$(3a-4b):(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2})=(\frac{3a}{9a^2+16b^2},\frac{4b}{9a^2+16b^2}i)$

e) $(7,4):(\frac{7}{49+16},\frac{-4}{49+16})=(\frac{7}{65},\frac{-4}{65}i)$

$\frac{1}{7+4i}\frac{(7-4i)}{(7-4i)}=\frac{7-4i}{49+16}=\frac{7-4i}{65}=\frac{7}{65}-\frac{4}{65}i$

3- لاندې افادې تجزیه کړئ.

a) $x^2+16=x^2-(-1)16=x^2-16i^2=x^2-(4i)^2=(x-4i)(x+4i)$

b) $x^2+8=x^2-(-1)8=x^2-8i^2=x^2-(\sqrt{8}i)^2=(x-\sqrt{8}i)(x+\sqrt{8}i)$

c) $x^2+5=x^2-(-1)5=x^2-5i^2=x^2-(\sqrt{5}i)^2=(x-\sqrt{5}i)(x+\sqrt{5}i)$

d) $x^2+7=x^2-(-1)7=x^2-7i=x-(\sqrt{7}i)^2=(x-\sqrt{7}i)(x+\sqrt{7}i)$

4- د $(-3+2i)^2$ او $(2+i)^2$ قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$a) \quad (2+i)^2 = (2+i)(2+i) = 4+2i+2i+i^2 = 4+4i-1 = 3+4i$

$b) \quad (-3+2i)^2 = (-3+2i)(-3+2i) = 9-6i-6i+4i^2 = 9-12i-4 = 5-12i$

5- که $z = 4-3i$ وي، $8z - z^2$ پیداکړئ.

حل:

$8z = 8(4-3i) = 32-24i$

$z^2 = (4-3i)^2 = (4-3i)(4-3i) = 16-12i-12i+9i^2 = 16-12i-7-24i$

$8z - z^2 = (32-24i)-(7-24i) = 25$

6- د $x + yi = (2-3i)(2+3i)$ معادله حل پیداکړئ.

حل:

$(2-3i)(2+3i) = 4+6i-6i-9i^2 = 4+9 = 13$

$x + yi = 13 + 0i$ یا $x + yi = 13$

$\Rightarrow x = 13 \quad , \qquad y = 0$

7- وښایاست چې: $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ د i د عدد د مربع جذر دی.

حل:

$(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^2$

$\frac{2}{4} + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{2}{4}i^2 = \frac{2}{4} + \frac{2}{2}i - \frac{2}{4} = i$

یا: $(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = i$

8- وښایاست چې: $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ د $-i$ د عدد دریم جذر دی.

$(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^3 = (\frac{\sqrt{3}}{2})^3 - 3(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\frac{1}{2}i) + 3(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2}i)^2 - (\frac{1}{2})^3$

$= \frac{\sqrt{27}}{8} - \frac{9}{8}i - 3\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{8}i = \frac{\sqrt{27} - 9i - 3\sqrt{3} + i}{8} = \frac{-8i}{8} = -i$

یا: $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^3 = -i$ کیږي.

$$\frac{-2-2i}{-5+6i}=?$$

د مختلطو عددونو د وېش عمليه
(Divison of tow complex numbers)

د درسي کتاب (293) مخ **د لوست وخت:** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې - **پوهنيزې** - **مهارتي** - **ذهنيتي**	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • يو پر بل باندې د دوو مختلطو عددونو وېشل زده کړي. • د وېش حاصل په معياري شکل وليکلای شي. • د مختلطو عددونو د مزدوج خاصيتونه پر مختلطو عددونو تطبيق کړای شي. • د رياضي د مسايلو په حل کې د مختلطو عددونو له وېش څخه ګټه واخيستلای شي او اهميت يې درک کړي.
د تدريس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	د لومړنو فعاليتونوڅخه وروسته د انګيزې د پيداکولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. $\frac{-2-2i}{-5+6i}=\frac{(-2-2i)(-5-6i)}{(-5+6i)(-5-6i)}=\frac{10+12i+10i+12i^2}{25+30i-30i-36i^2}=\frac{-2+22i}{61}$ $=\frac{-2}{61}+\frac{22}{61}i$

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې:**

له دې څخه وروسته چې دګوياکولو طريقه زده کوونکو ته توضيح شي، لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ او د 293 مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي. د مختلطو عددونو د وېش د عمليې له تعريفولو څخه وروسته دويم او دريم مثال حل کړئ.

له دې وروسته چې د يو مختلط عدد د مزدوج خاصيتونه توضيح شي د 295 لومړی او دويم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د (295) مخ فعاليت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**

د لومړۍ پوښتنې يوه برخه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې:**

د دويمې پوښتنې يوه برخه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1-

- $\frac{2+i}{3-i}\cdot\frac{5+2}{1+i}=\frac{5}{2}+i$
- $\frac{6+2i}{5-i}\cdot\frac{1-3i}{2+6i}=-\frac{16}{65}-\frac{37}{65}i$
- $\frac{4-3i}{4+3i}=\frac{7}{25}-\frac{24}{25}i$
- $\frac{4+i}{6+2i}=\frac{13}{20}-\frac{1}{20}i$

که $z_1=2+4i$ و $z_2=1-3i$ وي $\frac{z_1}{z_2}$ مساوي دی په:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+4i}{1-3i}=(2+4i)(1-3i)^{-1}=(2+4i)(\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i)=\frac{2+4i}{10}+\frac{6i+12i^2}{10}=\frac{-10}{10}+\frac{10}{10}i=-1+i$$

-2

- $\frac{1}{2-\sqrt{-9}}=\frac{1}{2-i\sqrt{9}}=\frac{1}{2-3i}=\frac{1}{(2-3i)}\cdot\frac{2+3i}{(2+3i)}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$
- $\frac{2}{5i}=\frac{2}{5i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{2i}{5i^2}=\frac{2i}{-5}=-\frac{2}{5}i$
- $\frac{1+3i}{2i}=\frac{(1+3i)}{(2i)}\cdot\frac{i}{i}=\frac{i+3i^2}{2i^2}=\frac{i-3}{-2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$
- $\frac{1}{2+4i}=0.1-0.2i$
- $\frac{4+3i}{1+2i}=\frac{(4+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{4-5i-6i^2}{1-4i^2}=2-i$
- $\frac{7+i}{2+i}=\frac{(7+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{14-5i-i^2}{4-i^2}=\frac{14-5i+1}{4+1}=3-i$
- $\frac{8.14+2.63i}{3.04+6.27i}=\frac{(8.14+2.63i)}{(3.04+6.27i)}\cdot\frac{(3.04-6.27i)}{(3.04-6.27i)}$

$$=\frac{(8.14)(3.04)-(8.14)(6.27i)+(2.63i)(3.04)-(2.63i)(6.27i)}{(3.04)^2+(6.27)^2}=0.85-0.89i$$

- $\frac{5-\sqrt{-4}}{7}=\frac{5-i\sqrt{4}}{7}=\frac{5-2i}{7}=\frac{5}{7}-\frac{2}{7}i$
- $\frac{1}{2+4i}=0.1-0.2i$
- $\frac{4+3i}{1+2i}=2-i$
- $\frac{7+i}{2+i}=3-i$
- $(\frac{1-i}{1+i})^{10}=\left[\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right]^{10}=\left[\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}\right]^{10}=\left[\frac{1-2i-1}{1-(-1)}\right]^{10}=(\frac{-2i}{2})^{10}=(-i)^{10}=i^{10}=i^2=-1$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د وېش حاصلونه یې پیدا کړئ.

$$\frac{7-i}{3-5i} \quad , \quad \frac{5-2i}{6-i} \quad , \quad \frac{3-4i}{2-5i} \quad , \quad \frac{1+i}{1-1}$$

حل:

$$a)\quad \frac{7-i}{3-5i}=\frac{(7-i)}{(3-5i)}\frac{(3+5i)}{(3+5i)}=\frac{21+35i-3i-5i^2}{9+25}=\frac{26+32i}{34}=\frac{13}{17}+\frac{16}{17}i$$

$$b)\quad \frac{5-2i}{6-i}=\frac{(5-2i)}{(6-i)}\frac{(6+i)}{(6+i)}=\frac{30+5i-12i-2i^2}{36+1}=\frac{30-7i+2}{37}=\frac{32}{37}-\frac{7}{37}i$$

$$c)\quad \frac{3-4i}{2-5i}=\frac{(3-4i)}{(2-5i)}\frac{(2+5i)}{(2+5i)}=\frac{6+15i-8i-20i^2}{4+25}=\frac{26+7i}{29}=\frac{26}{29}+\frac{7}{29}i$$

$$d)\quad \frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)}{(1-i)}\frac{(1+i)}{(1+i)}=\frac{1+i+i+i^2}{1+1}=\frac{2i}{2}=i=0+i$$

2- که $z_1=-a-3bi$ او $z_2=2a-3bi$ وي، وښایاست چې $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ او $\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right)=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_3}}$ دي.

حل:

$$z_1\cdot z_2=(-a-3bi)(2a-3bi)=-2a^2+3abi-6abi+9b^2i^2=-2a^2-9b^2-3abi\Rightarrow\overline{z_1\cdot z_2}$$
$$=-2a^2-9b^2+3abi$$
$$\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2=(-a+3bi)(2a+3bi)=-2a^2-3abi+6abi+9b^2i^2=-2a^2+3abi-9b^2$$
$$=-2a^2-9b^2+3abi\Rightarrow\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-a-3bi}{2a-3bi}=\frac{(-a-3bi)}{(2a-3bi)}\frac{(2a+3bi)}{(2a+3bi)}=\frac{-2a^2-3abi-6abi-9b^2i^2}{4a^2+9b^2}=\frac{-2a^2+9b^2-9abi}{4a^2+9b^2}$$
$$=\frac{-2a^2+9b^2}{4a^2+9b^2}-\frac{9ab}{4a^2+9b^2}i$$
$$\left(\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right)=\frac{-2a^2+9b^2}{(4a^2+9b^2)}+\frac{9ab}{4a^2+9b^2}i\ ....(I)$$
$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{-a+3bi}{2a+3bi}=\frac{(-a+3bi)}{(2a+3bi)}\frac{(2a-3bi)}{(2a-3bi)}=\frac{-2a^2+3bi+6abi-9b^2i^2}{4a^2+9b^2}=\frac{-2a^2+9abi+9b^2}{4a^2+9b^2}$$
$$=\frac{-2a^2+9b^2}{4a^2+9b^2}+\frac{9ab}{4a^2+9b^2}i\ ....\ II$$

د I او II مقایسو لرو چې : $\overline{\frac{z_1}{z_2}}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

3- د وېش حاصلونه پیداکړئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

$$a)\quad \frac{2}{5-i}=\frac{(2)}{(5-i)}\left(\frac{5+i}{5+i}\right)=\frac{10+2i}{25+1}=\frac{10+2i}{26}=\frac{10}{26}+\frac{2i}{26}=\frac{5}{13}+\frac{1}{13}i$$

$$b)\quad \frac{3-i}{2+i}=\frac{(3-i)}{(2+i)}\frac{(2-i)}{(2-i)}=\frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}=\frac{5-5i}{5}=1-i$$

c) $\frac{2-3i}{3}=\frac{2}{3}-i$

4- د $\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ د وېش حاصل مساوي دی په:

a) 1 b) 2 c) 3i d) -2

حل:

$$\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}=\frac{(6+6i)}{(3+3i)}=\frac{6+6i}{3+3i}\cdot\frac{(3-3i)}{(3-3i)}=\frac{18-18i+18i-18i^2}{9+9}=\frac{18+18}{18}=\frac{36}{18}=2$$

(د b جز سم دی).

5- خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

$$a)\ \frac{3+4i}{4i}=\frac{(3+4i)}{(4i)}\frac{(-4i)}{(-4i)}=\frac{-12i-16i^2}{16}=\frac{-12i+16}{16}=1-\frac{12}{16}i=1-\frac{3}{4}i$$

$$b)\ \frac{-5}{2-3i}=\frac{(-5)}{(2-3i)}\ \frac{(2+3i)}{(2+3i)}=\frac{-10-15i}{4+9}=-\frac{10}{13}-\frac{15}{13}i$$

$$c)\ \frac{6}{1+3i}=\frac{(6)}{(1+3i)}\ \frac{(1-3i)}{(1-3i)}=\frac{6-18i}{1+9}=\frac{6}{10}-\frac{18}{10}i=\frac{3}{5}-\frac{9}{5}i$$

$$d)\ \frac{7}{7-2i}=\frac{(7)}{(7-2i)}\frac{(7+2i)}{(7+2i)}=\frac{49+14i}{49+4}=\frac{49+14i}{53}=\frac{49}{53}+\frac{14}{53}i$$

$$e)\ \frac{-4+8i}{2-4i}=\frac{(-4+8i)}{(2-4i)}\ \frac{(2+4i)}{(2+4i)}=\frac{-8-16i+16i+32i^2}{4+16}=\frac{-40}{20}=-2=-2+oi$$

$$f)\ \frac{3-2i}{-6+4i}=\frac{(3-2i)}{(-6+4i)}\frac{(-6-4i)}{(-6-4i)}=\frac{-18-12i+12i+8i^2}{36+16}=\frac{-26}{52}=-\frac{13}{26}=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+0i$$

$$g)\ \frac{1}{i}=\frac{1}{i}\frac{(-i)}{(-i)}=\frac{-i}{-i^2}=\frac{-i}{1}=0-i$$

$x^2+x+4=0$
$x_1=?$
$x_2=?$

د مختلطو عددونو په ساحه کې د یو مجهوله دویمې درجې معادلو حل

د درسي کتاب (297)مخ **د لوست وخت**: (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې - **پوهنیزې** - **مهارتي** - **ذهنیتي**	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • په دې پوه شي کومې یو مجهوله دویمې درجې معادلې چې Δ یې له صفر کوچنۍ وي د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، خو د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري. • په هغه صورت کې چې د دویمې درجې یو مجهوله معادلې جذرونه راکړل شوي وي معادله یې تشکیل کړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حل کې تري ګټه واخیستلای شي او په اهمیت یې پوه شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارتونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د انګیزې د پیدا کولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-16}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-15}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې**:

د زده کوونکو په فعاله ونډې اخیستنې سره لومړی مثال حل کړئ. ددې لوست لومړی فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي.همدارنګه دویم او دریم مثال د زده کوونکو په فعاله ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

ددې لوست دویم فعالیت دې زده کوونکي په ګروپونو کې سرته ورسوي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

لومړی پوښتنه حل کړئ.

$(x-x_1)(x-x_2)=0$

$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**:

د ارزونې لپاره د دویمې پوښتنې یوه برخه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- $4y^2+9=0\Rightarrow y=\pm\sqrt{-\frac{9}{4}}=\pm\frac{i\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\pm\frac{3i}{2}$
- $(n-3)^2=-4\Rightarrow n-3=\pm 2i\Rightarrow n=3\pm 2i$

- $x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm i\sqrt{2}$
- $2t^2 + 8 = 6t \Rightarrow t = \dfrac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$
- $3w^2 + 4w + 3 = 0 \Rightarrow w = \dfrac{-2 \pm i\sqrt{5}}{3}$
- $3x = \sqrt{x^2 - 2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}i$

د (a) د منفي حقيقي عدد اصلي يا اساسي جذر په دې ډول ښودل کيږي:

$\sqrt{-a} = i\sqrt{a} \qquad (a > 0)$

د $x^2 + 2ix = 3$ معادله حل کړئ.

$$x^2 + 2ix - 3 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4 + 12}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2i \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{2(-i \pm \sqrt{2})}{2} = -i \pm \sqrt{2}$$

$\boxed{x_1 = \sqrt{2} - i} \qquad \boxed{x_2 = -\sqrt{2} - i}$

د $y^{-2} - 2y^{-1} + 3 = 0$ معادله حل کړئ.

لومړۍ طريقه:

$$u = y^{-1} \Rightarrow u^2 - 2u + 3 = 0$$

$$u^2 - 2u = -3$$

$$u^2 - 2u + 1 = -2$$

$$(u-1)^2 = -2$$

$$u - 1 = \pm i\sqrt{2}$$

$$u = 1 \pm i\sqrt{2}$$

$$y^{-1} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{y} = 1 \pm i\sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{1 \pm i\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{1}{1 \pm i\sqrt{2}} \cdot \frac{(1 \mp i\sqrt{2})}{(1 \mp i\sqrt{2})} = \frac{1 \mp i\sqrt{2}}{1 - (-2)} = \frac{1 \pm i\sqrt{2}}{3}$$

دويمه طريقه:

$$\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y} + 3 = 0 \qquad (y \neq 0)$$

$$1 - 2y + 3y^2 = 0$$

$$3y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1(3)}}{2(3)}=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{6}=\frac{2\pm2i\sqrt{2}}{6}=\frac{1\pm i\sqrt{2}}{3}$$

د $x^2-2\sqrt{2}ix-3=0$ معادله حل کړئ.

$$\Delta=(-2\sqrt{2})^2-4\cdot1\cdot(-3)=8i^2+12=-8+12=4$$

$$x_{1,2}=\frac{2\sqrt{2}i\pm\sqrt{4}}{2}$$

$x_1=\sqrt{2}i+1 \qquad x_2=\sqrt{2}i-1$

$$x^2-4x+5=0$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=-4<0$$
$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{4i^2}}{2}=2\pm i$$
$x_1=2-i \qquad x_2=2+i$

$$1+\frac{8}{x^2}=\frac{4}{x}$$
$$x^2-4x+8=0$$
$$x^2-4x+4=-8+4$$
$$(x-2)^2=-4$$
$$x-2=\pm\sqrt{-4}$$
$$x=2\pm i\sqrt{4}$$
$$x=2\pm2i$$

$$x^3-1=0$$
$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$
$$x-1=0\Rightarrow x=1$$
$$x^2+x+1=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$
$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\sqrt{3}$$

$$x^2-2x+3=0$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(3)}}{2(1)}$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}$$

$$x^2+2ix=3$$
$$x_1=\sqrt{2}-i$$
$$x_2=-\sqrt{2}-i$$

$$4y^2+9=0$$
$$4y^2=-9$$
$$y=\pm\sqrt{-\frac{9}{4}}$$
$$y=\pm\frac{i\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\pm\frac{3i}{2}$$

$$(n-3)^2=-4$$
$$n-3=\pm2i$$
$$n=3\pm2i$$

$$2t^2+8=6t$$
$$2t^2-6t+8=0$$
$$t^2-3t+4=0$$
$$t=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)4}}{2(1)}$$
$$t=\frac{3\pm\sqrt{-7}}{2}$$
$$t=\frac{3\pm i\sqrt{7}}{2}$$

$$4u^2+8u+15=0$$
$$u^2+2u+\frac{15}{4}=0$$
$$u^2+2u+1=-\frac{15}{4}+1$$
$$(u+1)^2=-\frac{11}{4}$$
$$u+1=\pm\sqrt{-\frac{11}{4}}$$

$x = \frac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2}$

$x = 1 \pm i\sqrt{2}$

$u = -1 \pm \frac{i\sqrt{11}}{2}$

$u = -\frac{2}{2} \pm \frac{i\sqrt{11}}{2}$

$u = \frac{-2 \pm i\sqrt{11}}{2}$

د پوښتنو ځوابونه:

1- هغه دويمه درجه معادله پيدا کړئ چې جذرونه يې $(3+2i)$ او $(3-2i)$ وي.

حل:

$x^2 - (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 0$

$x^2 - [(3+2i) + (3-2i)]x + (3+2i)(3-2i) = 0 \;\Rightarrow x^2 - (6-0)x + 9 + 4 = 0 \;= x^2 - 6x + 13 = 0$

2- لاندې معادلې حل کړئ:

$x^2 - 4x + 13 = 0 \quad , \quad x^2 - 6x + 18 = 0 \quad , \quad -4x^2 + 3x - 5 = 0$

$x^2 + 8x + 41 = 0 \quad , \quad x^4 - 1 = 0 \quad , \quad 3x^2 + x + 2 = 0$

حل:

a) $x^2 - 4x + 13 = 0 \;,\; \Delta' = 4 - 13 = -9$

$x_1 = \frac{2 + \sqrt{-9}}{2} = \frac{2 + 3i}{2} = 1 + \frac{3i}{2} \qquad x_2 = \frac{2 - 3i}{2} = 1 - \frac{3}{2}i$

b) $x^2 + 8x + 41 = 0 \Rightarrow \Delta' = b'^2 - ac = 4^2 - 1 \cdot 41 = 16 - 41 = -25$

$x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{-25} \Rightarrow x_1 = -4 + 5i \quad , \quad x_2 = -4 - 5i$

c) $x^2 - 6x + 18 = 0 \quad \Delta' = 9 - 18 = -9 \qquad x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{-9} = 3 \pm 3i$

d) $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[4]{1} \Rightarrow x = \pm 1$

e) $-4x^2 + 3x - 5 = 0$

$\Delta = 9 - 4(-4)(-5) = 9 - 80 \qquad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-71}}{-8} = \frac{-3}{8} \pm \frac{\sqrt{71}}{8}i$

f) $3x^2 + x + 2 = 0 \qquad \Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1 - 24 = -23 \qquad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{23}i}{6}$

$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{23}i}{6} \;,\; x_2 = \frac{-1 - \sqrt{23}i}{6}$

3- هغه دويمه درجه معادلې پيدا کړئ چې جذرونه يې په لاندې ډول راکړل شوي وي:

$2+5i, 2-5i$	$1+i, 1-i$
$4i, -4i$	$5i, -5i$
$2i, 3i$	$i, \frac{1}{i}$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i, \frac{2}{3}-\frac{1}{2}i$	$2-i, 2+i$

حل: د فورمول په اساس:

$x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$ لرو چې:

a) $x^2-(2+5i+2-5i)x+(2+5i)(2-5i)=0$

$x^2-4x+29=0$

b) $x^2-(4i-4i)x+(4i)(-4i)=0 \Rightarrow x^2+16=0$

c) $x^2-(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i)x+(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i)(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}i)=0$

$x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}+\frac{1}{4}=0 \qquad x^2-\frac{4}{3}x+\frac{25}{36}=0 \quad , \quad 36x^2-48x+25=0$

d) $x^2-(2i+3i)x+(2i)(3i)=0 \Rightarrow x^2-5ix+6i^2=0 \Rightarrow x^2-5ix-6=0$

e) $x^2-[(1+i)+(-1-i)]x+(1+i)(-1-i)=0$

مطلوب معادله:

$x^2+0+(-1-i-i-i^2)=0 \Rightarrow x^2-2i=0$

f) $x^2-(5i-5i)x+(5i)(-5i)=0 \qquad x^2-0\cdot x-25i^2=x^2+25=0$

g) $x^2-(i-i)x+i(-i)=0 \qquad x^2+1=0 \qquad \left[\begin{array}{l}\frac{1}{i}=-i\\ \frac{1}{i}=\frac{1}{i}\frac{(-i)}{(-i)}=-i\end{array}\right.$

i) $x^2-(2-i+2+i)x+(2+i)(2-i)=0$

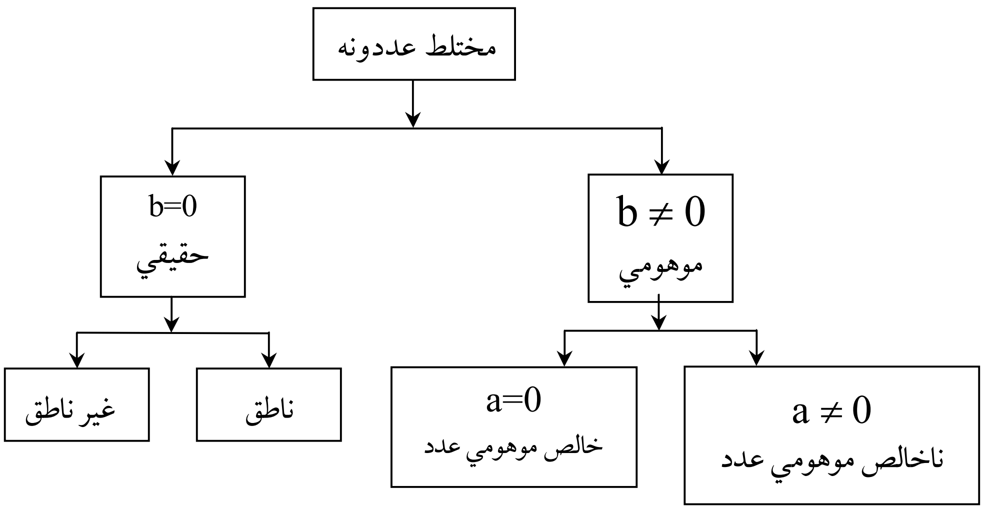
$x^2-4x+4+2i-2i-1i^2=0 \qquad x^2-4x+5=0$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

محترمو استادانو: څرنگه چې پوهیږی د مختلطو عددونو موضوع ډېره پراخه ده اویو الجبري ساختمان (فیلډ) دی.

په انجنیري او فزیک کې یې د استعمال ځایونه ډېر دي چې په برقي دوره کې، د اتوم په کوانتم نظریه کې، الکترومقناطیسي موجونو او د طیارې د وینگ په ډیزاین کې استفاده کیږي او له بلې خوا د لومړي ځل لپاره دا موضوع د لسم ټولگي د ریاضي په نصاب کې ځای پر ځای شوي ده. په همدې اساس د تعلیم او تربیې پوهانو په خلص ډول د مختلطو عددونو څلورگونې عملیې ددې ټولگي لپاره لازم گڼلې دي.

دا دی په دې برخه کې ستاسو محترمینو د معلوماتو د زیاتوالي لپاره په لنډ ډول د $(x+yi)^n$، د حقیقي او موهومي برخو پیدا کول، د مختلطو عددونو هندسي ښودنه او څلورگونې عملیې یې او د مختلطو عددونو مطلقه قیمت دلته راوړل شوي دي:



1- د $(x+yi)^n$ د حقیقي او موهومي برخو پیدا کول:

که $n=\pm1,\pm2,\pm3...$ وي.

- که $n=1$ وي $(x+yi)^1=x+yi$ چې x يې حقیقي برخه او yi يې موهومي برخه ده.

- که $n=-1$ وي، $(x+yi)^{-1}=\dfrac{1}{x+yi}$

$$\frac{1}{x+yi}=\frac{1}{x+yi}\cdot\frac{x-yi}{x-yi}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$$

چې $\dfrac{x}{x^2+y^2}$ يې حقیقي برخه او $-\dfrac{y}{x^2+y^2}.i$ يې موهومي برخه ده.

- که $n=2$ وي:

$$(x+yi)^2=x^2+2x\cdot yi+(yi)^2=x^2+2xyi-y^2=x^2-y^2+2xyi$$

چې حقیقي برخه يې x^2-y^2 او موهومي برخه يې $2xyi$ ده.

- که $n=-2$ وي:

$$(x+yi)^{-2}=\frac{1}{(x+yi)^2}=\frac{1}{(x+yi)^2}\cdot\frac{(x-yi)^2}{(x-yi)^2}=\frac{x^2-y^2-2xyi}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}i$$

چې حقیقي برخه يې $\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ او موهومي برخه يې $-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}i$ ده.

- که $n=3$ وي:

$$\begin{aligned}(x+yi)^3&=(x+yi)(x+yi)^2=(x+yi)(x^2-y^2+2xyi)\\&=x^3-xy^2+2x^2yi+x^2yi-y^3i+2xy^2i^2\\&=x^3-xy^2+(2x^2y+x^2y-y^3)\cdot i-2xy^2\\&=(x^3-xy^2-2xy^2)+(2x^2y+x^2y-y^3)i\\&=\underbrace{(x^3-3xy^2)}_{\text{حقیقي برخه}}+\underbrace{(3x^2y-y^3)}_{\text{موهومي برخه}}\cdot i\end{aligned}$$

- که $n=-3$ وي،نو:

$$(x+yi)^{-3}=\frac{1}{(x+yi)^3}=\frac{1}{(x+yi)^3}\cdot\frac{(x-yi)^3}{(x-yi)^3}=\frac{x^3-3x^2yi+3x(yi)^2-(yi)^3}{(x^2+y^2)^3}$$

$$=\frac{x^3-3xy^2-3x^2yi+y^3i}{(x^2+y^2)^3}=\frac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^3}-\frac{3x^2y-y^3}{(x^2+y^2)^3}i$$

چې حقیقي برخه يې $\dfrac{x^3-3xy^2}{(x^2+y^2)^3}$ او موهومي برخه يې $-\dfrac{(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^3}i$ ده.

لومړی مثال: $(2+3i)^2$ او $(3+4i)^{-1}$ د $(a+bi)$ په معیاري شکل عبارت دي له:

$$(2+3i)^2=4+12i+9i^2=4+12i-9=-5+12i$$

$$(3+4i)^{-1}=\frac{1}{3+4i}=\frac{1}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{3-4i}{9-16i^2}=\frac{3-4i}{25}=\frac{3}{25}-\frac{4}{25}\cdot i$$

دویم مثال: د $(2+5i)^3$ د a+bi په معیاري شکل مساوي دی په:

حل: $(2+5i)^3=2^3+3\cdot2^2\cdot5i+3\cdot2\cdot(5i)^2+(5i)^3=8+60i-150-125i=-142-65i$

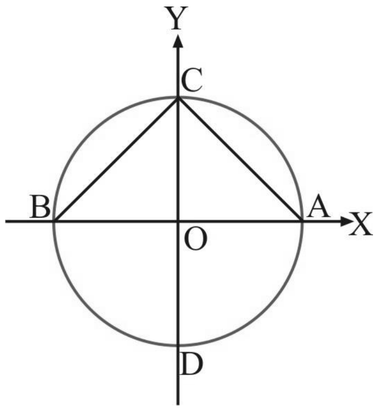
$$(a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \quad , \quad (a+bi)^{-2} = \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2} - \frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}i$$

$$(a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i \quad , \quad (a+bi)^{-3} = \frac{a^3-3ab^2}{(a^2+b^2)^3} - \frac{(3a^2b-b^3)}{(a^2+b^2)^3}i$$

2- د یو مختلط عدد هندسي ښودنه:

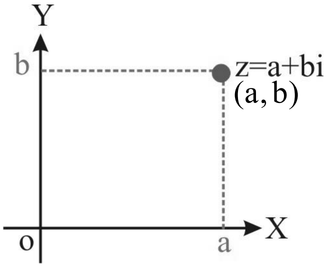
Geometric representation of a complex number

یوه مثلثاتي دایره په پام کې نیسو (مثلثاتي دایره هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالی یې د اوږدوالي واحد وي) د ox او oy محورونه دایره د A ، B ، C او D په نقطو کې قطع کوي چې $OA=1$ او $OB=-1$ دی. ګورو چې د C او D نقطې له کوم عدد سره مطابقت کوي. ددې لپاره د C نقطه د A او B له نقطو سره نښلوو د $\overset{\Delta}{ABC}$ په قایم الزاویه مثلث کې چې OC یې ارتفاع ده له هندسي څخه پوهیږو چې $(OC)^2 = OA \cdot OB = (1)\cdot(-1) = -1$ د OC واحد وکټور له i سره مساوي دی چې د اوږدوالي واحد دی. یا $OC = \sqrt{-1} = i$



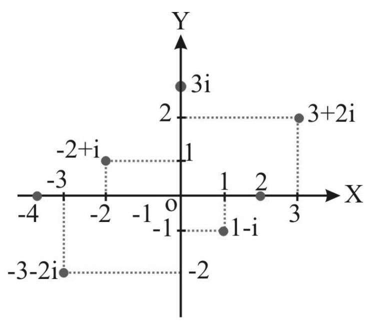
کولای شو مختلط عددونه د نقطو په واسطه د دیکارتي مختصاتو په سیستم کې وښایو. په دې ډول چې افقي محور ته حقیقي محور (Real Axis) او قایم محور ته موهومي محور (Imaginary Axis) وایي، نو په همدې اساس د یوه مختلط عدد حقیقي برخه د X پر محور او موهومي برخه یې د Y پر محور ښودل کیږي.

په 1806م کال کې یو سویسي ریاضي پوه (Jean Robert Argand) نومیده، د نقطو په واسطه یې مختلط عددونه د مختلطو عددونو په مستوي کې په هندسي ډول وښودل. له همدې امله په مستوي کې د مختلطو عددونو ښودنه د (Argand Diagram) په نامه یادیږي، نو د $z = a+bi$ مختلط عدد د (a,b) د مرتبې جوړې Order pair په واسطه ښودلای شو.

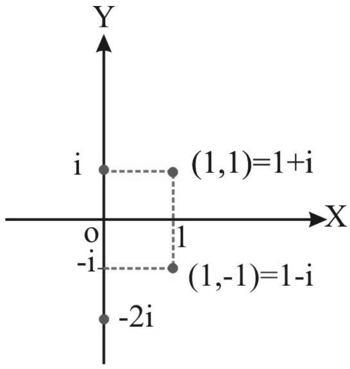


د مستوي هر یوه نقطه یو مختلط عدد او هر مختلط عدد د مستوي د یوې نقطې په واسطه ښودل کیږي یا دا چې د مختلطو عددونو او د مستوي د نقطو ترمنځ د یو په یو (1-1) مطابعت موجود دی. هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي حقیقي عددونه او هغه نقطې چې د Y پر محور پرتې دي موهومي عددونه ښکاره کوي د $Z = a+bi$ مختلط عددد شکل په شان د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د (a,b) د نقطې په واسطه ښودل کیږي.

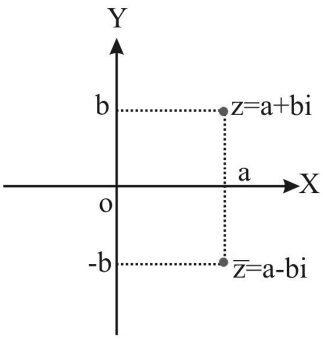
لومړی مثال: د $2, 3i, -3-2i, -2+i, 1-i, 3+2i$ او 4- مختلط عددونه د کمیات وضعیه په مستوي کې په لاندې ډول ښودل کیږي.

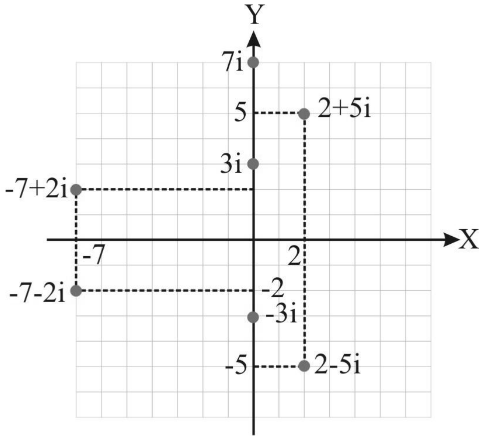


دویم مثال: د $1-i, 1+i, -2i$ او i عددونه په هندسي ډول داسې ښودل کیږي.

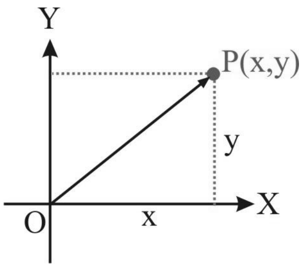


دریم مثال: د $-3i\ ,\ -7+2i\ ,\ 2-5i\ ,\ a+bi$ عددونه او مزدوجونه یې په هندسي ډول په شکل کې داسې ښودل کیږي.





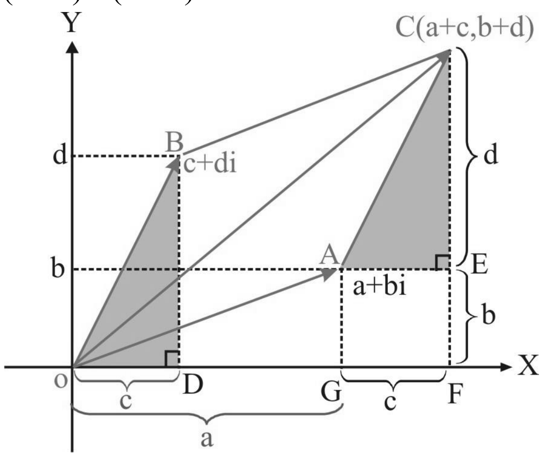
3- په هندسي ډول د مختلطو عددونو څلورګونې عملیې



څرنګه چې یو مختلط عدد د یوې نقطې په واسطه د مختلطو عددونو په مستوي کې ښودلای شو لکه څنګه چې په شکل کې د $z = x + yi$ مختلط عدد د (x, y) نقطې په واسطه ښودل شوی دی که د z مختلط عدد په مستوي کې د $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ د وکټور یا د $\overrightarrow{OP}$ خط په واسطه وښودل شي، نو مختلط عددونه په لاندې ډول جمع، تفریق، ضرب او وېشلای شو:

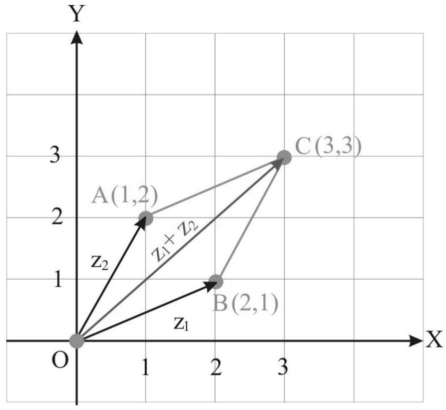
لومړی مثال: که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي $z_1 + z_2$ په هندسي ډول په لاندې ډول ښودل کیږي.

$$Z_1 + Z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$



دویم مثال: که $z_1 = 2 + i$ او $z_2 = 1 + 2i$ وي، $z_1 + z_2$ په لاندې شکل کې وګورئ:

$$z_1 + z_2 = (2 + i) + (1 + 2i) = 3 + 3i$$

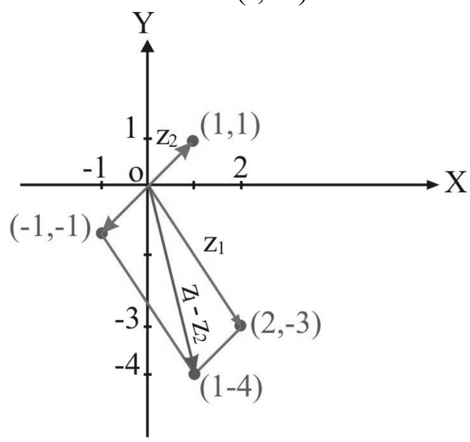


لیدل کیږي چې د $OACB$ د متوازي الاضلاع قطر د $Z_1 + Z_2$ د جمعې حاصل ښيي.

$$OA = z_2 \quad , \quad OB = z_1 \quad , \quad OC = z_1 + z_2$$

دریم مثال: که $z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 1 + i$ وي $z_1 - z_2$ په لاندې شکل کې وګورئ.

$$z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (1 + i) = 2 - 3i - 1 - i = 1 - 4i = (1, -4)$$

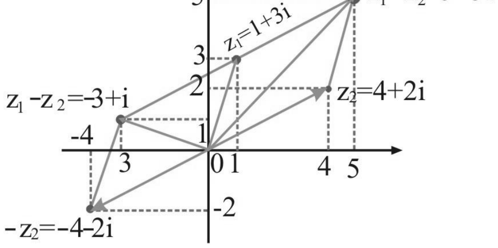


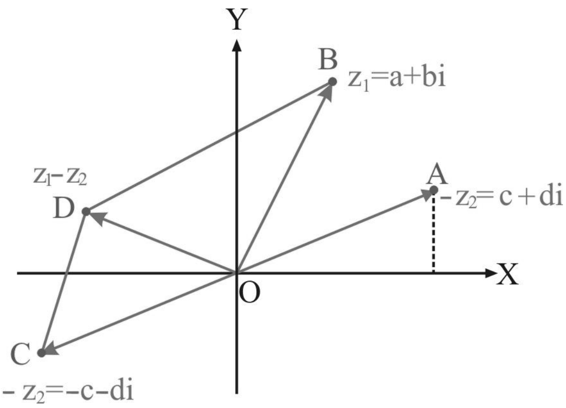
څلورم مثال: که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي، $z_1 - z_2$ اوکه $z_1 = 1 + 3i$ او $z_2 = 4 + 2i$ وي، $z_1 + z_2$ او $z_1 - z_2$ په لاندې شکل کې وګورئ.

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$z_1 + z_2 = (1 + 3i) + (4 + 2i) = 5 + 5i$$

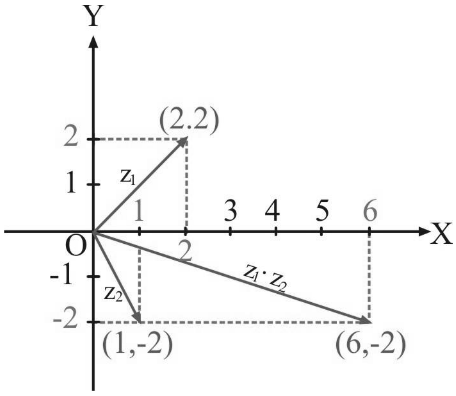
$$z_1 - z_2 = (1 + 3i) - (4 + 2i) = -3 + i$$





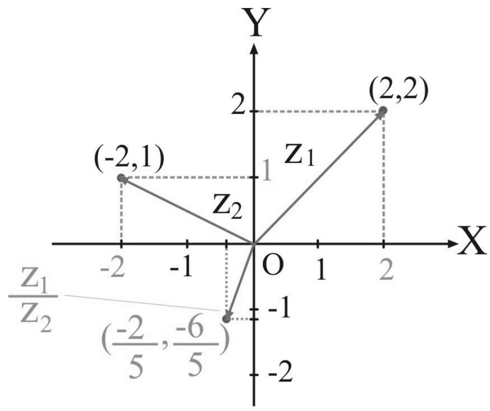
پنځم مثال: که $z_1 = 2 + 2i$ او $z_2 = 1 - 2i$ وي $z_1 \cdot z_2$ په لاندې شکل کې وګورئ:

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 2i)(1 - 2i) = 2 - 4i + 2i - 4i^2 = 2 - 2i + 4 = 6 - 2i$$



شپږم مثال: که $Z_1 = 2+2i$ او $Z_2 = -2+i$ وي، $\frac{Z_1}{Z_2}$ په لاندې شکل کې وګورئ:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \left(\frac{2+2i}{-2+i}\right)\cdot\left(\frac{-2-i}{-2-i}\right) = \frac{-4-2i-4i-2i^2}{4+1} = \frac{-4-6i+2}{5} = \frac{-2-6i}{5} = \frac{-2}{5} - \frac{6}{5}i$$



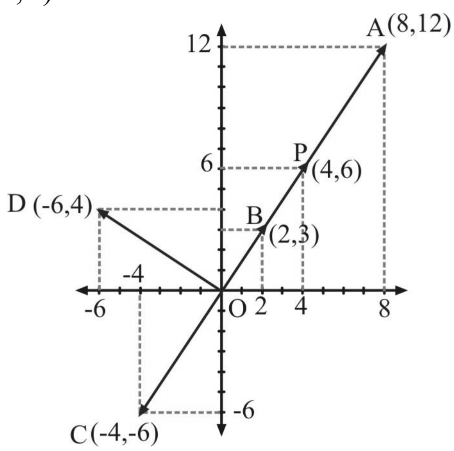
اووم مثال: که د $4+6i$ مختلط په پام کې ونیسو او دا عدد په ترتیب سره په 2 , $\frac{1}{2}$ ، -1 او i کې ضرب کړو د Argand په ډیاګرام کې په لاندې ډول ښودل کیږي.

$2(4+6i) = 8+12i = (8,12)$

$\frac{1}{2}(4+6i) = 2+3i = (2,3)$

$-1(4+6i) = -4-6i = (-4,-6)$

$i(4+6i) = 4i+6i^2 = -6+4i = (-6,4)$



لیدل کیږي چې: $\vec{OA} = 2OP$ و $\vec{OB} = \frac{1}{2}OP$

په پایله کې لیدل کیږي چې که یو وکتور په (-1) کې ضرب شي د $180°$ په اندازه یې جهت تغیر کوي (څرخي) په داسې حال کې چې اوږدوالی یې تغیر نه کوي. یا $\vec{OC} = -OP$ او که $(-1)^2$ یا (1) ضرب شي، وکتور د $180° + 180° = 360°$ په اندازه څرخي او یا هیڅ تغیر نه کوي.

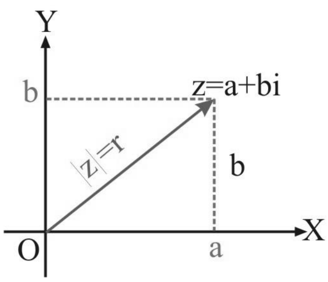
4- د یوه مختلط عدد مطلقه قیمت (Modulus of a complex number)

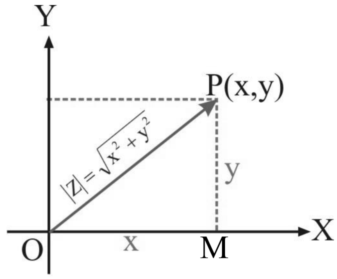
د $Z_1 = 4 + 5i$ او $Z_2 = -4 - 5i$ مختلطو عددونو مطلقه قیمتونو سره مساوي دي. یا $|4 + 5i| \overset{?}{=} |-4 - 5i|$

د مختلطو عددونو په مستوي کې د $Z = x + yi$ مختلط عدد په لاندې ډول ښودل کیږي.

د OP د خط اوږدوالی د $Z = x + yi$ عدد د مطلقه قیمت په نامه یادیږي او په دې ډول ښودل کیږي.

$$|Z| = |OP| = |x + yi|$$





د فیثاغورث د قضیې په اساس د $\overset{\Delta}{OPM}$ په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

$$(OP)^2 = (OM)^2 + (PM)^2$$

$$(OP)^2 = x^2 + y^2 \qquad \overline{PM} = y \text{ و } \overline{OM} = x$$

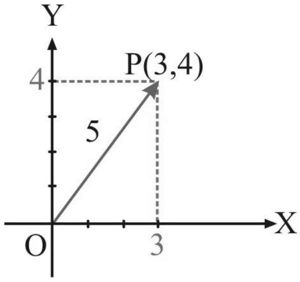
$$(\overline{OP})^2 = x^2 + y^2$$

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|Z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

لومړی مثال: که $Z = 3 + 4i$ وي، $|Z|$ عبارت دی له:

$$|Z| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$



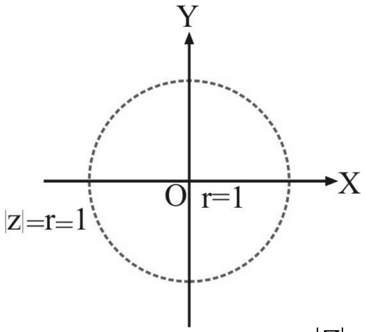
دویم مثال: د $2i$ ، $-2i$ او 4 مختلطو عددونو مطلقه قیمتونه مساوي دی په:

$$|2i| = |0 + 2i| = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = \sqrt{0 + 4} = 2$$

$$|-2i| = |0 - 2i| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{0 + 4} = 2$$

$$|4| = |4 + oi| = \sqrt{(4)^2 + (0)^2} = \sqrt{16} = 4$$

دریم مثال: که $|Z| = 1$ وي، د هغو نقطو معادله چې دا شرط صدق کوي:



$|Z|=1$ د ټولو هغو نقطو له سټ څخه عبارت دی چې د هغه دایرې پر محیط واقع دي

چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او شعاع یو واحد وي.

که $Z = x + yi$ وي $|Z|^2 = x^2 + y^2$ دی چې ددې دایرې معادله ده.

څلورم مثال: که $Z = 5 + 4i$ وي $|Z| = Z\overline{Z} = \sqrt{x^2 + y^2}$ دی.

د z د مختلط عدد مزدوج له $\overline{Z} = 5 - 4i$ څخه عبارت دی نو:

$$|Z| = |5 + 4i| = \sqrt{(5 + 4i)(5 - 4i)} = \sqrt{25 - 20i + 20i - 16i^2} = \sqrt{25 - 16(-1)} = \sqrt{41}$$

په پایله کې: $|Z| = \sqrt{Z\overline{Z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

د مختلطو عددنو د مطلقه قیمت خاصیتونه:

1) $|Z_1| + |Z_2| \geq |Z_1 + Z_2|$

2) $|Z_1| - |Z_2| \leq |Z_1 - Z_2|$

3) $|Z_1 - Z_2| = |Z_2 - Z_1|$

4) $|Z_1| \cdot |Z_2| = |Z_1 \cdot Z_2|$

5) $\dfrac{|Z_1|}{|Z_2|} = \left|\dfrac{Z_1}{Z_2}\right| \qquad Z_2 \neq 0$

6) $|-Z| = |Z| = |\overline{Z}| = |-\overline{Z}|$

7) $|Z| = \sqrt{Z\overline{Z}}$

8) $|Z|^2 = Z\overline{Z}$

لومړی مثال: که $Z_1 = 4 + 5i$ او $Z_2 = 2 + 3i$ وي نو $|Z_1 - Z_2| = |Z_2 - Z_1|$

$$|z_1 - z_2| = |4 + 5i - (2 + 3i)| = |4 + 5i - 2 - 3i| = |2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|z_2 - z_1| = |2 + 3i - 4 - 5i| = |-2 - 2i| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore |z_1 - z_2| = |Z_2 - Z_1| = 2\sqrt{2}$$

دویم مثال: که $z = x + 5i$ او $|z| = 49$ وي، د x قیمت مساوي دی په:

$$|z| = x^2 + 25 \qquad x^2 + 25 = 49$$

$$x^2 = 49 - 25$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

دریم مثال: که $z = 2 - 3i$ وي نو $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ او $|z|^2 = z\overline{z}$

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$\overline{z} = 2 + 3i$$

$$\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \sqrt{4 + 6i - 6i + 9} = \sqrt{13}$$

$$|z|^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$$

$$z\overline{z} = (2 + 3i)(2 - 3i) = 13 \qquad |z|^2 = z\overline{z}$$

د څېرکي پوښتنې حل:

1- $(i)^{51}$ مساوي دی په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

حل: $(i)^{51}=(i)^{4\cdot12+3}=i^{4\cdot12}\cdot i^2\cdot i=(1)(-1)i=-i$

(د d جز سم دی).

2- د i^{-98} موهومي عدد مساوي دی په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

حل: $i^{-98}=\dfrac{1}{i^{98}}=i^{-(4\cdot24+2)}=\dfrac{1}{i^{(4\cdot24+2)}}=\dfrac{1}{i^{4\cdot24}\cdot i^2}=\dfrac{1}{(1)(-1)}=-1$

(د b جز سم دی).

3- ذ i^{67} موهومي عدد مساوي دی په:

a) $-i$ b) 1 c) -1 d) i

حل:

$$i^{67}=i^{4\cdot16+3}=i^{4\cdot16}\cdot i^2\cdot i=1\cdot(-1)i=-i$$

(د a جز سم دی).

4- $7i-4i$ مساوي دی په:

a) $-3i$ b) $3i$ c) 3 d) -3

حل: (د b جز سم دی یعنې $3i$) .

5- $3i\cdot4i$ مساوي دی په:

a) -12 b) 12 c) $12i$ d) $-12i$

حل: -12 (د a جز سم دی).

6- $\dfrac{64i}{8i}$ مساوي دی په:

a) -8 b) 8 c) $8i$ d) $-8i$

حل: (د b جز سم دی چې ځواب یې 8 دی).

7- $\dfrac{7}{9}i\cdot\dfrac{2}{9}i$ مساوي دی په:

a) $-\dfrac{14}{81}$ b) $\dfrac{14}{81}$ c) $-\dfrac{14}{81}i$ d) $\dfrac{14}{81}i$

حل: $\dfrac{7}{9}i\cdot\dfrac{2}{9}i=\dfrac{14}{81}i^2=-\dfrac{14}{81}$

(د a جز سم دی).

8- $\dfrac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوي دی په:

a) $\sqrt{\frac{11}{5}}$ b) $\frac{-11}{5}$ c) $-\frac{11}{5}i$ d) $\frac{11}{5}i$

حل:

$$\frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{11}\sqrt{-1}}{\sqrt{5}\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{11}i}{\sqrt{5}i}=\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{11}{5}}$$

(د a جز سم دی).

9- $\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1}\cdot 5}$ مساوي دی په:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{5}{3}i$ d) درې واړه جزونه سم نه دي

حل:

$$\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1}\cdot 5}=\frac{\sqrt{5}i}{5i}=\frac{\sqrt{5}i}{5i}\left(\frac{-5i}{-5i}\right)=\frac{-5\sqrt{5}i^2}{-25i^2}=\frac{5\sqrt{5}}{25}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(د a جز سم دی).

10- $\frac{-xi}{\sqrt{yi}}$ مساوي دی په:

a) $\frac{x}{\sqrt{y}}$ b) $\frac{-x}{\sqrt{y}}$ c) $\frac{xi}{\sqrt{y}}$ d) $\frac{x}{y}$

حل: (د b جز سم دی).

11- لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(3+4i)+(2+5i)$ $(a+bi)+(c+di)$

$(1+i)+(1-i)$ $(2+3i)+(2-3i)$

حل:

a) $(3+4i)+(2+5i)=(2+3)+(4+5)i=5+9i$

b) $(1+i)+(1-i)=2-0=2+0i$

c) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

d) $(2+3i)+(2-3i)=4-0=4+0i$

12- لاندې مختلط عددونه تفریق کړئ:

$(4+3i)-(4+4i)$ $(3-2i)-(3+2i)$

$(4+4i)-(4+3i)$ $(1+i)-(1-i)$

حل:

a) $(4+3i)-(4+4i)=(4-4)+(3-4)i=0-i=-i$

b) $(4+4i)-(4+3i)=(4-4)+(4-3)i=0+i=-i$

c) $(3-2i)-(3+2i)=3-2i-3-2i=0-4i=-4i$

d) $(1+i)-(1-i)=1+i-1+i=2i$

13- $(2a+ib)-(2a-ib)$ مساوی دی په:

a) $-ib$ b) $-2ib$ c) $2ib$ d) $4a$

حل: $(2a+ib)-(2a-ib)=2a+ib-2a+ib=2ib$

(د c جز سم دی).

14- د $(2-3i)(2+3i)$ د ضرب حاصل مساوی دی په:

a) -13 b) $13i$ c) 13 d) $9i$

$$(2-3i)(2+3i)=4+6i-6i-9i^2=4-9(-1)=4=9=13$$

(د c جز سم دی).

15- لاندې مختلط عددونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

$4(2+5i)-(3-4i)$ $(4-3i)(2+i)$ $i(3-2i)^2$ i^{51}

حل:

a) $4(2+5i)-3(3-4i)=8+20i-9+12i=-1+32i$

b) $(4-3i)(2+i)=8+4i-6i-3i^2=8-2i+3=11-2i$

c) $i(3-2i)^2=i(9-12i+4i^2)=9i-12i^2-4i=5i+12=12+5i$

d) $i^{51}=i^{4\cdot 12+3}=1^{4\cdot 12}\cdot i^2\cdot i=1\cdot(-1)\cdot i=-i=0-i$

16- که $z_1=2-4i$, $z_2=1-i$ وي، وښایاست چې:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}\ ,\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\ ,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

حل:

a) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ b) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

a) $z_1+z_2=(2-4i)+(1-i)=3-5i$

$\overline{z_1+z_2}=3+5i$

$z_1=2-4i\Rightarrow\overline{z_1}=2+4i$

$z_2=1-i\Rightarrow\overline{z_2}=1+i$

$\overline{z_1}+\overline{z_2}=(2+4i)+(1+i)=3+5i\Rightarrow\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

b) $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

$z_1\cdot z_2=(2-4i)(1-i)=2-2i-4i+4i^2=-2-6i$

$\overline{z_1\cdot z_2}=-2+6i$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(2+4i)(1+i)=2+2i+4i+4i^2=2+6i-4=-2+6i\Rightarrow\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

c: $\overline{\left(\frac{2-4i}{1-i}\right)}=?$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-4i}{1-i}=\frac{(2-4i)}{(1-i)}\frac{(1+i)}{(1+i)}=\frac{2+2i-4i-4i^2}{1+1}=\frac{6-2i}{2}=3-i$$

$$\frac{z_1}{z_2}=3-i\Rightarrow\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=3+i$$

$$\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{(2+4i)}{(1+i)}\frac{(1-i)}{(1-i)}=\frac{2-2i+4i-4i^2}{1+1}=\frac{6+2i}{2}=3+i\Rightarrow\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

17- د لاندې مختلطو عددونو جمعي او ضربي معکوسونه پیدا کړئ:

$a)\ 3x-\frac{1}{2}yi \qquad b)\ 2a-bi \qquad c)\ 2+5i \qquad d)\ -7+3i$

$e)\ -6+2i \qquad f)\ 3-i \qquad g)\sqrt{2}+i$

حل:

a) د $3x-\frac{1}{2}yi$ جمعي معکوس $-3x+\frac{1}{2}yi$ دی او ضربي معکوس یې عبارت دی له:

$$\frac{1}{3x-\frac{1}{2}yi}\left(\frac{3x+\frac{1}{2}yi}{3x+\frac{1}{2}yi}\right)=\frac{3x+\frac{1}{2}yi}{9x^2+\frac{1}{4}y^2}=\frac{3x}{9x^2+\frac{1}{4}y^2}+\frac{\frac{1}{2}y}{9x^2+\frac{1}{4}y^2}i$$

b) د $2a-bi$ جمعي معکوس $-2a+bi$ دی او ضربي معکوس یې عبارت دی له:

$$\frac{1}{2a-bi}\left(\frac{2a+bi}{2a+bi}\right)=\frac{2a+bi}{4a^2+b^2}=\frac{2a}{4a^2+b^2}+\frac{b}{4a^2+b^2}i$$

c) د $2+5i$ جمعي معکوس $-2-5i$ دی او ضربي معکوس یې عبارت دی له:

$$\frac{1}{2+5i}\cdot\left(\frac{2-5i}{2-5i}\right)=\frac{2-5i}{4+25}=\frac{2-5i}{29}=\frac{2}{29}-\frac{5}{29}i$$

d) د -7+3i جمعي معکوس 7-3i دی او ضربي معکوس یې عبارت دی له:

$$(\frac{1}{-7+3\mathrm{i}})\cdot\left(\frac{-7-3\mathrm{i}}{-7-3\mathrm{i}}\right)=\frac{-7-3\mathrm{i}}{49+9}=\frac{-7}{58}-\frac{3}{58}\mathrm{i}$$

e) د -6+2i جمعي معکوس 6-2i دی او ضربي معکوس یې عبارت دی له:

$$\frac{1}{-6+2\mathrm{i}}\cdot\left(\frac{-6-2\mathrm{i}}{-6-2\mathrm{i}}\right)=\frac{-6-2\mathrm{i}}{40}=\frac{-6}{40}-\frac{2}{40}\mathrm{i}=-\frac{3}{20}-\frac{1}{20}\mathrm{i}$$

f) د 3-i جمعي معکوس -3+i دی او ضربي معکوس یې عبارت دی له:

$$(\frac{1}{3-i})(\frac{3+i}{3+i})\frac{3+i}{10}=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$$

g) د $\sqrt{2}+i$ جمعي معکوس $-\sqrt{2}-i$ دی او ضربي معکوس یې عبارت دی له:

$$(\frac{1}{\sqrt{2}+i})\cdot(\frac{\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}-i})=\frac{\sqrt{2}-i}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}i$$

18- د $5\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+1=0$ معادله حل کړئ:

حل:

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{10}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{10}=\frac{-2\pm 4i}{10}=-\frac{1}{5}\pm\frac{2}{5}i$$

$$x_1=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i \qquad x_2=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

اووم څپرکی

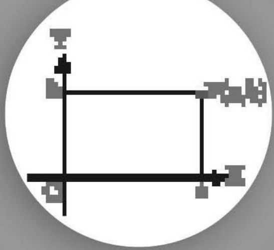
تحلیلي هندسه



تحلیلی هندسه هغه علم دی چې د الجبر تخنیکونه له هندسې سره یو ځای کوي. یا په بل عبارت تحلیلي هندسه موږ ته دا توان راکوي چې د هندسي مسألو په حلولو کې له الجبري میتودونو او معادلو څخه ګټه واخلو، همدارنګه د هندسې د اصولو څخه په الجبري مساواتونو (معادلو) کې ګټه واخلو.

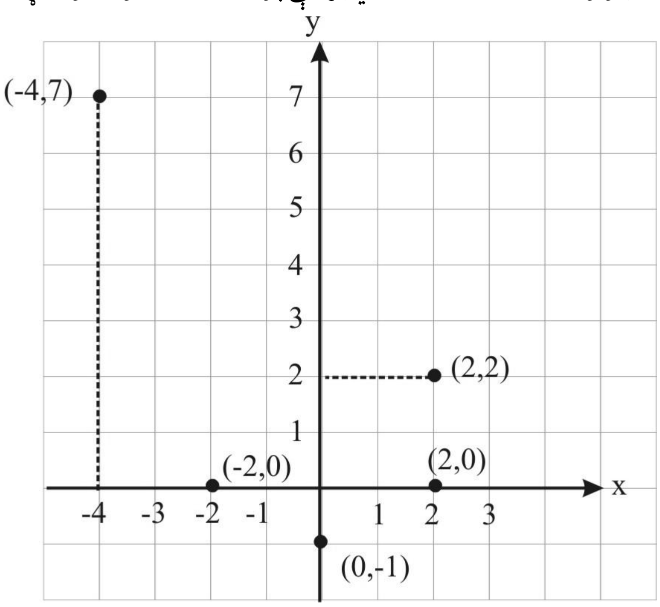
هندسه د الجبر یوه پخوانۍ څانګه ده. یونانیانو تقریباً څلور پیړۍ ترمخه په دې برخه کې په منظمه توګه څیړنه او مطالعه کړې وه چې تقریباً (300) کاله پخوا یو کلید (Euclid) دیارلس کتابونه تشریح او تفسیر کړي وو.

د تحلیلي هندسې مخترع یو فرانسوي عالم رین ډکارټس (Rene Descartes) وه چې په (1596-1650 ب.م) کې یې ژوند کاوه الجبري میتودونه یې په هندسه کې معرفي او ګټه یې ترې واخیستله چې د تحلیلي هندسې (Analytic geometry) یا (هم اهنګه هندسې) (Coordinate geometry) په نامه یادیږي. نوموړي په (1637 م) کال کې یو کتاب د (La geometry) په نامه ولیکه. لنډه داچې په څه ډول د هندسې او الجبر څخه یو ځای ګټه اخیستل کیږي. په دې فصل کې زموږ موخه داده چې په لنډ ډول ددې مضمون ځینې اساسات مطالعه کړو.



د وضعیه کمیاتو سیستم یا کواردنېټ سیستم

د درسي کتاب (305) مخ   د لوست وخت (2 درسي ساعتونه)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • وپوهیږي چې چیرې د یوې نقطې وضعیه کمیات مثبت یا منفي دي. • هغه نقطې چې وضعیه کمیات یې ورکړل شوي وي، د وضعیه کمیاتو په مستوي کې وټاکلای شي او وپوهیږي چې چیرې د نقطو یوه مختصه صفر وي. • د دوو نقطو ترمنځ د فاصلې فورمول ثبوت کړای شي. • د دوو نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړای شي. • د هندسي مسایلو په حلولو کې له دې فرمول څخه ګټه واخیستلای شي او اهمیت یې درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. 

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې

د x او y محورونه زده کوونکو ته وروپیژني چې د x او y مختصې په کوم حالت کې مثبت، منفي او صفر وي.

لومړی مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل شي.

زده کوونکي دې ددې لوست لومړی فعالیت سرته ورسوي او محترم ښوونکي دې هغوی ته لارښوونه او مرسته دې ورسره وکړي.

د فاصلې د فورمول له ثبوتولو څخه وروسته، دویم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي. دویم فعالیت له زده کوونکو وپوښتئ چې ځواب یې 6 دی او دریم مثال حل کړئ.

دریم فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي.

$|AB|^2 = (3+6)^2 + (-5-3)^2 = 81 + 64 = 145$

$|BC|^2 = (3+1)^2 + (-5-5)^2 = 61 + 100 = 116$

$|CA|^2 = (-6+1)^2 + (-5-3)^2 = 25 + 4 = 29$

$|BC|^2 + |CA|^2 = |AB|^2$

څلورم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

لاندې پوښتنه دې حل شي:

د $(5,7)$ او $(1,3)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ. (ځواب $4\sqrt{2}$) دی.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

له پوښتنو څخه د لومړۍ پوښتنې یوه برخه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

- د $(-\pi, \sqrt{2})$ او $(\pi, \sqrt{2})$ نقطو ترمنځ فاصله عبارت ده له:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(\sqrt{2} - \pi)^2 + (-\pi - \sqrt{2})^2}$$

$$d = \sqrt{2 - 2\sqrt{2}\pi + \pi^2 + \pi^2 + 2\sqrt{2}\pi + 2} = \sqrt{4 + 2\pi^2}$$

- د دوو نقطو ترمنځ د فاصلې د فورمول په مرسته زیات هندسي مسایل حل کیږي، د مثال په ډول:

1- که د یوه مستطیل درې راسونه $A(3,0)$, $B(3,3)$ او $C(5,3)$ وي، نو ددې مستطیل څلورم راس عبارت دی له:

$$|AB|^2 = |DC|^2$$

$$(3-3)^2 + (3-0)^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2$$

$$9 \quad = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$|AD|^2 = |BC|^2$$

$$(x-3)^2 + (y-0)^2 = (5-3)^2 + (3-3)^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

II معادله له I معادلې څخه تفریقوو، نو لرو چې:

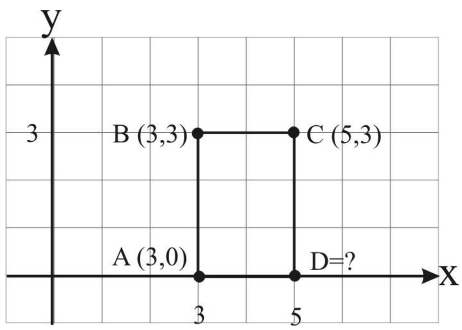
$$-4x - 6y + 20 = 0$$

$$2x + 3y - 10 = 0 \Rightarrow y = \frac{10 - 2x}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots III$$

د y قیمت په (I) معادله کې وضع کوو لرو چې: $13x^2 - 94x + 145 = 0$

ددې معادلې له حلولو څخه وروسته لرو چې: x=5 دی او د x قیمت په (III) معادله کې وضع کوو په نتیجه کې y=0 کیږي.

نو د مستطیل څلورم راس له D=(5,0) څخه عبارت دی.

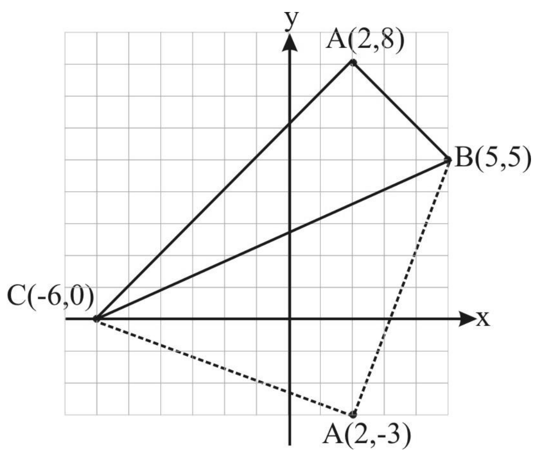


2- د فاصلې د فورمول په مرسته ښودلای شو چې $A(3,1)$, $B(6,2)$ او $C(9,3)$ نقطې پر یو مستقیم خط پرتې دي که د C,B,A نقطې پر یو مستقیم خط پرتې وي، نو باید د $|AB|+|BC|=|AC|$ شرط صدق کوي.

$$|AB|=\sqrt{(6-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$
$$|BC|=\sqrt{(9-6)^2+(3-2)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$
$$|AC|=\sqrt{(9-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$
$$\sqrt{40}=\sqrt{10}+\sqrt{10}$$
$$2\sqrt{10}=\sqrt{10}+\sqrt{10}$$
$$|AB|+|BC|=|AC|$$

په نتیجه کې د A,B او C نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

3- که $A(2,p)$, $B(5,5)$ او $C(-6,0)$ د یوه قایمه زاویه مثلث راسونه وي، په هغه صورت کې چې د A نقطه د قایمې زاویې راس وي، نو د p قیمت مساوي دی په:



$$|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$$
$$(5-2)^2+(5-p)^2+(-6-2)^2+(0-p)^2$$
$$=(-6-5)^2+(0-5)^2$$
$$=9+25+p^2-10p+64+p^2=121+25$$
$$=2p^2-10p-146+64+25+9=0$$
$$=p^2-5p-24=0$$
$$(p-8)(p+3)=0$$
$$p=8$$
$$p=-3\Rightarrow A(2,8)$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- په لاندې راکړل شوو نقطو کې د کومې نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه 15 واحده ده؟

$a:(\sqrt{176},7)$ $\quad b:(10,-10)$ $\quad C:(1,15)$ $\quad d:(\frac{15}{2},\frac{15}{2})$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(\sqrt{176}-0)^2+(7-0)^2}$$

حل:

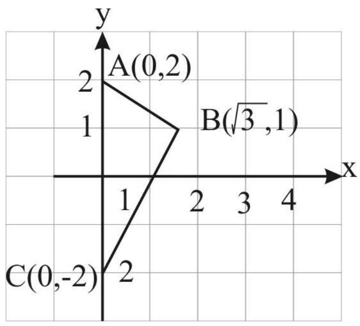
$$\mathrm{d}=\sqrt{(\sqrt{176})^2+7^2}=\sqrt{176+49}=\sqrt{225}=15$$

د $(\sqrt{176},7)$ د نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه 15 واحده ده.

2- وښایاست چې د $A(0,2)$ ، $B(\sqrt{3},1)$ او $C(0,-2)$ نقطې د قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

حل:

$$\overline{AB}=\sqrt{(\sqrt{3}-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{3+1}=2$$
$$\overline{AC}=\sqrt{(0-0)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{16}=4$$
$$\overline{BC}=\sqrt{(0-\sqrt{3})^2+(-2-1)^2}=\sqrt{3+9}=\sqrt{12}$$
$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=(2)^2+(\sqrt{12})^2=4+12=16=\overline{AC}^2$$



نو د ABC مثلث قایمه الزاویه دی.

3- د $(0,5)$ او $(0,-3)$ دنقطو ترمنځ فاصله پیدا کړي.

حل: $\mathrm{d}=\sqrt{(0-0)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{0+64}=8$

4- د $A(-\frac{1}{2},3)$ او $B(-1,\frac{-3}{4})$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړي.

حل:

$$\mathrm{d}=\sqrt{[-1-(\frac{-1}{2})]^2+(\frac{-3}{4}-3)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{225}{16}}=\sqrt{\frac{229}{16}}=\frac{\sqrt{229}}{4}$$

یا $\mathrm{d}=\sqrt{(-\frac{1}{2}+1)^2+(3+\frac{3}{4})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+(\frac{15}{4})^2}=\frac{\sqrt{229}}{4}$

5- د (7.11) او (1.3) نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل: $\mathrm{d}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(7-1)^2+(11-3)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$

6- د $(3,6)$ او $(1,2)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

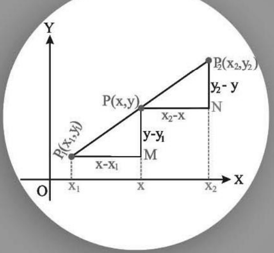
حل:

$$\mathrm{d}=\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}$$

7- د $(3,7)$ او $(12,19)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل:

$$d=\sqrt{(12-3)^2+(19-7)^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=25$$



د هغې نقطې وضعیه کمیاتو پیدا کول چې
یو قطعه خط په یوه نسبت باندې ویشي

در درسي کتاب (311)مخ   د لوست وخت(1 درسي ساعت)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د یوې نقطې د وضعیه کماتو د پیدا کولو په طریقه وپوهیږي، چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې ویشي. • په دې وپوهیږي که چیرې دا نقطه خط داخلاَ په یوه نسبت وویشي نو r مثبت$(r > 0)$ دی او که یې خارجاَ په یوه نسبت وویشي $(r < 0)$ دی. • د هغه نقطې وضعیه کمیات پیدا کړای شي چې یو قطعه خط داخلاً او یا خارجاً پر یوه نسبت باندې ویشي او همدارنگه د یو قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړای شي. • د هندسي مسایلو په حلولو کې له دې فورمولونو څخه استفاده وکړای شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړینو فعالیتونو څخه وروسته د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. $x=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$ $y=\frac{1+4}{2}=\frac{5}{2}$

5- د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې

په هغه صورت کې چې د ورودي برخې چارت موجود وي د $x=\dfrac{x_1+rx_2}{1+r}$ او $y=\dfrac{y_1+ry_2}{1+r}$ فورمول ثبوت کړئ لومړی او دویم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ د (313) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي او محترم ښوونکي دې لارښوونه او مرسته ورسره وکړي چې حل یې په لاندې ډول دی:

که $A(4,6)=(x_1y_1)$ او $B(-2,3)=(x_2y_2)$ وي:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{4+\frac{1}{2}(-2)}{1+\frac{1}{2}}=2 \qquad y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{6+\frac{1}{2}(3)}{1+\frac{1}{2}}=5 \quad \Rightarrow p(2,5)$$

همدارنگه دریم مثال هم د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ، تر څو زده کوونکي د یو قطعه خط د تنصیف د نقطې د وضعیه کمیاتو په پیدا کولو وپوهیږي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

لاندې پوښتنه حل کړئ.

دهغه مستقیمو خطونو د تنصیف د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړی چې د لاندې راکړل شوو نقطو له جوړو څخه تیریږي.

$a:\ (-1,3)\ ,(11,3)$ $\qquad b:\ (3,-2)\ ,(-4,3)$ $\qquad c:\ (100,-50),(-100,50)$

$d:\ (5,4)\ ,\ (-\frac{1}{2}),\frac{1}{2})$ $\qquad e:\ (0,0)\ ,\ (8,-1)$

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

د هغه قطعه خط د تنصیف دنقطې وضعیه کمیات پیدا کړی، چې د $(-2,-5)$ او $(18,3)$ له نقطو څخه تیریږي.

ځواب $M(8,-1)$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو د پیداکولو دویمه طریقه چې یو قطعه خط په یوه معین نسبت باندې ویشي.

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{EC}=\frac{1+r}{r}$$

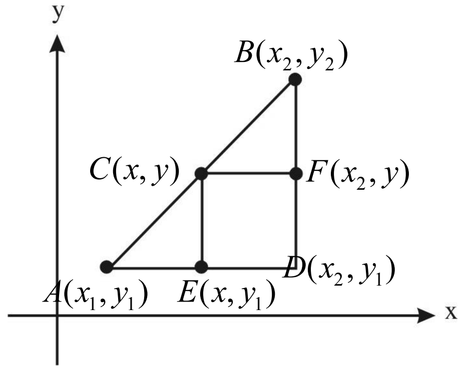
$$\frac{AD}{AE}=\frac{1+r}{r}\Rightarrow\frac{AD}{AE}-1=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{AD-AE}{AE}=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{ED}{AE}=\frac{1}{r}$$

$$\frac{AE}{ED}=r......................(I)$$

$$\frac{BD}{EC}=\frac{1+r}{r}\Rightarrow\frac{BD}{EC}-1=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{BD-EC}{EC}=\frac{1}{r}$$

$$EC=DF$$

$$\Rightarrow\frac{BD-DF}{DF}=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{BF}{DF}=\frac{1}{r}\Rightarrow\frac{DF}{BF}=r..............(II)$$



له (I)معادلې څخه لرو چې:

$$\frac{AE}{ED}=r\Rightarrow\frac{x-x_1}{x_2-x}=r\Rightarrow x-x_1=r(x_2-x)\Rightarrow x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

له(II) معادلې څخه لرو چې:

$$\frac{DF}{FB}=r\Rightarrow\frac{y-y_1}{y_2-y}=r\Rightarrow y-y_1=r(y_2-y)\Rightarrow y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د $\overline{AB}$ د قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات $(2,-1)$ دي که $A(-1,-3)$ وي، د B د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

حل:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

$$2=\frac{-1+x_2}{2}\Rightarrow 4=-1+x_2\Rightarrow x_2=5$$

$$-1=\frac{-3+y_2}{2}\Rightarrow\ -2=-3+y_2\Rightarrow y_2=1$$

د B د نقطې وضعیه کمیات (5.1) دي.

2- د هغه قطعه خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,-4)$ له نقطو څخه تیریږي.

حل:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1-4}{2}=\frac{-3}{2}$$

د AB قطعه خط د تنصيف د نقطې وضعیه کمیات $(\frac{1}{2},\frac{-3}{2})$ دي.

3- د هغه نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تیریږي.

a: داخلاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت وویشي. b: خارجاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت وویشي.

حل:

a)

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{4+(\frac{1}{2})(-2)}{1+\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{3}{2}}=2$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{6+(\frac{1}{2})(3)}{\frac{3}{2}}=\frac{15}{2}\cdot\frac{2}{3}=5$$

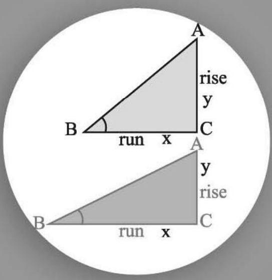
د (2,5) نقطه د AB قطعه خط داخلاً د $\frac{1}{2}$ په نسبت ویشي.

b) ځرنګه چې $r<0$ دی.

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{4+(-\frac{1}{2})(-2)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{5}{\frac{1}{2}}=5\cdot 2=10$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{6+(\frac{-1}{2})3}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{1}=9$$

د هغې نقطې وضعیه کمیات چې د AB قطعه خط خارجاً د $\frac{1}{2}$ په نسبت ویشي (10,9) دي.



د یو مستقیم خط میل

(Slope of a Straight-line)

د درسي کتاب (315) **مخ** **د لوست وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د یو مستقیم خط د میل زاویه وپېژني. • په دې وپوهیږي چې د یو مستقیم خط میل څه وخت مثبت، منفي او صفر وي. • د یو مستقیم خط د میل فورمول په لاس راوړلای شي . • په دې پوه شي چې د یو مستقیم خط په ټولو نقطوکې میل مساوي دي. • زده کړې چې د موازي خطونو میلونه سره مساوي او د عمود خطونو د میلونو د ضرب حاصل (1-) دی. • د هغه مستقیم خط میل پیداکړای شي چې دوې نقطې یې معلومې وي. • د ریاضي د مسایلو په حلولو کې د یو مستقیم خط د میل له فورمول څخه استفاده وکړای شي او په اهمیت یې پوه شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. د لومړنی مایلې سطحې میل نسبت دویمې مایلې سطحې ته زیات دی، ځکه چې د میل زاویه یې د دویمې مایلې سطحې د میل له زاویې څخه لویه ده.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې**

د چارت له مخې او یا د تختې پر مخ دې وروښودل شي چې د X د محور او د ټولو هغو خطونو د میل زاویه چې د X له محور سره موازي دي صفر ده او د y د محور او د ټولو هغو خطونو د میل زاویه چې د y له محور سره موازي دي (90°) ده، په همدې ډول دې توضیح شي چې د یو مستقیم خط میل څه وخت مثبت، منفي او صفر وي.

ددې لوست د لومړی فعالیت پوښتنه له زده کوونکو وکړئ چې ځواب یې دا دی (د x د محور میل صفر او د y محور میل تعریف شوي نه دي.)

د یو مستقیم خط د میل فورمول دې په شکل کې یا د چارت له مخې او یا د تختې پر مخ ثبوت شي.

لومړی او دویم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل شي ددې لوست دویم فعالیت دې زدکوونکي په ګروپونو کې حل کړي چې ځواب یې په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{-2-5} = \frac{-3}{8}$$

که $A(4,-5)$ ، $B(7,5)$ او $C(10,15)$ وي:

$$m_{AB}=\frac{5+5}{7-4}=\frac{10}{3} \qquad m_{BC}=\frac{15-5}{10-7}=\frac{10}{3}$$

نو د B,A او C نقطې پر يوه مستقيم خط واقع دي.

د شکل له مخې دې د موازي او عمود خطونو ميلونه توضيح شي او هم دا دې واضح شي چې د يو مستقيم خط ميل څه وخت مثبت، منفي او صفر وي، او څه وخت تعريف شوی نه وي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- د هغو مستقيمو خطونو ميل پيدا کړئ چې له لاندينيو نقطو څخه تيرېږي .

$(3,-5)$ او $(-3,-2)$ ← ځواب $m=\frac{1}{2}$

$(\sqrt{2},8)$ او $(3,8)$ ← ځواب $m=0$

2- د k په کوم قيمت دوه متقاطع مستقيم خطونه چې د $(-2,5),(4,3)$ او $(6,k),(-3,7)$ له نقطو څخه يو پر بل عمود دي؟ ځواب: $k=34$

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې**

د هغه مستقيم خط ميل پيدا کړئ چې د $(\frac{1}{3},\frac{1}{6})$ او $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ له نقطو څخه تيرېږي. (ځواب $m=2$)

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

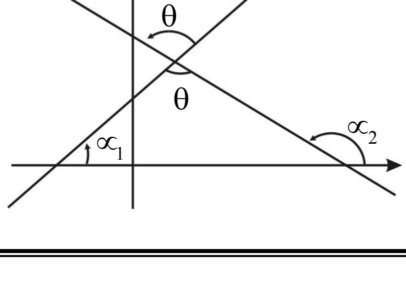
- د يو مستقيم خط ميل مساوي دی په:

$$m=\frac{\text{vertical Change}}{\text{Horizontal change}}=\frac{\text{change in y}}{\text{change in x}}$$

(عمودي تغير / افقي تغير = په y کې تغير / په x کې تغير)

- د دوو متقاطع خطونو ترمنځ زاويه (Angle Between tow straight lines): که α_1 او α_2 د l_1 او l_2 د خطونو د ميل زاويې وي او θ له l_1 څخه l_2 ته د دواړو متقاطع خطونو ترمنځ زاويه وي.

$$\theta+\alpha_1=\alpha_2$$
$$\theta=\alpha_2-\alpha_1$$
$$\tan\theta=\tan(\alpha_2-\alpha_1)$$
$$\tan\theta=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1-\tan\alpha_1\tan\alpha_2}=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$$



او د حادې زاويې لپاره:

$$\tan\theta=\left|\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}\right|$$

1- که l_1 او l_2 خطونه سره موازي وي $\theta = 0^\circ$ ده.

$\tan 0^\circ = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow 0 = m_2 = m_1$ یا $m_1 = m_2$ کیږي.

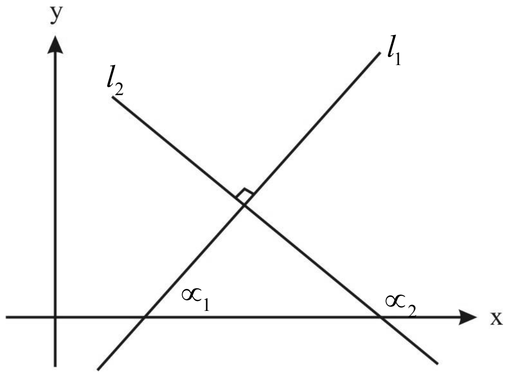
2- که l_1 او l_2 خطونه یو پر بل عمودي وي $\theta = 90^\circ$ ده.

$\tan 90^\circ$ تعریف شوی نه ده $= \infty$

$$\tan 90^\circ = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \Rightarrow 1 + m_1 m_2 = 0 \Rightarrow m_1 m_2 = -1$$

- د l_1 او l_2 دوه خطونه څه وخت چې یو پر بل عمود وي د میلونو د ضرب حاصل یې (-1) دي.

ثبوت:



$$\propto_2 = 90^\circ + \propto_1$$

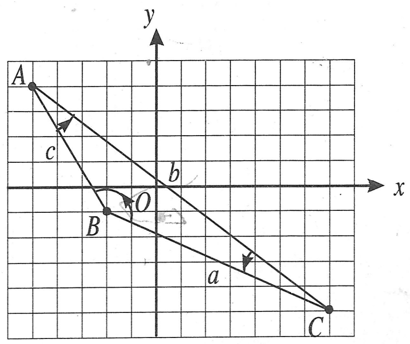
$$\tan \propto_2 = \tan(90^\circ + \propto_1) = -\cot \propto_1 = \frac{-1}{\tan \propto_1}$$

$$\tan \propto_1 \cdot \tan \propto_2 = -1 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

مثال: د هغه مثلث زاویې چې راسونه یې $A(-5,4)$, $B(-2,-1)$, $C(7,-5)$ وي عبارت دي له:

که د BC,AB او CA د ضلعو میل په ترتیب سره په m_c , m_a , m_b وي، نو.

$$m_a = \frac{-5+1}{7+2} = -\frac{4}{9} \qquad m_c = \frac{4+1}{-5+2} = -\frac{5}{3} \qquad m_b = \frac{-5-4}{7+5} = \frac{-3}{4}$$



د A زاویه له AB څخه AC ته عبارت ده له:

$$\tan A = \frac{m_b - m_c}{1 + m_b m_c} = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{5}{3}}{1 + (-\frac{3}{4})(-\frac{5}{3})} = \frac{11}{27} \Rightarrow A = 22.2^\circ$$

د B زاویه له BC څخه BA ته عبارت ده له:

$$\tan B = \frac{m_c - m_a}{1 + m_c m_a} = \frac{-\frac{5}{3} + \frac{4}{9}}{1 + (-\frac{5}{3})(-\frac{4}{9})} = \frac{-33}{7} \Rightarrow B = 144.9^\circ$$

دC زاویه له CA څخه CB ته عبارت ده له:

$$\tan C = \frac{m_a - m_b}{1 + m_a m_b} = \frac{-\frac{4}{9} + \frac{3}{4}}{1 + (-\frac{4}{9})(-\frac{3}{4})} = \frac{11}{48} \Rightarrow C = 12.9^\circ$$

مثال: زاویه په منځ له هغه خط څخه چې میل یې $-\frac{7}{3}$ دی و هغه خط ته چې میل یې $\frac{5}{2}$ دی عبارت ده له:

دلته $m_2=\frac{5}{2}$ او $m_1=\frac{-7}{3}$ دی که د θ زاویه له l_1 څخه l_2 ته وي نو؛

$$\tan\theta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{\frac{5}{2}-(\frac{-7}{3})}{1+\frac{5}{2}(\frac{-7}{3})}=\frac{29}{-29}=-1$$

نو $\theta=135$ درجه ده.

مثال: که د دوو مستقیمو خطونو میلونه $\frac{1}{2}$ او 3 وي له l_1 څخه د l_2 ته د زاویې پراخوالی عبارت دی له:

حل:

$$\tan\propto=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}=1\Rightarrow\theta=45^\circ=(\frac{\pi}{4})^R$$

مثال: که د l_1 مستقیم خط د (1,2) او (7,−1) له نقطو او د l_2 خط د (3,2) او (5,6) له نقطو څخه تیر شي د l_1 او l_2 دوو متقاطو خطونو زاویه له l_1 څخه l_2 ته عبارت ده له:

$$m_1=\frac{-1-2}{7-1}=-\frac{1}{2}\qquad\qquad m_2=\frac{6-2}{5-3}=2$$

$$\tan\propto=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{2+\frac{1}{2}}{1+2(-\frac{1}{2})}=\frac{\frac{5}{2}}{0}=\infty\Rightarrow\theta=90^\circ=(\frac{\pi}{2})^R$$

دوه یا درې مستقیم خطونه:

- که د l_1,l_2 دوه یو له بل جلا (distinct lines) خطونه ولرو یو له دریو حالتونو څخه موجود کیدای شي.

1- موازي دي. 2- یو بر بل عمود دي. 3- نه موازي او نه عمود دي.

که l_1 د مستقیم خط معادله $a_1x+b_1y+c_1=0$ او د l_2 د مستقیم خط معادله $a_2x+b_2y+c_2=0$ وي نو د l_1 د خط میل $m_1=-\frac{a_1}{b_1}$ او د l_2 خط میل $m_2=-\frac{a_2}{b_2}$ دی.

1- که $l_1 \parallel l_2$ وي: (د دوو مستقیمو خطونو د موازیتوب شرط) $-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2}\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\Rightarrow a_1b_2-b_1a_2=0$

2- که $l_1\perp l_2$ وي: (د دوو خطونو د عمودوالي شرط) $m_1m_2=-1\quad(-\frac{a_1}{b_1})(-\frac{a_2}{b_2})=-1\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$

3- که دوه مستقیم خطونه، نه موازي او نه عمود وي، نو متقاطع دي.

د دوو مستقمیو خطونو د تقاطع د نقطې وضعیه کمیات:

په هغه صورت کې چې د l_1 او l_2 مستقیم خطونه سره موازي نه وي $(a_1b_2-b_1a_2\neq0)$ ؛ نو:

د l_1 دخط معادله $a_1x+b_1y+c_1=0............I$

د l_2 د خط معادله $a_2x+b_2y+c_2=0............II$

که $P(x_1, y_1)$ نقطه د l_1 او l_2 د مستقیمو خطونو د تقاطع نقطه وي، ددې معادلو له حل څخه لرو چې:

$$\frac{x_1}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y_1}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$x_1 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y_1 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad \Rightarrow p(x_1y_1) = \left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$$

مثال: د $5x+7y=35$ او $3x-7y=21$ مستقمیو خطونو د تقاطع د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

ددې معادلو له حل څخه لرو چې $x=7$ او $y=0$ ده یا دا دواړه مستقیم خطونه د $(7,0)$ په نقطه کې متقاطع دي.

مثال: د $2x+4y-10=0$ او $5x-3y+1=0$ مستقیمو خطونو د تقاطع د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

$$(x, y) = \left(\frac{(4)(1) - (-3)(-10)}{(2)(-3) - (5)(4)}, \frac{(5)(-10) - (2)(1)}{(2)(-3) - (5)(4)}\right) = (1,2)$$

نوټ: که دوه خطونه سره موازي وي دا سیستم حل نه لري یا $(a_1b_2 - a_2b_1 = 0)$

د دریو مستقیمو خطونو د تقاطع شرط:

که:

$$l_1: \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$l_2: \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$l_3: \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

دا درې مستقیم خطونه په هغه صورت کې سره متقاطع دي چې:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

که l_1 او l_2 خطونه موازي نه وي، نو د (x_1, y_1) په نقطه کې قطع کوي.

$$x_1 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y_1 = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

څرنګه چې درې واړه خطونه سره متقاطع دي، نو د تقاطع نقطه پر l_3 هم واقع ده.

که دا قیمتونه د l_3 د مستقیم خط په معادله کې وضع شي، نو لرو چې:

$$a_3\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + b_3\left(\frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + c_3 = 0$$

یا:

$$a_3(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3(a_2c_1 - a_1c_2) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

د کار د اسانتیا لپاره د پورتني معادلې ضریبونه د یترمنانټ په شکل لیکو.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

چې دا د دریو مستقیمو خطونو د تقاطع شرط دی که دې دیترمنانت ته د دریم سطر په واسطه انکشاف ورکړل شي، نو

$a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(a_2c_1-a_1c_2)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$ په لاس راځي.

مثال: ښودلای شو لاندې مستقیم خطونه چې معادلې يې راکړل شوي دي متقاطع دي که نه؟ او که متقاطع وي د تقاطع دنقطې وضعيه کميات يې عبارت دي له.

$x+4y+3=0$……………I

$5x-4y-5=0$……………II

$2x+2y+1=0$……………III

د پورتنيو معادلو ضريبونو ديترمينانت عبارت دی له:

$$\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 5 & -4 & -5\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & -24 & -20\\ 0 & -6 & -5\end{vmatrix}\qquad R_2-5R_1\qquad R_3-2R_1$$

$$=1\begin{vmatrix}-24 & -20\\ -6 & -5\end{vmatrix}=1(120-120)=0$$

په پايله کې پورتني مستقيم خطونه سره متقاطع دي او د تقاطع د نقطې وضعيه کميات يې عبارت دي له:

$$(x_1y_1)=\left(\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}\right)=\left(\frac{(4)(-5)-(-4)(3)}{(1)(-4)-(5)(4)},\frac{(3)(5)-(-5)(1)}{(1)(-4)-(5)(4)}\right)=(\frac{1}{3},-\frac{5}{6})$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د هغه مستقیم خط ميل پيدا کړئ چې د $(3,-2)$ او $(2,7)$ له نقطو څه تيريږي.

حل:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{7-(-2)}{2-3}=\frac{9}{-1}=-9$$

2- که $A(8,6)$، $B(-4,2)$ او $C(-2,-6)$ د يو مثلث راسونه وي د مثلث د هرې ضلعې ميل پيدا کړي.

حل:

$$m_{AB}=\frac{2-6}{-4-8}=\frac{-4}{-12}=\frac{1}{3}$$

$$m_{BC}=\frac{-6-2}{-2-(-4)}=\frac{-8}{2}=-4\qquad m_{AC}=\frac{-6-6}{-2-8}=\frac{-12}{-10}=\frac{6}{5}$$

3- د مستقیم خط د ميل په مرسته وښاياست چې $(a,2b)$، $(c,a+b)$ او $(2c-a,2a)$ نقطې پر يو مستقيم خط باندې واقع دي.

حل: که $A\ (a,2b)$ او $B\,(c,a+b)$ او $C\ (2c-a,2a)$ وي، نو دا نقطې هغه وخت په يوه مستقيم خط باندې واقع دي چې د AB ميل د BC له ميل سره مساوي وي.

$$m_{AB}=\frac{a+b-2b}{c-a}=\frac{a-b}{c-a}\qquad m_{BC}=\frac{2a-(a+b)}{2c-a-c}=\frac{a-b}{c-a}$$

او يا د AB=AC+BC په واسطه هم ښودلای شو چې دا درې نقطې پر يوه مستقيم خط باندې واقع دي، خو څرنګه چې د لوست موضوع د مستقيم خط ميل دی، نو له دې سببه د ميل په واسطه وښودل شوه.

4- د $\overline{AB}$ مستقیم خط چې د $A(1,-2)$ او $B(2,4)$ له نقطو څخه او د $\overline{CD}$ مستقیم خط چې د $C(4,1)$ او $D(-8,2)$ له نقطو څخه تیریږي، دا دواړه خطونه سره:

a) موازي دي. b) عمود دي. c) هیڅ یو

حل:

$$m_{CD}=\frac{2-1}{-8-4}=\frac{1}{-12}=-\frac{1}{12} \qquad m_{AB}=\frac{4-(-2)}{2-1}=\frac{6}{1}$$

د c جز سم دی.

5- د $y=3$ خط او د $x=3$ مستقیم خطونه یو له بله سره څه اړیکه لري؟

a) موازي دي. b) عمود دي. c) هیڅ یو

حل: د b جز سم دی.

6- د $x=-1$ او $x=3$ مستقیم خطونه سره:

a) موازي دي. b) عمود دي. c) هیڅ یو

حل: د a جز سم دی.

7- د $y=-\sqrt{3}$ د مستقیم خط میل مساوي دی په:

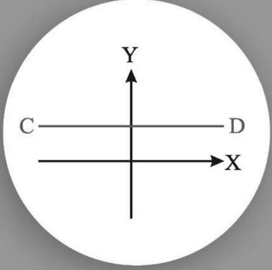
a) 1 b) صفر c) -1 d) تعریف شوی نه ده.

حل: څرنگه چې دا خط د x له محور سره موازي دي، نو میل یې صفر دي (د b جز سم دی).

8- د $x=0.03$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a) 1 b) صفر c) -1 d) تعریف شوی نه دی.

حل: څرنگه چې مستقیم خط د x پر محور عمود دی، نو میل یې تعریف شوي نه دی (د d جز سم دی).



د یو مستقیم خط معادله

د درسي کتاب (319)مخ   د لوست وخت (2 درسي ساعتونه)

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د یومستقیم خط د معادلې د پیداکولو طریقه زده کړي. • له راکړل شوو شرطونو سره سم د مستقیمو خطونو معادلې پیداکړای شي • د هندسي مسایلو په حلولو کې ترې استفاده وکړای شي او اهمیت یې درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړینو فعالیتونو څخه وروسته د انګیزې د پیداکولولپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ چې ځواب یې په لاندې ډول دی:(د ټولو هغو مستقیمو خطونو معادلې چې د x له محور سره موازي وي $y=b$ چې b یو ثابت عدد دی.)
د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې زده کوونکو ته دې توضیح شي چې د(X) له محور سره د(l) موازي خط کیدای شي چې د(X)له محور څخه پورته یا د(X) له محور لاندې او یا د(X) پر محور پورت وي چې په ترتیب سره معادلې یې: $y=b$, $y=-b$ او$y=0$ دي. لومړی مثال دې حل شي، په چارت او یا د تختې پر مخ دې وروښودل شي. ددې مخ د فعالیت پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ چې ځواب یې y=0 دی. د هغه مستقیمو خطونو معادلې دې چې د y له محور سره موازي وي، توضیح شي چې مستقیم خط کیدای شي د y د محور ښې خواته یا کیڼې خواته او یا د y پر محور منطبق وي. چې معادلې یې په ترتیب سره $x=a$ ، $x=-a$ او $x=0$ دي. دویم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل شي. ددې مخ فعالیت دې زده کوونکي حل کړي چې ځواب یې x=0 ده. د هغه مستقیم خط د معادلې له توضیح کولو وروسته چې میل او د y له محور سره یې د تقاطع نقطه معلومه وي، دریم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل شي. وروسته له دې چې د هغه مستقیم خط معادلې چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي او یا دوې نقطې یې معلومې وي، توضیح شي. (4) او(5) مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ. د هغه مستقیم خط د معادلې له توضیح کولو وروسته چې د X او Y له محورنو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي، شپږم او اووم مثال هم د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.	
د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې لاندې پوښتنه دې حل شي: د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $p(0,0)$ له نقطې تیریږي او د $3x-2y+2=0$ پر مستقیم خط عمود وي.	

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

لاندې پوښتنه دې له زده کوونکو څخه وپوښتل شي.

1- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $p(0,0)$ له نقطې څخه تیریږي او د $x+y+1=0$ له خط سره موازي وي.

2- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د (X) محور په 5 او د y محور په $\frac{1}{5}$ کې قطع کوي. $y=\frac{1}{25}x-\frac{1}{5}$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- د هغه مستقیم خط معادله چې میل یې $\frac{2}{3}$ او د y محور په $b=3$ کې قطع کړي، عبارت ده له:

$y=\frac{2}{3}x+3$

2-

- د هغه مستقیم خط معادله چې د $(4,5)$ له نقطې څخه تیریږي او د x له محور سره موازي وي، عبارت ده له: $y=5$
- د هغه مستقیم خط معادله چې د $(-6,7)$ له نقطې څخه تیریږي او د y موازي باشد عبارت از $x=-6$ می باشد.
- د هغه مستقیم خط معادله چې د $(-2,3)$ له نقطې څخه تیریږي او میل یې 2 وي، عبارت ده له $2x+y+7=0$
- د هغه مستقیم خط معادله چې د $(1,4)$ له نقطې څخه تیریږي او میل یې تعریف شوي نه وي، عبارت ده له $x=1$
- د هغه مستقیم خط معادله چې د $(3,0)$ او $(0,-2)$ له نقطو څخه تیریږي عبارت ده له: $2x-3y-6$.

3- د هغه مستقیم خط معادله چې له $p(-1,4)$ نقطې څخه تیر شي او د $x-2y-7=0$ پر مستقیم خط عمود وي عبارت ده له: $y=-2x+2$

4- د هغه مستقیم خط معادله چې د (X) محور په 4 کې او د y محور په $-\frac{1}{2}$ کې قطع کوي، عبارت ده له:

$(x-8y-4=0)$

5- د هغه مستقیم خط معادله چې د (X) محور په $(a,0)$ او د y محور د $(0,b)$ په نقطه کې قطع کوي، عبارت ده له:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$
$$bx+ay=ab$$
$$ay=-bx+ab$$
$$y=-\frac{b}{a}x+b \Rightarrow m=-\frac{b}{a}$$

6- د هغه مستقیمو خطونو د عمودي ناصفونو معادلې چې له لاندینیو نقطو څخه تیریږي، عبارت دي له:

$(2,1),(1,2)\longrightarrow y=x$ $\qquad$ $(3,3),(0,-1)\longrightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{17}{8}$

7- د هغه مستقیم خط معادله چې د $P(0,0)$ له نقطې څخه تیریږي او د $x+y+1=0$ د مستقیم خط سره موازي وي، عبارت ده له: $y=-x$

د هغه مستقیم خط معادله چې د $P(2,-3)$ له نقطې څخه تیریږي ا و د $3x-7y+3=0$ له مستقیم خط سره موازي وي، عبارت ده له: $y=\frac{3}{7}x-\frac{27}{7}$

د هغه مستقیم خط معادله چې د $P(1,2)$ له نقطې څخه تیریږي او د $x+9y-11=0$ له مستقیم خط سره موازي وي عبارت ده له: $y=-\frac{1}{9}x+\frac{19}{9}$

د هغه مستقیم خط معادله چې میل یې -4 او د x محور په -9 کې قطع کړي، عبارت ده له: $4x+y-36=0$

د هغه مستقیم خط د عمودي ناصف معادله چې د $(2,-3)$ او $(4,5)$ له نقطو څخه تیریږي، عبارت ده له: $x+4y-7=0$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیدا کړئ چې:

a: د x له محور سره موازي او د $(7,-9)$ له نقطې څخه تیریږي.

b: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د X پر محور عمود او د $(-5,3)$ له نقطې څخه تیریږي.

حل:

a) $y-y_1=m(x-x_1)$ $\quad y+9=0\Rightarrow y=-9 \quad m=0$

b) $x=-5$

2- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیدا کړئ چې:

a: میل یې 7 او د $(-6,5)$ له نقطې څخه تیریږي.

b: میل یې صفر او د $(8,-3)$ له نقطې څخه تیریږي.

c: د $(-8,5)$ له نقطې څخه تیریږي او میل یې تعریف شوي نه وي.

d: چې د $(-5,-3)$ او $(9,-1)$ له نقطو څخه تیریږي.

e: چې میل یې -4 او د Y محور په -9 کې قطع کوي.

حل:

$y-y_1=m(x-x_1)$

a) $y-5=7(x+6)\Rightarrow y-5=7x+42\Rightarrow 7x+47=7x-y+47=0$

b) $y+3=0(x-8)\Rightarrow y=-3\Rightarrow y+3=0$

c) $x=-8\Rightarrow x+8=0$

d) $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\Rightarrow y+3=\frac{-1+3}{9+5}(x+5)$

$y+3=\frac{2}{14}(x+5)\Rightarrow 14y+42=2(x+5)$

$14y+42=2x+10=-2x+14y+32=0$

$x-7y-16=0$

e) $y=mx+b$

$y=-4x+9$

$y+4x-9=0$

3- د هغه مثلث د ضلعو معادلې پیدا کړئ چې راسونه یې $A(-3,2)$ ، $B(5,4)$ او $c(3,-8)$ وي.

$$AB: y-2=\frac{4-2}{5+3}(x+3) \Rightarrow y-2=\frac{2}{8}(x+3)$$

$$y-2=\frac{1}{4}(x+3) \qquad 4y-8=x+3 \Rightarrow 4y-x-11=0$$

دویمه طریقه:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y}$$

$$\frac{x+3}{5+3}=\frac{y-2}{4-2} \Rightarrow \frac{x+3}{8}=\frac{y-2}{2} \Rightarrow \frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{1} \Rightarrow x-4y+11=0$$

$$BC: y-4=\frac{-8-4}{3-5}(x-5)=6(x-5)=6x-30$$

$$y-4=6x-30$$

$$6x-y-26=0$$

یا: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y}$

$$\frac{x-5}{3-5}=\frac{y-4}{-8-4} \Rightarrow \frac{x-5}{-2}=\frac{y-4}{-12} \Rightarrow 6x-y-26=0$$

$AC: A(-3,2)=(x_1y_1) \quad C(3,-8)=(x_2,y_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y} \Rightarrow \frac{x+3}{3+3}=\frac{y-2}{-8-2} \Rightarrow \frac{x+3}{6}=\frac{y-2}{-10} \Rightarrow 5x+3y+9=0$$

4- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(-4,-6)$ له نقطې څخه تیریږي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې $\frac{-3}{2}$ وي.

حل:

$$y+6=m_1(x+4)$$

$$m_2=\frac{-3}{2}\ ,\ m_1 \cdot m_2=-1 \Rightarrow m_1(\frac{-3}{2})=-1-3m_1=-2 \Rightarrow m_1=\frac{2}{3}$$

$$y+6=\frac{2}{3}(x+4) \Rightarrow 3y+18=2x+8$$

$$3y-2x+10=0 \Rightarrow 2x-3y-10=0$$

5- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(11,-5)$ له نقطې څخه تیریږي او له هغه خط سره موازي چې میل یې -24 وي.

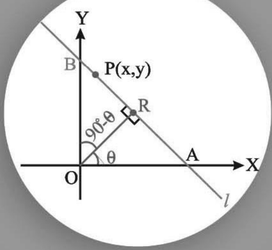
حل:

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y+5=m_1(x-11)$$

$m_1=m_2=-24$ شرط موازی بودن است.

$$y+5=-24(x-11)$$

$$y+24x-259=0$$



د یو ه مستقیم خط نورمال معادله

د درسي کتاب (325)**مخ** **د لوست وخت**(2 **درسي ساعتونه**)

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکو باید: • په نورمال شکل د یو مستقیم خط د معادلې د پیدا کولو په طریقه وپوهیږي. • د یو مستقیم خط عمومي معادله وپیژني. • د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د مستقیم خط د معادلو په نورو شکلونو باندې زده کړي. • د مستقیم خط عمومي معادله د مستقیم خط د نورو معادلو په شکلونوتبدیل کړای شي. • د هندسي مسایلو په حلولو کې له دې معادلو څخه استفاده وکړای شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته په داسې حال کې چې د ورودي برخې د شکل چارت د ټولګي مخامخ موجود وي او یا د تختې پر مخ شکل رسم شوی وي د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ او په دې برخه کې دې محترم ښوونکي مرسته وکړي. د یو مستقیم خط نورمال خط هغه خط دي چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه پر راکړل شوي مستقیم خط باندې عمود وي.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې**

د یو مستقیم خط د نورمال معادلې لاس ته راوړل زده کوونکو ته توضیح کړي او لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ. بیا دې زده کوونکي ددې لوست لومړی فعالیت په ګروپونو کې سرته ورسوي چې حل یې په لاندې ډول دی

$$x\cos 30^\circ + y\sin 30^\circ = 10$$

$$x\cos 30^\circ + y\sin 30^\circ - 10 = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 10 \Rightarrow \sqrt{3}x + y = 20$$

د مستقیم خط عمومی معادله او خاص حالتونه یې زده کوونکو ته توضیح کړئ.د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په معیاري شکل زده کوونکو ته توضیح کړئ او د زده کوونکو په فعاله ونډه اخیستنه دویم مثال د زده کوونکو په فعاله ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

په همدې ډول کله چې د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه معادلې پـه شـکل چـې میـل او یـوه نقطـه یـې معلومـه وي، واضح شي، دریم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ. ددې لپاره چې د مستقیم خـط د عمـومي معـادلې بـدلول په داسې یوه معادله چې د مستقیم خط دوې نقطې معلومې وي، توضیح شي. څلورم مثال حل کـړئ. ددې لپـاره چـې د مـستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په داسې معادله چې د X او Y له محورونو سـره یـې د تقـاطع نقطـې معلـومې وي، توضـیح شـي. پنځم مثال حل کړئ او د 330 مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي. چې ځواب یې دا دی: $3x-2y=6$

د y له محور سره د تقاطع لپاره x=0 وضع کوو چې په نتیجه کې $y=-3$ کیږي، نو دا مستقیم خط د y محـور د (0,–3) پـه نقطه کې قطع کوي د x له محور سره د تقاطع لپاره y=0 وضع کـوو، نـو لـرو چـې x=2 دی، نـو دامـستقیم خـط د x محـور د (2,0) په نقطه کې قطع کوي.

د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلون د نورمال په شکل توضیح او شپږم مثال حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

د (331) مخ فعالیت دې حل شي چې ځواب یې په لاندې ډول دی:

$$k=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{2^2+(-3)^2}=\pm\sqrt{13}$$

څرنګه چې $c>0$ دی، نو: $k=-\sqrt{13}$

د معادلې دواړه خواوې په $-\sqrt{13}$ ویشو:

$$\frac{2x-3y+6}{-\sqrt{13}}=\frac{0}{-\sqrt{13}}$$

$$\frac{-2x}{\sqrt{13}}+\frac{3y}{\sqrt{13}}-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

یا

$$\frac{-2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

چې $\sin\theta=\frac{13}{\sqrt{13}}$ او $\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{13}}$ او د نورمال اوږدوالی $\frac{6}{\sqrt{13}}$ دي.

نو θ په دویمه ناحیه کې واقع ده او د مثلثاتي جدول له مخې $\theta=123^\circ\ 40'$ دي، نو ددې خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos 123^\circ\ 40' + y\sin 123^\circ\ 40' - \frac{6}{\sqrt{13}=0}$$

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

د لوست د ارزونې لپاره لاندې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د هغه مستقیم خط نورمال معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 7 واحده او د نورمال د میل زاویه یې 150° وي.

ځواب: $(\sqrt{3}x-y+14=0)$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د یو مستقیم خط د معادلو شکلونه:

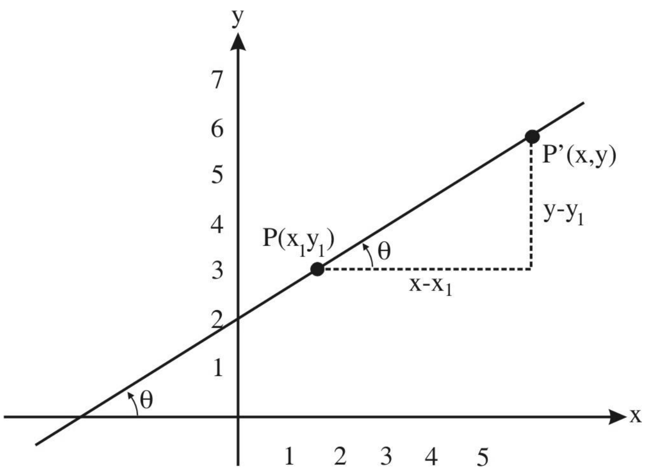
که B, A او C ثابت عددونه او A او B دواړه په عین وخت کې صفر نه وي.

1	$Ax + By = C$	(standard from)
2	$y = mx + b$	$(slop - intercept \quad form)$
3	$y - y_1 = m(x - x_1)$	$(point - slope \quad form)$
4	$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$	$(Tow \quad points \quad form)$
5	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$	$(Tow - intercepts \quad form)$
6	$x\cos\theta + y\sin\theta = p$	$(Normal \quad form)\ (PerpendicularForm)$
7	$\dfrac{x - x_1}{\cos\theta} = \dfrac{y - y_1}{\sin\theta} = r$	$(symmetric \quad form)$

د 7 شمارې ثبوت: که l یو داسې مستقیم خط وي چې عمود نه وي او د میل زاویه یې θ او میل یې m وي او د $p(x_1, y_1)$ له نقطې څخه تیر شي.

$$\tan\theta = m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow \frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$$

چې د معادلې دې شکل ته د هغه مستقیم خط د متناظر شکل معادله وایي چې د $p(x_1, y_1)$ له نقطې څخه تیرېږي او د x له محور سره د θ زاویه جوړوي.



$pp' = r$ ده. لرو چې:

$$\cos\theta = \frac{x - x_1}{r} \qquad \sin\theta = \frac{y - y_1}{r}$$

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r$$

$$x = x_1 + r\cos\theta$$

$$y = y_1 + r\sin\theta$$

ځکه چې:

$$m = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{(y - y_1)^2}{(x - x_1)^2}$$

$$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{(y-y_1)^2+(x-x_1)^2}{(x-x_1)^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{r^2}{(x-x_1)^2}$$

$$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{r}{x-x_1}$$

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=r\Rightarrow x=x_1+r\cos\theta$$

مثال: د $2x-3y+4=0$ د معادلې بدلول په نورو شکلونو باندې:

a- چې میل او د y له محور سره یې تقاطع معلومه وي.

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$$

چې میل یې $\frac{2}{3}$ او د y محور په $\frac{4}{3}$ کې قطع کوي.

b- میل او یوه نقطه یې معلومه وي:

یوه نقطه یې $(-\frac{c}{a},0)=(-2,0)$ ده:

$$m=-\frac{a}{b}=\frac{2}{3}\qquad y-0=\frac{2}{3}(x+2)\qquad y=\frac{2}{3}(x+2)$$

c- دوې نقطې یې معلومې وي:

دوې نقطې یې عبارت دي له: $(0,-\frac{c}{b})=(0,\frac{4}{3})$ او $(-\frac{c}{a},0)=(-2,0)$

$$(0,-\frac{c}{b})=(0,\frac{4}{3})$$

$$y-0=\frac{\frac{4}{3}-0}{0-(-2)}\quad(x+2)$$

d- له محورنو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي:

$$2x-3y=-4\Rightarrow\frac{2x}{-4}-\frac{3y}{-4}=1$$

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{\frac{4}{3}}=1$$

e: د $2x-3y+4=0$ معادلې نورمال شکل عبارت دی له:

$2x-3y=-4$

دواړه خواوې په $\pm\sqrt{(2)^2+(-3)^2}=\pm\sqrt{13}$ باندې ویشو څرنگه چې $C>0$ ده، نو پر $-\sqrt{13}$ یې ویشو.

$$\frac{-2x}{\sqrt{13}}+\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{4}{\sqrt{13}}$$

$\cos\theta=\frac{-2}{\sqrt{13}}$, $\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$ او $p=\frac{4}{\sqrt{13}}$ دي.

f- د $2x-3y+4=0$ معادله د متناظري معادلې په شکل عبارت ده له:

$$\tan\theta = m = \frac{2}{3} \qquad \cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{13}} \qquad \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

د مستقیم خط یوه نقطه $(-2,0)$ ده. نو معادله یې $\dfrac{x+2}{\frac{-2}{\sqrt{13}}} = \dfrac{y+0}{\frac{3}{\sqrt{13}}} = r$ ده.

- که د نور مال خط اوږدوالی 3 واحده او د میل زاویه یې 120 درجې وي، ددې خط معادله او د y له محور سره یې تقاطع عبارت ده له:

$$x\cos 120^\circ + y\sin 120^\circ = 3$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \Rightarrow x - \sqrt{3}y + 6 = 0$$

- لاندې معادلې په نارمل شکل عبارت دي له:

a) $5x-12y+39=0$ b) $8x+6y-1=0$

c) $4x+7y-2=0$ d) $4x-3y+14=0$

حل:

a) $5x-12y=-39$

$-5x+12y=39$

دواړه خواوې په $\sqrt{(-5)^2+(12)^2}$ ویشو او یا پر $13=\sqrt{169}$ یې وویشئ:

$$\frac{-5x}{13}+\frac{12}{13}y=3$$

b) $8x+6y=1$

دواړه خواوې په $\sqrt{(8)^2+(6)^2}$ ویشو او یا پر $10=\sqrt{100}$ یې وویشئ:

$$\frac{8x}{10}+\frac{6y}{10}=\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{4x}{5}+\frac{3y}{5}=\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{x}{(\frac{5}{4})}+\frac{y}{(\frac{5}{3})}=\frac{1}{10}$$

c) $4x+7y=2$

دواړه خواوې په $\sqrt{65} = \sqrt{(4)^2+(7)^2}$ وېشو:

$$\frac{4x}{\sqrt{65}}+\frac{7y}{\sqrt{65}}=\frac{2}{\sqrt{65}} \Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{65}}{4}}+\frac{y}{\frac{\sqrt{65}}{7}}=\frac{2}{\sqrt{65}}$$

d) $4x-3y=-14$

$-4x+3y=14$

دواړه خواوې په $5 = \sqrt{(-4)^2+(3)^2}$ وېشو:

$$-\frac{4x}{5}+\frac{3}{5}y=\frac{14}{5}$$

- د مستقیم خط عمومي معادله ax+by+c=0 په متناظر شکل عبارت ده له:

$$\sin\theta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

د ax+by+c=0 مستقیم خط یوه نقطه $(-\frac{c}{a},0)$ ده. نو په متناظر شکل د مستقیم خط معادله عبارت ده له:

$$\frac{x-(-\frac{c}{a})}{\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{y-0}{\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}} = r$$

- د هغه مستقیم خط نور مال معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 7 واحده او د نورمال د میل زاویه 150 درجې وي عبارت ده له:

$$x(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + y(\frac{1}{2}) = 7 \Rightarrow \sqrt{3}x - y + 14 = 0$$

- د هغه مستقیم خط نورمال معادله چې د نورمال اوږدوالی یې 5 واحده او د نارمل د میل زاویه 135 درجې وي عبارت ده له:

$$x\cos 135^\circ + y\sin 135^\circ = 5 \qquad x(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + y(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 5 \Rightarrow x - y = 5\sqrt{2}$$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د $x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ - 7 = 0$ د مستقیم خط نورمال معادله د مستقیم خط په عمومي معادله تبدیله کړئ.

حل:

$$x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ - 7 = 0 \qquad x\cdot\frac{1}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2} - 7 = 0$$

$$x + \sqrt{3}y - 14 = 0$$

2- د $x\cos 225^\circ + y\sin 225^\circ - 6 = 0$ د مستقیم خط نورمال معادله د مستقیم خط په عمومي معادله تبدیله کړئ.

$$\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + y(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - 6 = 0$$

$$-\sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 12 = 0$$

3- د مستقیم خط لاندې عمومي معادلې په نورمال شکل واړوئ.

$a:\quad 15y - 8x + 3 = 0 \qquad b:\quad 2x + 5y - 2 = 0 \qquad c:\quad 2x + 4y + 7 = 0$

د a جز حل:

$$k = \pm\sqrt{A^2+B^2} = \pm\sqrt{(-8)^2+(15)^2} = \pm\sqrt{64+225} = \pm\sqrt{289} = 17$$

خرنګه چې $C > 0$ دی، نو $k = -17$ په نظر کې نیول کیږي دواړه خواوې په 17- وېشو: $\frac{8}{17}x - \frac{15}{17}y - \frac{3}{17} = 0$

خرنګه چې $\cos\theta = \frac{8}{17} > 0 \ , \ \sin\theta = \frac{-15}{17} < 0$ دي، نو θ په څلورمه ربعه کې واقع ده.

د b جز حل: $k = \pm\sqrt{A^2 + B^2} = \pm\sqrt{(2^2) + (5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

څرنګه چې $C < 0$ دی، نو $k = \sqrt{29}$ کيږي لرو چې:

$$\frac{2x}{\sqrt{29}} + \frac{5y}{\sqrt{29}} - \frac{2}{\sqrt{29}} = 0$$

نو θ په لومړی ربع کې واقع ده او د مثلثاتي جدول له مخې $\theta = 68^\circ\ 10'$ ده.

$$x\cos 68^\circ 10' + y\sin 68^\circ 10' - \frac{2}{\sqrt{29}} = 0$$

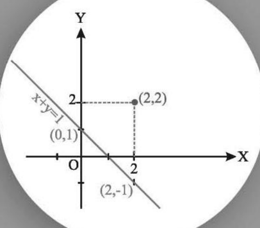
د c جز حل: $k = \pm\sqrt{2^2 + 4^2} = \pm\sqrt{4+16} = \sqrt{20} = -2\sqrt{5}$

څرنګه چې $C > 0$ دی؛ نو:

$$-\frac{2x}{2\sqrt{5}} - \frac{4y}{2\sqrt{5}} - \frac{7}{2\sqrt{5}} = 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{7}{2\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow -2x - 4y - 7 = 0$$

څرنګه چې $\sin\theta$ او $\cos\theta$ دواړه منفي دي؛ نو θ په دريمه ناحيه کې واقع ده.



د يوې نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه

(Distance of a point from a line)

د درسي کتاب (333)**مخ** **د لوست وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي) موخې	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • له یوه مستقیم خط څخه د یوې نقطې د فاصلې د فورمول پیداکول زده کړي. • د یوې نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه چې د مستقیم خط معادله په نورمال او یا عمومي شکل راکړل شوي وي، پیدا کړای شي. • د دوو موازي خطونو ترمنځ فاصله پیداکړای شي. • د هندسي مسایلو په حلولو کې له دې فورمول څخه استفاده وکړای شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د زده کړې لپاره د ا نګیزې د پیداکولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ چې ځواب یې $\frac{3}{\sqrt{2}}$ دی.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**

دشکل له مخې د فاصلې فورمول په لاس راوړئ که د مستقیم خط معادله د نورمال په شکل او یا د عمومي معادلې په شکل راکړل شوي وي، بیا د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره لومړی مثال حل کړئ.

د (334) مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې حل یې په دې ډول دی:

$$d=\frac{|3(5)-2(8)+7|}{\sqrt{(3)^2+(-2)^2}}=\frac{|15-16+7|}{\sqrt{9+4}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$$

بیا د دویم مثال په حلولو کې د دوو موازي خطونو ترمنځ د فاصلې پیداکول توضیح کړئ.

زده کوونکي دې د (335) مخ فعالیت سرته ورسوي چې حل یې په لاندې ډول دی:

د $(0,7)$ د نقطې فاصله د $3x+2y=10$ له مستقیم خط څخه مساوي ده په:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3(0)+2(7)-10|}{\sqrt{9+4}}=\frac{4}{\sqrt{13}}$$

محترم ښوونکي دې لارښوونه او ددوی له کارکولو څخه څارنه وکړي او دریم مثال دې حل کړي.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**

لاندې پوښتنه د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي.

د $(-54,71)$ د نقطې فاصلې د $4x+3y=17$ له مستقیم خط څخه پیداکړئ.

ځواب ($d=4$)

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

لاندې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د $(-60,25)$ د نقطې فاصله د $3x+7y+5=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

ځواب($d=0$)

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د فاصلې په فورمول $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ کې لرو چې:

1 نتیجه: که خط افقي وي، نو:

$$d=\left|\frac{by_1+c}{b}\right|$$

ثبوت: که د l خط افقي وي، نو معادله یې $y=-\frac{c}{b}$ ده او د $p(x_1,y_1)$ له نقطې څخه یې فاصله $d=|y_1-y|$ ده.

$$d=\left|y_1-\frac{-c}{b}\right|=\left|\frac{by_1+c}{b}\right|$$

2- که l یو عمودي خط وي معادله یې $x=-\frac{c}{a}$ ده.

نو د $p(x_1,y_1)$ د نقطې فاصله د l له مستقیم خط څخه $d=|x_1-x|$ ده.

$$d=\left|x_1-\frac{-c}{a}\right|=\left|\frac{ax_1+c}{a}\right|$$

نوټ: که د $p(x_1,y_1)$ نقطه د l پر مستقیم خط پرته وي، د p د نقطې فاصله $ax_1+by_1+c=0$ له مستقیم خط څخه $d=0$ ده.

فاصله نقطه $p(3,-4)$ از خط مستقیم $4x-3y+6=0$ مساوي است به:

$$d=\frac{|4(3)-3(-4)+6|}{\sqrt{(4)^2+(-3)^2}}=\frac{|12+12+6|}{\sqrt{16+9}}=\frac{30}{\sqrt{25}}=\frac{30}{5}=6$$

- لومړی باید وښودل شي چې د $6x+8y+16=0$ او $3x+4y-12=0$ مستقیم خطونه سره موازي دي او بیا ددې خطونو ترمنځ فاصله عبارت ده له.

$$m_2=\frac{-3}{4} \text{ و } m_1=\frac{-6}{8}=\frac{-3}{4}$$

په نتیجه کې دا مستقیم خطونه سره موازي دي او د دوی تر منځ فاصله عبارت ده له:

څرنګه چې د $(0,3)$ په دویم مستقیم خط باندې واقع ده، نو:

$$d=\frac{|6(0)+8(3)+16|}{\sqrt{(6)^2+(8)^2}}=\frac{|24+16|}{\sqrt{100}}=\frac{40}{10}=4$$

- د $p(0,3)$ د نقطې فاصله د $5x-12y-29=0$ له مستقیم خط څخه $d=\frac{65}{13}$ ده.
- د $p(1,-2)$ د نقطې فاصله د $x-2y-5=0$ له مستقیم خط څخه $d=0$ ده.

1- د يوې نقطې موقعيت نظر يو مستقيم خط ته:

كه د $p(x_1, y_1)$ نقطه د xy په مستوي كې د l پر مستقيم خط $(ax + by + c = 0)$ واقع نه وي.

a) كه $(ax_1 + by_1 + c > 0)$ وي، نو د P نقطه له l مستقيم څخه پورته واقع ده.

b) كه $(ax_1 + by_1 + c < 0)$ وي، نو د P نقطه له l مستقيم څخه لاندې واقع ده.

د مثال په ډول: ايا د $p(-2,4)$ نقطه د $4x + 5y = 3$ له خط پورته خواته يا ترې لاندې واقع ده $4(-2) + 5(4) - 3 = 9 > 0$

نو د $p(-2,4)$ نقطه د مستقيم خط پورته خواته واقع ده

2- د وضعيه كمياتو مبدا او د $p(x_1, y_1)$ نقطه:

a) كه $(ax_1 + by_1 + c)$ او c هم علامه وي، نو د $p(x_1, y_1)$ نقطه او د وضعيه كمياتو مبدا د l له مستقيم خط يوې خواته واقع وي.

b) كه $(ax_1 + by_1 + c)$ او c مختلف العلامه وي، نو د $p(x_1, y_1)$ نقطه او د وضعيه كمياتو مبدا دl د مستقيم خط دواړو خواو ته واقع دي.

د مثال په ډول: د $p(5,-8)$ نقطه او د وضعيه كمياتو مبدا د $3x + 7y + 15 = 0$ مستقيم خط دواړو خواو ته واقع ده $c = 15$ او $3(5) + 7(-8) + 15 = -26 < 0$ څرنګه چې علامې يې مختلفې دي، نو دا نقطه او د وضعيه كمياتو مبدا د $3x + 7y + 15 = 0$ مستقيم خط دواړو خواوو ته واقع دي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- هر دوو جوړو موازي خطونو ترمنځ فاصله پيدا كړئ چې معادلې يې په لاندې ډول دي:

$3x - 4y + 3 = 0$ او $3x - 4y + 7 = 0$

$12x + 5y - 6 = 0$ او $12x + 5y + 13 = 0$

$x + 2y - 5 = 0$ او $2x + 4y = 1$

1- د a حل: د راكړل شوو مستقيمو خطونو څخه د يوه خط يوه اختياري نقطه پيدا كوو او ددې نقطې فاصله له دويم مستقيم څخه پيدا كوو، د مثا ل په ډول:

$3x - 4y + 7 = 0\ ,\ \ x = -1 \Rightarrow y = 1$

د $(-1,1)$ نقطې فاصله $3x - 4y + 3 = 0$ له مستقيم خط څخه پيدا كوو:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad d = \frac{|3(-1) - 4(1) + 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-3 - 4 + 3|}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

دb حل:

$x = 1 \qquad y = -5$

د $(1,-5)$ نقطې فاصله د $12x + 5y - 6 = 0$ له مستقيم خط څخه پيدا كوو:

$$d = \frac{|12(1) + 5(-5) - 6|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{12 - 25 - 6}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{|-19|}{13} = \frac{19}{13}$$

دc حل: د $x + 2y - 5 = 0$ په مستقيم خط كې كه $y = 0$ شي نو $x = 5$ كيږي.

$$d=\frac{|5(2)+(0)4-1|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{10-1}{\sqrt{4+16}}=\frac{9}{\sqrt{20}}=\frac{9}{2\sqrt{5}}$$

2- د $P(6,-1)$ د نقطې فاصله د $6x-4y+9=0$ مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

$$d=\frac{|6(6)-4(-1)+9|}{\pm\sqrt{6^2+(-4)^2}}=\frac{36+4+9}{\sqrt{36+16}}=\frac{49}{\sqrt{52}}$$

3- د $3x+6y-8=0$ او $2x+4y+5=0$ موازي خطونو ترمنځ فاصله:

a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) دريې واړه سم دي

حل:

په لومړي مستقیم خط کې: $x=0 \Rightarrow 6y=8 \Rightarrow y=\frac{4}{3}$

د $(0,\frac{4}{3})$ نقطې فاصله د $2x+4y+5=0$ له مستقیم خط څخه په لاس راوړو:

$$d=\frac{\left|2(0)+4(\frac{4}{3})+5\right|}{\sqrt{4+16}}=\frac{\frac{16}{3}+5}{\sqrt{20}}=\frac{31}{3\sqrt{20}}=\frac{31}{6\sqrt{5}}$$

(د b جز سم دی).

4- د (1.2) د نقطې فاصله د $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0$ له مستقیم خط څخه عبارت ده له:

$a:2$ $b:1$ $c:3$ $d:\frac{1}{2}$

حل:

$$d=\frac{\left|\frac{3}{5}(1)-\frac{4}{5}(2)+2\right|}{\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}}=\frac{\left|\frac{3}{5}-\frac{8}{5}+2\right|}{1}=\frac{3-8+10}{5}=\frac{13-8}{5}=\frac{5}{5}=1$$

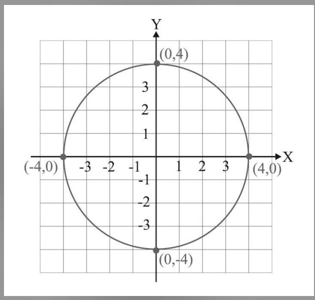
(د b جز سم دی).

5- د $(-2,7)$ نقطې او د $24x+7y-2=0$ مستقیم خط ترمنځ فاصله مساوي ده په:

$a:\ 0.04$ $b:\ \frac{1}{25}$ $c:\ 4\cdot10^{-2}$ d: دريې واړه سم دي

حل: $$d=\frac{|24(-2)+7(7)-2|}{\sqrt{(24)^2+(7)^2}}=\frac{|-48+49-2|}{\sqrt{576+49}}=\left|-\frac{1}{\sqrt{625}}\right|=\frac{1}{25}$$

(د d جز سم دی).



دایره (*Circle*)

د درسی کتاب (337) مخ د لوست وخت(1 درسی ساعت)

د زده کړې (**پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي**) **موخې**	زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • د دایرې د معیاري او عمومي معادلې پیداکول زده کړي. • د دایرې د معادلې خاص حالتونه وپیژني. • د دایرې عمومي او معیاري معادلې یو پر بل باندې تبدیل کړای شي. • د دایرې د شعاع د اوږدوالی او د دایرې د مرکز د وضعیه کمیاتو له مخې د دایرې معادله پیدا او دایره رسم کړای شي. • د دایرې د معادلې له مخې، حقیقي، نقطوي او مجازي دایرې تشخیص کړای شي. • د دایرې د معادلې له مخې د دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړای شي. • د هندسي مسایلو په حلولو کې د دایرې له فورمولونو څخه استفاده وکړای شي ا و اهمیت یې درک کړي.
د تدریس لارې (**میتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د انگیزې د پیداکولو د ورودي برخې د شکل د چارت له مخې د ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړي او ځواب یې دا دی: $x^2 + y^2 = 16$

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې**

د دایرې له تعریفولو وروسته د چارت او یا د تختې له مخې د دایرې معیاري معادله دې په لاس راوړل شي.

د (338) مخ لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ، بیا دې ددې مخ فعالیت زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب یې $x^2 + y^2 = 9$ دي.

د دایرې د عمومي معادلې په لاس راوړل دې توضیح شي او همدارنگه حقیقي، مجازي او نقطوي دایره او د دایرې د معادلې په خاصو حالتونو زده کوونکي وپوهول شي. دویم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د 339 مخ فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب یې په دې ډول دي:

څرنگه چې د $x^2 + (y-5)^2 = 10$ معادلې عمومي شکل $(x-0)^2 + (y-k)^2 = r^2$ دي او یا $h=0$ ، نو ددې دایرې مرکز د x پر محور واقع دي. او د $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 25$ په معادله کې $k=r$ ده نو، دایره د y پر محور مماس ده او په

دریمه دایره کې $h^2+k^2=r^2$ نو $9=(0)^2+(-3)^2$، نو دایره د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تیریږي

دریم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ. ددې لپاره چې زده کوونکي وکولای شي چې ددایرې د معادلې له مخې د دایرې د شعاع اوږدوالی او د مرکز وضعیه کمیات پیدا کړای شي څلورم مثال حل کړئ

5 او 6 مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د (341) فعالیت دې زده کوونکي سرته ورسوي چې ځواب یې داسې دی:

$$A(0,0) \qquad B(2,0)$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$|AC|=|BC|$$

$$(h-0)^2+(k-0)^2=(h-2)^2+(k-0)^2$$

$$h^2+k^2=h^2-4h+k^2 \Rightarrow 4h=4 \Rightarrow h=1$$

د دایرې مرکز $(1,k)$ دی. څرنګه چې $0\cdot x+y-1=0$ د مماس او دایرې د مرکز $(1,k)$ ترمنځ فاصله د شعاع له اوږدوالي څخه عبارت ده.

$$\frac{|0(1)+k-1|}{\sqrt{0^2+1^2}}=r \Rightarrow r^2=|k-1|^2$$

$$|AC|^2=(k-1)^2$$

$$h^2+k^2=k^2-2k+1 \Rightarrow 1=2k+1 \Rightarrow k=0$$

$$r^2=|0-1|^2 \Rightarrow r^2=1$$

$$(x-1)^2+(y-0)^2=1$$

$$x^2+y^2-2x=0$$

اووم مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

لاندې پوښتنه حل کړئ.

د هغه دایرې معادله پیدا کړئ چې مرکز یې $(-3,5)$ او د $4x-3y-18=0$ مستقیم خط سره مماس وي.

جواب $x^2+y^2+6x-10y-47=0$

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

د هغه دایرې د شعاع اوږدوالی او د مرکز وضعیه کمیات پیدا کړئ چې معادله یې $(x+2)^2+y^2=64$ وي.

ځواب: $r=8$ و $c(-2,0)$.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- د هغه دایرې معادله چې له دریو نقطو څخه تیریږي: لومړی د g,f او c قیمتونه پیدا کوو او د دایرې په عمومي معادله کې یې وضع کوو.

مثال: د هغه دایرې معادله چې $A(5,10), B(6,9)$ او $C(-2,3)$ له نقطو څخه تیریږي عبارت ده له:

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \ldots\ldots\ldots\ldots I$$

$$\Rightarrow 10g+20f+c+125=0 \ldots\ldots\ldots\ldots II$$

$36+81+12g+18f+c=0 \Rightarrow 12g+18f+c+117=0$..................III

$4+9-4g+6f+c+13=0 \Rightarrow -4g+6f+c+13=0$....................IV

اوس III,II او IV معادلې حلوو III معادله له II څخه تفریق کړئ:

$-2g+2f+8=0$

$g-f-4=0$..............................V

که IV معادله له II معادلې څخه تفریق شي لرو چې:

$g+f+8=0$..............................VI

د V او VI معادلې څخه لرو چې $g=-2$ او $f=-6$ کیږي.

که د f او g قیمتونه په II معادله کې وضع شي په نتیجه کې c=15 کیږي، نو غوښتل شوي معادله عبارت ده له:

$x^2+y^2-4x-12y+15=0$

2- د هغه دایرې معادله چې د (1,0),(0,1) او (2,1) له نقطو څخه تیریږي عبارت ده له:

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

$0+1+2g(0)+2f+c=0 \Rightarrow 2f+c+1=0$..............................(i)

$1+0+2g(1)+2f(0)+c \Rightarrow 2g+c+1=0$..............................(ii)

$4+1+2g(2)+2f(1)+c=0 \Rightarrow 4g+2f+c+5=0$......................$(iii)$

له (i) معادلې څخه (ii) معادله تفریقوو:

$$\begin{array}{l} 2f+c+1=0 \\ \underline{{}_{-}2g \pm c \pm 1=0} \\ 2f-2g=0 \Rightarrow g=f \end{array}$$ ....(iv)

له (iv) معادلې څخه (iii) معادله تفریقوو، نو لرو چې:

$$\begin{array}{l} 2f-2g=0 \\ \underline{{}_{-}2f \pm 4g \pm c \pm 5=0} \\ \quad -6g-c-5=0 \end{array}$$ ....(V)

$$\begin{array}{l} 2g+c+1=0 \\ \underline{-6g-c-5=0} \\ -4g-4=0 \Rightarrow g=-1 \end{array}$$

د g قیمت په (ii) معادله کې وضع کوو: $2(-1)+c+1=0 \Rightarrow c=1$

د c قیمت په (i) معادله کې وضع کوو: $2f+1+1=0 \Rightarrow f=-1$

د دایرې د مرکز وضعیه کمیات $(-g,-f)=(1,1)$

$r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{1+1-1=1}$

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

$x^2-2x+1+y^2-2y+1-1=0$

$x^2+y^2-2x-2y+1=0$

3- د هغه دايرې معادله چې د $(3,5)$ او $(-3,7)$ له نقطو څخه تيريږي او:

a: مرکزيې د x پر محور باندې واقع وي. b: مرکز يې د y پر محور باندې واقع وي.

که (a,b) د هغه دايرې مرکز وي چې د $(3,5)$ او $(-3,7)$ له نقطو څخه تيريږي.

$$\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2}=\sqrt{(a+3)^2+(b-7)^2}$$
$$a^2-6a+9+b^2-10b+25=a^2+6a+9+b^2-14b+49$$
$$-12a+4b-24=0$$
$$-3a+b-6=0$$

a: هغه دايره چې مرکز يې د x پر محور واقع دی b=0 دی.

$$-3a-6=0 \Rightarrow a=-2$$

نو مرکز يې $(-2,0)$ دی او د $(3,5)$ او $(-3,7)$ نقطو فاصله له مرکز $(-2,0)$ څخه د دايرې له شعاع څخه عبارت ده:

$$r=\sqrt{(3+2)^2+5^2}=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$$
$$(x+2)^2+(y-0)^2=(5\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2+y^2+4x-46=0$$

b: هغه دايره چې مرکز يې د y پر محور واقع وي a=0 دی.

$$b-6=0 \Rightarrow b=6$$
$$r=\sqrt{(3-0)^2+(5-6)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$
$$(x-0)^2+(y-6)^2-\sqrt{10}=0$$

د دايرې معادله عبارت ده له: $x^2+y^2-12y+26=0$

4- د هغو دايرو د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی چې معادلې يې په لاندې ډول دي عبارت دي له:

د مرکز وضعيه کميات	د شعاع اوږدوالی	د دايرې معادله
$C(-2,0)$	$r=8$	$(x+2)^2+y^2=64$
$C(4,-3)$	$r=6$	$(x-4)^2+(y+3)^2=36$
$C(-5,2)$	$r=0$	$(x+5)^2+(y-2)^2=0$
$C(0,5)$	$r=\sqrt{5}$	$x^2+(y-5)^2=5$
$C(1,-2)$	$r=5$	$x^2+y^2+4x-2y+5=0$
$C(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$	$r=\sqrt{\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C}$	$x^2+y^2+Ax+By+C=0$

5- د $(1,-2)$ نقطه د دايرې دننه، د باندې او يا د دايرې پر محيط واقع وي.

د دايرې د باندې	$1^2+(-2)^2=5>1$	$x^2+y^2=1$
د دايرې پر محيط	$1^2+(-2)^2=5=5$	$x^2+y^2=5$
د دايرې دننه	$1^2+(-2)^2=5<9$	$x^2+y^2=9$
د دايرې دننه	$-21<0$	$x^2+y^2-10x+8y=0$

6- د دایرې دمعادلې مهم خاصیتونه (Important Properties of the equation of a circle)

د یوې دایرې معیاري معادله چې شعاع یې r او مرکز یې $C(h,k)$ وي، $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ده او د دایرې عمومي معادله $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ده.

a: د دایرې شعاع (radius) مساوي ده په: $R=\sqrt{g^2+f^2-c}$ چې د دایرې مرکز $c(-g,-f)$ دی.

b: د x^2 او y^2 ضریبونه سره مساوي وي.

c: په معادله کې د xy هېڅ حد موجود نه وي.

d: د د ایرې معادله د x او y له جنسه یوه دویمه درجه معادله ده.

7- د دایرې د عمومي معادلې بدلول د دایرې د معیاري معادلې په شکل:

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \ldots\ldots\ldots I$$
$$(x^2+2gx)+(y^2+2fy)=-c \ldots\ldots\ldots II$$
$$x^2+2gx+g^2+y^2+2fy+f^2=g^2+f^2-c$$
$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

چې د دایرې مرکز $c(-g,-f)$ او شعاع یې $R=\sqrt{g^2+f^2-c}$ ده.

یا په مستقیم ډول $-\frac{1}{2}$ د x او $-\frac{1}{2}$ د y د ضریب یا $(-g-f)$ د دایرې مرکز او

$R=\sqrt{(-g)^2+(-f)^2-Cons\tan term}$ (ثابت حد)

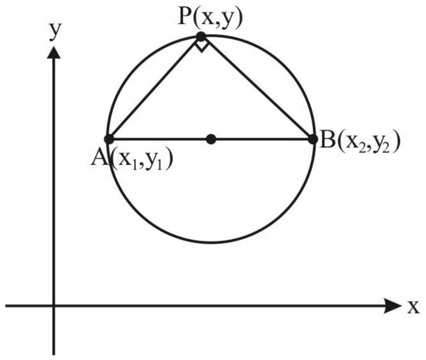
8- د هغه دایرې معادله چې د قطر د انجانونو وضعیه کمیات یې (x_1,y_1) او (x_2,y_2) وي عبارت ده له:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

ځکه چې که $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ د دایرې د قطر انجامونه وي یا AB د دایرې قطر وي او $P(x,y)$ د دایرې د محیط یوه کیفي نقطه وي، پوهیږو چې $B\hat{P}A=90^\circ$ ده.

د PA د خط میل عبارت د ی له $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ او د PB د خط میل $\frac{y-y_2}{x-x_2}$ دی چې د میلونو د ضرب حاصل یې (-1) دی.

$$\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)\left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right)=-1$$
$$\Rightarrow (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$



مثال: د هغه دایرې معادله چې د قطر انجامونه یې $(-1,2)$ او $(3,-4)$ وي عبارت ده له:

$$(x+1)(x-3)+(y-2)(y+4)=0$$
$$x^2+y^2-2x+2y-11=0$$

چې مرکز يې $(1,-1)$ او د شعاع اوږدوالی يې $r=\sqrt{1^2+(-1)^2-(-11)}=\sqrt{13}$

د هغه دايرې معادله چې مرکز يې $(-2,-2)$ او د شعاع اوږدوالی يې $r=2$ وي عبارت ده له:

$$x^2+y^2+4x+4y+4=0$$

9- د هغه دايرې معادله چې مرکز يې $(-3,5)$ وي او د $4x-3y-18=0$ له مستقيم خط سره مماس وي عبارت ده له:

خرنګه چې شعاع د تماس په نقطه کې په مماس عمودي وي، نو د $(-3,5)$ د نقطې عمودي فاصله د $4x-3y-18=0$ له مستقيم خط څخه د دايرې شعاع ده.

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|4(-3)-3(5)-18|}{\sqrt{16+9}}=|-9|=9$$

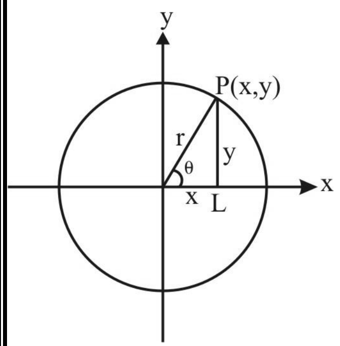
$$(x+3)^2+(y-5)^2=9^2$$

يا:

$$x^2+y^2+6x-10y-47=0$$

10- د دايرې پارامتريک معادله: $x^2+y^2=r^2$:

$$x=r\cos\theta \qquad y=r\sin\theta$$



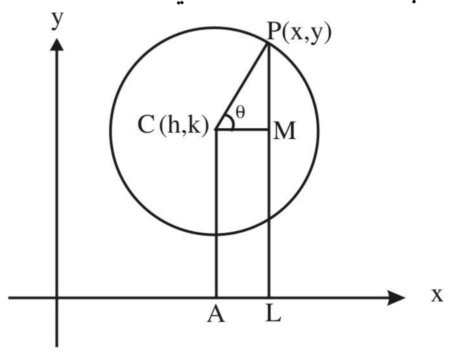
که $P(x,y)$ د دايرې د محيط يوه کيفي نقطه وي، د $\overline{OP}$ خط د x له محور سره د θ زاويه جوړوي.

$$x=r\cos\theta \quad و \quad y=r\sin\theta$$

چې د $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ نقطه هر وخت د دايرې پر محيط واقع ده، دواړه خواوې مربع کوو او بيا يې سره جمع کوو، نو لرو چې:

$$x^2+y^2=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\Rightarrow x^2+y^2=r^2$$

که $y=r\sin\theta$ او $x=r\cos\theta$ ته د دايرې پارامتريک معادله وايي.



که د دايرې معادله د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ په شکل وي:

$$\cos\theta=\frac{x-h}{r} \qquad , \qquad \sin\theta=\frac{y-k}{r}$$

$$\Rightarrow x=r\cos\theta+h \ldots\ldots\ldots\ldots I \qquad\qquad y=r\sin\theta+k \ldots\ldots\ldots\ldots II$$

چې $(r\cos\theta+h, r\sin\theta+k)$ د دايرې د محيط د يوې نقطې پارامتريک مختصات او I او II د دايرې پارامتريک معادلې دي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- د هغه دايرې معادله پيدا کړئ چې:

a : د مرکز مختصات يې $(5,-2)$ او $r=4$ وي.

حل: (معياري معادله) $(x-5)^2+(y+2)^2=16$ يا $x^2+y^2-10x+4y+13=0$

b : د مرکز مختصات يې $(\sqrt{2},-3\sqrt{3})$ او شعاع يې $r=2\sqrt{2}$ وي.

حل: $(x-\sqrt{2})^2+(y+3\sqrt{3})^2=8$ يا $x^2+y^2-2\sqrt{2}+6\sqrt{3}y+21=0$

c : د مرکز مختصات يې $(0,0)$ او د $(1,2)$ له نقطې څخه تيرېږي.

$$(x-0)^2+(y-0)^2=5 \qquad r^2=1+2^2$$
$$x^2+y^2=5 \qquad r^2=1+4=5$$

d : د مرکز مختصات يې $(0,0)$ او د $(-3,-4)$ له نقطې څخه تيرېږي.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad C(0,0)=(h,k)$$
$$\begin{cases} r^2=(-3)^2+(-4)^2 \\ r^2=9+16=25 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=25$$

e : د مرکز مختصات يې $(8,-6)$ او د وضعيه کمياتو له مبدا څخه تيرېږي.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-8)^2+(y+6)^2=100 \qquad \begin{cases} 8^2+(-6)^2=r^2 \\ 64+36=r^2 \\ 100=r^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2-16x+12y=0$$

2- لومړی وښاياست چې لاندې راکړل شوي معادلې د دايرو معادلې دي او بيا د هرې دايرې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی پيدا کړئ.

a) $x^2+y^2+12x-10y=0$ b) $5x^2+5y^2+14x+12y=0$

c) $x^2+y^2-6x+4y+13=0$ d) $3x^2+3y^2-2x+4y-1=0$

e) $a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$

د a حل: د دايرې په عمومي معادله $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ کې $A=B$ دی؛ نو دا معادله د دايرې معادله ده.

$$-2h=12\Rightarrow h=-6$$
$$-2k=-10\Rightarrow k=5$$

نو مرکز يې د $(-6,5)$ نقطه او د شعاع اوږدوالی يې:

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{36+25-0}=\sqrt{61}$$

د b حل:

$$5x^2+5y^2+14x+12y=0$$

څرنګه چې A=B دی، نو دا معادله د دايرې معادله ده.

دواړو خواوې په 5 وېشو:

$$x^2+y^2+\frac{14}{5}x+\frac{12}{5}y=0$$
$$x^2+\frac{14}{5}x+y^2+\frac{12}{5}y=0$$
$$x^2+\frac{14}{5}x+(\frac{7}{5})^2+y^2+\frac{12}{5}y+(\frac{6}{5})^2=(\frac{7}{5})^2+(\frac{6}{5})^2$$
$$(x+\frac{7}{5})^2+(y+\frac{6}{5})^2=\frac{17}{5}$$

نو: $C(-\frac{7}{5},-\frac{6}{5})$ او $r=\sqrt{\frac{17}{5}}$

د c حل: څرنگه چې $A=B$ دی؛ نو دا معادله هم د دایرې معادله ده.

$$-2h=-6\Rightarrow h=3$$
$$-2k=4\Rightarrow k=-2$$

نو مرکز یې د $(3,2)$ نقطه او د شعاع اوږدوالی یې:

$$r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{9+4-13}=0$$

د d حل: $A=B=3$ دی؛ نو دا معادله د دایرې معادله ده او دواړه خواوې پر 3 وېشو:

$$x^2+y^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y-\frac{1}{3}=0$$
$$-2h=-\frac{2}{3}\Rightarrow h=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \qquad -2k=\frac{4}{3}\Rightarrow k=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

نو مرکز یې د $(\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$ نقطه او د شعاع اوږدوالی یې:

$$r=\sqrt{(-\frac{2}{3})^2+(\frac{1}{3})^2-(-\frac{1}{3})}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{4+1+3}{9}}=\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

نو د دایرې معادله $(x-\frac{1}{3})^2+[y-(-\frac{2}{3})]^2=(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2$ دي.

د e حل: څرنگه چې $A=B=a$ دی؛ نو دا هم د دایرې معادله ده او دواړو خواوې پر a باندې وېشو:

$$x^2+y^2+\frac{2g}{a}x+\frac{2f}{a}y+\frac{c}{a}=0$$
$$-2h=\frac{2g}{a}\Rightarrow h=-\frac{g}{a} \qquad -2k=\frac{2f}{a}\Rightarrow k=-\frac{f}{a}$$

نو مرکزې یې د $(-\frac{g}{a},-\frac{f}{a})$ نقطه او د شعاع اوږدوالی یې:

$$r=\sqrt{(-\frac{g}{a})^2+(-\frac{f}{a})^2-\frac{c}{a}}=\sqrt{\frac{g^2}{a^2}+\frac{f^2}{a^2}-\frac{c}{a}}=\sqrt{\frac{g^2+f^2-ac}{a^2}}=\frac{\sqrt{g^2+f^2-ac}}{a}$$

یا:

$$x^2+2(x)(\frac{g}{a})+y^2+2(y)(\frac{f}{g})=\frac{-c}{a}$$

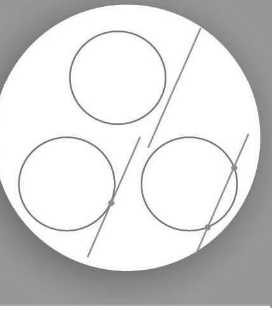
دواړو خواو سره $\frac{f^2}{a^2}$ او $\frac{g^2}{a^2}$ جمع کوو:

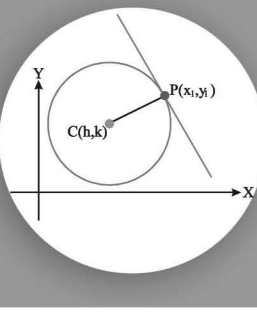
$$x^2+\frac{2gx}{a}+\frac{g^2}{a^2}+y^2+\frac{f^2}{a^4}+\frac{2fy}{a}=\frac{g^2}{a^2}+\frac{f^2}{a^2}-\frac{c}{a}$$

$$(x+\frac{g}{a})^2+(y+\frac{f}{a})^2=\frac{g^2+f^2-ac}{a^2}$$

$$\left[x-(\frac{-g}{a})^2\right]+\left[y-(\frac{-f}{a})\right]^2=\frac{\sqrt{g^2+f^2-ac}}{a}$$

$$\begin{cases} C(-\frac{g}{a},-\frac{f}{a}) \\ r=\frac{\sqrt{g^2+f^2-ac}}{a} \end{cases}$$





د یوه مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره
د درسي کتاب (343)مخ
د لوست وخت(2 درسي ساعتونه)

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • په دې وپوهیږي چې څه وخت یو مستقیم خط یوه دایره په دوو نقطو یا یوه نقطه کې قطع کوي او یا یې هېڅ نه قطع کوي. • د مماس د معادلې او د مماس د اوږدوالي پیدا کول زده کړي. • له دایرې سره د مستقیم خط د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړای شي. • له دایرې سره د مستقیم خط د تماس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړای شي. • د مماس معادله او د مماس اوږدوالی پیدا کړای شي. • د ریاضي د مسایلو په حلولو کې ترې گټه واخیستلای شي ا و اهمیت یې درک کړي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته له زده کوونکو د ورودي برخې پوښتنه وکړئ چې ځواب یې دا دی: دا مستقیم خط دایره د $(0,5)$ او $(-\frac{24}{5},\frac{7}{5})$ په نقطو کې قطع کوي.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې

له دې وروسته چې څه وخت یو مستقیم خط یوه دایره په دوو نقطو یا یوه نقطه او یا په هیڅ نقطه کې نه قطع کوي، توضیح شي، لومړی او دویم مثال د زده کوونکو په وړاندې اخیستنې سره حل کړئ. د (344) مخ فعالیت دې زده کوونکي حل کړي چې ځواب یې دا دی:

د $x-y+1=0$ مستقیم خط د $x^2+y^2-5=0$ دایره د $(-1,0)$ او $(2,3)$ په نقطو کې قطع کوي.

له دې وروسته چې د مماس د معادلې پیدا کول، توضیح شي د (346) مخ لومړی او دویم مثال د زده کوونکو په وړاندې اخیستنې سره حل کړئ. په داسې حال کې چې د (347) مخ د شکل چارت موجود وي او یا د شکل له مخې چې پر تخته رسم شوي وي، د مماس د اوږدوالی پیدا کول، توضیح کړئ او د دریم مثال حل کړئ او ددې مخ فعالیت دې زده کوونکي حل کړي چې ځواب یې په لاندې ډول دی:

$$PT=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}=\sqrt{(-2-3)^2+(2+4)^2-25}=\sqrt{36}=6$$

یا: $$PT=\sqrt{x^2+y^2-6x+8y}=\sqrt{(-2)^2+2^2-6(-2)+8(2)}=\sqrt{4+4+12+16}=\sqrt{36}=6$$

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې

د لومړۍ پوښتنې یوه برخه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې

د ارزونې لپاره درېیمه پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- د یومستقیم خط د تقاطع نقطې له یوې دایرې سره:

د $y = mx + c$ د مستقیم خط د تقاطع د نقطو پیداکولو لپاره د $x^2 + y^2 = a^2$ له دایرې سره لرو چې:

$y = mx + c$..................I $\qquad$ $x^2 + y^2 = a^2$................II

د I معادلې څخه د y په II معادله کې وضع کوو:

$$x^2 + (mx + c)^2 = a^2$$
$$x^2 + m^2x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0$$
$$(1 + m^2)x^2 + 2mcx + c^2 - a^2 = 0 \text{.......................III}$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (2mc)^2 - 4(1 + m^2)(c^2 - a^2) = a^2(1 + m^2) - c^2$$

a) که $a^2(1 + m^2) - c^2 > 0$ وي، مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي.

b) که $a^2(1 + m^2) - c^2 = 0$ وي، مستقیم خط دایره په یوه نقطو کې قطع کوي.

c) که $a^2(1 + m^2) - c^2 < 0$ وي، مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

2- په یوه دایره باندې د مستقیم خط د مماس کېدو شرط عبارت دی له:

$a^2(1 + m^2) - c^2 = 0 \qquad c = \pm a\sqrt{1 + m^2}$

څرنګه چې $y = mx + c$ ده، نو د $y = mx \pm a\sqrt{1 + m^2}$ مستقیم خط د m په ټولو قیمتونو د $x^2 + y^2 = a^2$ له دایرې سره مماس دی که د $A(x_1, y_1)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 = a^2$ پر دایره دوه مماسونه رسم شي، څرنګه چې د یو مماس معادله $y_1 = mx_1 + a\sqrt{1 + m^2}$ ده، نو:

$$(y_1 - mx_1)^2 = a^2(1 + m^2)$$
$$m^2(x_1^2 - a^2) - 2mx_1y_1 + y_1^2 - a^2 = 0$$

څرنګه چې دا معادله د m له جنسه دویمه درجه معادله ده چې د m د دوو قیمتونو لپاره د $A(x_1, y_1)$ له نقطې څخه د دوو مماسونو معادلې په لاس راځي، حقیقي والې او موهومي والې یې په پورتنۍ معادلې پورې اړه لري.

مثال: د (2,3) له نقطې څخه د $x^2 + y^2 = 9$ پر دایره د دوو مماسونو معادلې عبارت دي له:

$$y = mx + 3\sqrt{1 + m^2}$$

څرنګه چې د (2,3) له نقطې څخه تیرېږي نو $3 = 2m + 3\sqrt{1 + m^2}$

$$\Rightarrow (3 - 2m)^2 = 9(1 + m^2) \Rightarrow m = 0, \frac{-12}{5}$$

که m=0 وي لرو چې:

$$y = 0 \cdot x + 3\sqrt{1 + 0} \Rightarrow y = 3$$

او که $m = \frac{-12}{5}$ وي لرو چې:

$$y=\frac{-12}{5}x+3\sqrt{1+\frac{144}{25}}\Rightarrow 5y+12x-39=0$$

مثال: د $x^2+y^2=9$ پر دايره د دوو مماسونو معادلې په داسې حالت کې چې مماسونه د $3x+4y=7$ له مستقيم خط سره موازي وي، عبارت دي له:

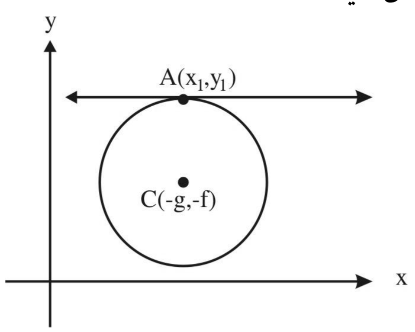
کوم مستقيم خط چې د $3x+4y=7$ خط سره موازي وي، نو $3x+4y+k=0$ به يې معادله وي که د $3x+4y+k=0$ مستقيم خط له دايرې سره مماس وي، نو د دايرې له مرکز څخه ددې مستقيم خط عمودي فاصله د دايرې د شعاع اوږدوالی دی نو:

$$r=\frac{0+0+k}{\pm\sqrt{9+16}}=\pm\frac{k}{5}$$

نو $\pm\frac{k}{5}=3$ دی او په نتيجه کې $k=\pm15$ دی، نو د دواړو مماسونو معادلې عبارت دي له:

$$3x+4y+15=0$$
$$3x+4y=15$$

3- د هغه مماس د معادلې پيدا کول چې په يوه راکړل شوي نقطه کې پر دايره باندې مماس وي:



که د تماس نقطه $A(x_1,y_1)$ وي او د دايرې معادله چې مستقيم خط ورسره مماس دی عبارت له:

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

وي او د دايرې شعاع

$$\overline{CA}=\sqrt{g^2+f^2-c}$$

وي چې $\overline{CA}$ د A په نقطه کې پر مماس عمود ده.

د $\overline{CA}$ د خط ميل عبارت دی له:

$$m=\frac{y_1+f}{x_1+g}\ldots\ldots\ldots\ldots I$$

نو د مماس ميل عبارت دی له $(-\frac{1}{m}=-\frac{x_1+g}{y_1+f})$ ، نو دا قيمت د مستقيم خط په معادله $y-y_1=m(x-x_1)$ کې وضع کوو، نو د مماس معادله عبارت ده له:

$$y-y_1=-\frac{x_1+g}{y_1+f}(x-x_1)\ldots\ldots\ldots\ldots II$$

د II معادلې له ساده کولو څخه لرو چې:

$$(y-y_1)(y_1+f)+(x-x_1)(x_1+g)=0$$
$$yy_1+fy-y_1^2-fy_1+xx_1+gx-x_1^2-gx_1=0$$

داوړو خواو ته $2gx_1$ او $2fy_1$ جمع کوو.

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1 \ldots\ldots\ldots III$$

څرنگه چې دايره د $A(x_1,y_1)$ له نقطې څخه تيريږي، نو لرو چې:

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$$
$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1=-c$$

له III معادلې څخه لرو چې:

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

په لنډ ډول: د $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ معادله په لاندې ډول ليکلای شو:

$$x\cdot x+y\cdot y+g(x+x)+f(y+y)+c=0$$

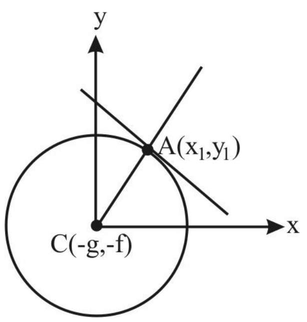
د x پر ځای x_1 او د y پر ځای y_1 وليکئ.

$$x\cdot x_1+y\cdot y_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع وي $(g=f=0)$ نو د مماس معادله عبارت ده له:

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)$$

4- د هغه مستقيم خط د معادلې پيداکول چې د $A(x_1,y_1)$ په نقطه کې د $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ پر دايره عمودي وي.



د CA د خط ميل مساوي دی په:

$$m_{CA}=\frac{y_1+f}{x_1+g}$$

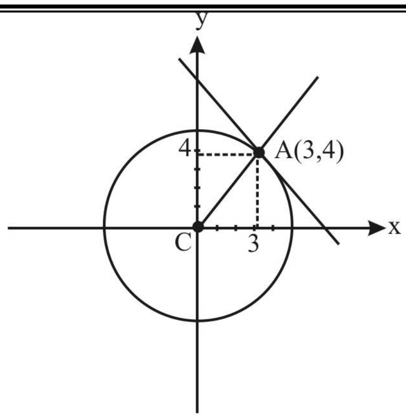
نو د $A(x_1,y_1)$ په نقطه باندې د عمود خط معادله عبارت ده له:

$$y-y_1=\frac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1)$$

او که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع وي. $(g=f=0)$

$$y-y_1=\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)$$

مثال: د (3,4) له نقطې څخه د $x^2+y^2=25$ پر دايرې باندې د عمود او مماس خطونو معادلې عبارت دي له:



د CA د خط میل $m=\frac{4}{3}$ دی نو $A(3,4)$ په نقطه کې د عمود خط معادله د عبارت ده له:

$y-4=\frac{4}{3}(x-3)\Rightarrow 4x-3y=0$

د $A(3,4)$ په نقطه کې د مماس خط میل $-\frac{1}{m}=-\frac{3}{4}$ دی. نو د مماس معادله $y-4=-\frac{3}{4}(x-3)$ او یا $3x+4y=25$ ده او یا د مماس د معادلې د پیداکولو لپاره د دایرې معادله $x^2+y^2=25$ د $x\cdot x+y\cdot y=25$ په شکل لیکو او 3 او 4 په کې وضع کوو، لرو چې:

$x\cdot x+y\cdot y=25\Rightarrow 3x+4y=25$

5- د $ax^2+ay^2+2gx+2fy+c=0$ د دایرې په عمومي معادله کې څلور ثابت (a,g,f,c) دي که دا معادله پر a وویشو نو درې ثابت $\frac{g}{a},\frac{f}{a},\frac{c}{a}$ په لاس راځي . ددې دریو ثابتو د محاسبه کولو او د دایرې د موقعیت د ټاکلو لپاره لږ تر لږه دریو اړیکو ته اړتیا شته دی، دا درې اړیکې د لاندې حالتونو څخه په یو حالت کې ښایې راکړل شوي وي:

a) درې نقطې چې د دایرې پر محیط واقع وي.

b) د دایرې د محیط دوه نقطې او پر راکړل شوي مستقیم خط باندې د دایرې مرکز واقع وي.

c) پر دایره باندې د مماس معادله او یوه نقطه چې دایره ترې تیریږي او د دایرې مرکز په راکړل شوي مستقیم خط واقع وي.

d) د دایرې شعاع او له دایرې سره د مماس خط د تماس نقطه راکړل شوي وي.

6- د هغه دایرې معادله چې د $(-2,-5)$ له نقطې څخه تیریږي او د $(4,3)$ په نقطه کې د $3x+4y-24=0$ پر مستقیم خط باندې مماس وي، عبارت ده له:

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$........................I

څرنګه چې د $(-2,-5)$ او $(4,3)$ نقطې د دایرې پر محیط باندې پرتې دي، نو لرو چې:

$-4g-10f+c+29=0$........................II

$8g+6f+c+25=0$........................III

څرنګه چې د $3x+4y-24=0$ مستقیم خط د $(4,3)$ په نقطه کې له دایرې سره مماس دی، د هغه مستقیم خط معادله چې د $(4,3)$ له نقطې څخه تیریږي او د $3x+4y-24=0$ پر مستقیم خط باندې عمود وي، عبارت ده له:

$y-3=\frac{4}{3}(x-4)$ یا $4x-3y-7=0$

دا مستقیم خط چې د $(4,3)$ له نقطې تیریږي او پر دایره چې مرکزې یې $(-g,-f)$ او معادله یې $x^2+y^2+2gx+2fg+c=0$ ده، عمود دی، نو:

$$-4g+3f-7=0 \ldots\ldots\ldots\ldots V$$

له II معادلې څخه III معادله تفریقوو، نو لرو چې:

$$-12g-16f+4=0$$
$$3g+4f-1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots VI$$

د (V) او (VI) معادلې له حلولو څخه لرو چې: $f=1$ او $g=-1$

که د f او g قیمتونه په III معادله کې وضع شي لرو چې: $(c=-23)$ نو، په نتیجه کې د غوښتل شوي دایرې معادله عبارت ده له: $x^2+y^2-2x+2y-23=0$

7- په لاندې ډول ښودل کیږي چې د

$$x^2+y^2-6x-6y+10=0 \ldots\ldots\ldots\ldots I$$

او

$$x^2+y^2=2 \ldots\ldots\ldots\ldots II$$

دایرې سره متقاطع دي او د تقاطع د نقطې وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

که II معادله له I معادلې څخه تفریق شي، نو $-6x-6y+12=0$ کیږي.

$$x+y-2=0 \Rightarrow x=2-y \ldots\ldots\ldots\ldots III$$

د x دا قیمت په II معادله کې وضع کوو:

$$(2-y)^2+y^2-2=0 \Rightarrow 4-4y+y^2+y^2-2=0$$
$$2y^2-4y+2=0 \Rightarrow y^2-2y+1=0$$
$$(y-1)^2=0 \Rightarrow y=1$$

د y قیمت په III معادله کې وضع کوو په نتیجه کې $x=1$ کیږي د تماس د نقطې وضعیه کمیات $(1،1)$ دي.

8- د a قیمت په داسې حال کې چې د $x-2y=6$ مستقیم خط د $x^2+y^2-2ax-4=0$ له دایرې سره مماس وي عبارت دی له:

د مستقیم خط له معادلې څخه لرو چې $x=2y+6$

$$(2y+6)^2+y^2-2a(2y+6)-4=0 \Rightarrow 4y^2+24y+36+y^2-4ay-12a-4=0$$
$$5y^2+(24-4a)y+(32-12a)=0$$

څرنګه چې مستقیم خط له دایرې سره مماس دي، نو $\Delta=0$ ده.

$$b^2-4ac=(24-4a)^2-4(5)(32-12a)=0$$
$$16a^2+48a-64=0$$
$$a^2+3a-4=0$$
$$(a+4)(a-1)=0 \Rightarrow a=-4 \quad a=1$$

9- د O_1 او O_2 په مرکزونو دوې دایرې چې د A او B په نقطو کې سره متقاطع دي، که د O_1 د دایرې معادله: $x^2+y^2+a_1x+b_1y+d_1=0$

او د O_2 د دايرې معادله $x^2+y^2+a_2x+b_2y+d_2=0$ وي،څرنگه چې د A او B نقطې د دواړو دايرو پر محيط باندې واقع دي، نو د A او B د نقطو وضعيه کميات د معادلو په لاندې سيستم کې بايد صدق وکړي.

$$x^2+y^2+a_1x+b_1y+d_1=0$$
$$x^2+y^2+a_2x+b_2y+d_2=0$$

او په نتيجه کې د

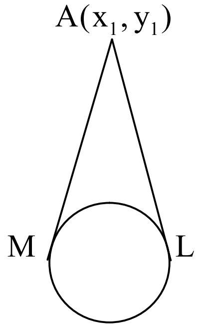
$$(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+d_1-d_2=0$$

په معادله کې هم بايد صدق وکړي، نو دا معادله د دواړو دايرو د مشترک وتر معادله ده او هم د A او B له نقطو څخه همدا يو مستقيم خط تيريږي.

د مثال په ډول: د $x^2+y^2-4x-6y-14=0$ او $x^2+y^2+6x+8y=0$ دايرو د مشترک وتر معادله عبارت ده له: $[6-(-4)]x+[8-(-6)]y+0-(-14)=0$

له ساده کولو څخه وروسته لرو چې: $5x+7y+7=0$ د دواړو دايرو د مشترک وتر معادله ده.

10- که د دايرې له کومې خارجي نقطې څخه پر دايره دوه مماسونه رسم شي د دواړو مماسونو اوږدوالی سره مساوي دی او له $\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$ څخه عبارت دی.



11- د هغو دايرو معادلې پيدا کړئ چې مرکز يې $c_1(4,-7)$ او د $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ دايره ورسره داخلاً او خارجاً مماس وي.

$c_1(4,-7)$

حل: د راکړل شوي دايرې مرکز $c_2(-2,1)$ دي.

$$|C_1C_2|=r_1+r_2=\sqrt{(4+2)^2+(-7,-1)^2}=10$$

څرنگه چې د راکړل شوي دايرې په معادله کې $f=1, g=-2$ او $c=1$ دي، نو د راکړل شوي دايرې شعاع مساوي ده په:

$$r_2=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{(-2)^2+(1)^2-1}=2$$
$$r_1=10-r_2=10-2=8$$

r_1 د هغه دايرې شعاع چې راکړل شوي دايره ورسره خارجاً مماس ده او معادله يې عبارت ده له:

$$(x-4)^2+(y+7)^2=(8)^2$$
$$x^2+y^2-8x+14y+1=0$$

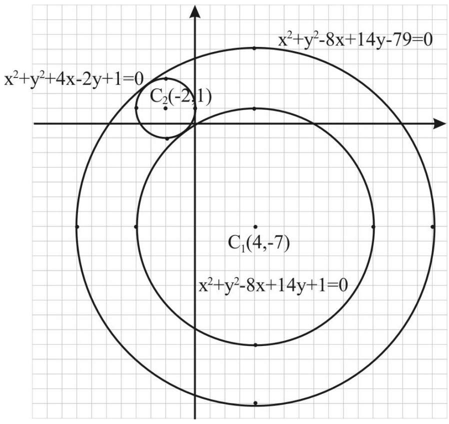
د هغه دايرې شعاع چې راکړل شوي دايره ورسره داخلاً مماس ده عبارت ده له:

$$\text{شعاع}=r_1+2r_2=8+2(2)=12$$

چې ددې دايرې معادله عبارت ده له:

$(x-4)^2+(y+7)^2=(12)^2$

$x^2+y^2-8x+14y-79=0$



د پوښتنو ځوابونه:

1- د لاندې مستقیمو خطونو حالتونه له دایرو سره چې معادلې یې په لاندې ډول راکړل شوي دي وڅیړئ.

	د دایرو معادلې	د مستقیمو خطونو معادلې
$a)$	$x^2+y^2-4x-y-3=0$	$3x-2y+3=0$
$b)$	$2(x^2+y^2)-3x+2y-6=0$	$x-y-1=0$
$c)$	$x^2+y^2+x-9y+14=0$	$5x-y=11$

د a حل: د y قیمت د مستقیم خط له معادلې څخه په لاس راوړو:

$$-2y=-3x-3\Rightarrow\ y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$$

د y قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو:

$$x^2+(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2})^2-4x-(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2})-3=0 \qquad x^2+\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{2}x+\frac{9}{4}-4x-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}-3=0$$

$$13x^2-4x-9=0$$

$$x=\frac{4\pm 22}{26}\Rightarrow x_1=1 \quad , \quad x_2=-\frac{9}{13}$$

$$x_1=1\Rightarrow y_1=3 \quad , \quad x_2=-\frac{9}{13}\Rightarrow y_2=\frac{6}{13}$$

نو دا مستقیم خط د $(1,3)$ او $(-\frac{9}{13},\frac{6}{13})$ په نقطو کې دا دایره قطع کوي.

د b جز حل: $\quad x-y-1=0\Rightarrow -y=-x+1\Rightarrow\ y=x-1$

د y قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو:

$$2[x^2+(x-1)^2]-3x+2(x-1)-6=0$$

$$2x^2+2x^2-4x+2-3x+2x-2-6=0$$

$$4x^2-5x-6=0$$

$$\Delta=25-4\cdot 4(-6)=25+96=121$$

$$x_1=\frac{5+\sqrt{121}}{8}=\frac{5+11}{8}=\frac{16}{8}=2 \qquad x_2=\frac{5-11}{8}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$$

$$y=1 \qquad y=\frac{-3}{9}-1=-\frac{7}{4}$$

نو د تقاطع نقطې $(2,1)$ او $(\frac{-3}{4},\frac{-7}{4})$ دی.

د c حل: $y=5x-11$ کیږي که د y قیمت د دایرې په معادله کې وضع کړو لرو چې:

$$x^2+(5x-11)^2+x-9(5x-11)+14=0$$

$$x^2+25x^2-110x+121+x-45x+99+14=0$$

$$26x^2-156x+243=0 \Rightarrow x^2-6x+9=0 \Rightarrow x=3 \quad , \quad y=4$$

دا مستقیم خط د $(3,4)$ په نقطه کې له دایرې سره مماس دي.

2- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(2,-3)$ په نقطه کې د $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ له دایرې سره مماس وي.

حل:

$$-2h=-2 \Rightarrow h=1$$

$$-2k=4 \Rightarrow k=-2$$

څرنګه چې د دایرې مرکز د $(1,-2)$ نقطه ده او د $(2,-3)$ نقطه د دایرې پر محیط واقع ده، نو د $(1,-2)$ او $(2,-3)$ نقطې د شعاع د انجامونو نقطې دي چې معادله يې:

$$y+2=\frac{-3+2}{2-1}(x-1) \Rightarrow y+1=-(x-1) \qquad y=-x-1$$

اوس د هغه مستقیم خط معادله په لاس راړوو چې د $(2,-3)$ له نقطې څخه تیریږي او میل يې m_1 وي.

$$m_1 \cdot m_2=-1 \Rightarrow m_1(-1)=-1 \Rightarrow m_1=1$$

نو د هغه مستقیم خط معادله چې د $(2,-3)$ په نقطه کې له دایرې سره مماس وي عبارت ده له:

$$y+3=1(x-2)$$

$$y=x-5$$

په دویمه طریقه:

$$-g=1 \Rightarrow g=-1$$

$$-f=-2 \Rightarrow f=2$$

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

څرنګه چې $x_1=2$ او $y_1=-3$ دي.

$$2x-3y-(x+2)+2(y-3)+3=0$$

$$x-y-5=0 \qquad y=x-5$$

3- د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $(-5,4)$ له نقطې څخه د $5x^2+5y^2-10x+15y-131=0$ پر دایره مماس رسم شوي وي.

حل: د معادلې دواړو خواوې په 5 وېشو لرو چې:

$$x^2+y^2-2x+3y-\frac{131}{5}=0$$

$$=\sqrt{(-5)^2+(4)^2-2(-5)+3(4)-\frac{131}{5}}=\sqrt{25+16-10+12-\frac{131}{5}}=\sqrt{43-\frac{131}{5}}$$

$$=\sqrt{\frac{215-131}{5}}=\sqrt{\frac{184}{5}}$$

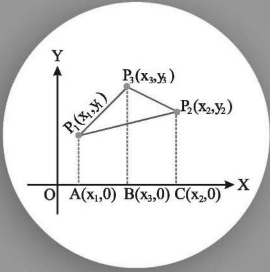
4- د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $(-2,-5)$ له نقطې څخه د $x^2+y^2+8x-5y=7$ پر دایره مماس رسم شوي وي.

حل:

د مماس اوږدوالی $=\sqrt{(x^2+y^2)+8x-5y-7}$

$$=\sqrt{(-2^2)+(-5^2)+8(-2)-5(-5)-7}=\sqrt{4+25-16+25-7}$$

$$=\sqrt{54-23}=\sqrt{31}$$



د مثلث د مساحت پیدا کول چې د راسونو
وضعیه کمیات یې معلوم وي

د درسي کتاب (349) **مخ**　**د تدریس وخت**(1 **درسي ساعت**)

د زده کړې (پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي) موخې	زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • د هغه مثلث د مساحت د پیدا کولو طریقه زده کړي چې د راسونو وضعیه کمیات یې معلوم وي. • د مثلث د راسونو د وضعیه کمیاتو له مخې د مثلث مساحت پیدا کړای شي. • د هندسي مسایلو په حلولو کې ورڅخه ګټه واخیستلای شي او په اهمیت یې پوه شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب ، تخته، چارت، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له لومړینو فعالیتونو څخه وروسته د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ او محترم ښوونکي دې مرسته ورسره وکړي چې ځواب یې په لاندې ډول دی: $(-3,6)=(x_1y_1)\qquad(3,2)=(x_2y_2)\qquad(6,0)=(x_3y_3)$ $A=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ $=\frac{1}{2}[-3(2-0)+3(0-6)+6(6-2)]=0$ نو دا درې نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې**

له دې وروسته چې د مثلث راسونو د وضعیه کمیاتو له مخې د مثلث د مساحت فورمول توضیح شو. ددې مخ مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

ددې لوست لومړۍ پوښتنه دې حل شي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

دویمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

• ددې لوست مثال په دې ډول هم حلولای شو:

$$|A|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\qquad |A|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4 & -5 & 1\\ 5 & -6 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$R_2 - R_1$ او $R_3 - R_1$

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[1(6-1)] = \frac{5}{2} = 2,5$$

- که د یو مثلث راسونه $(a, b-c), (a, b+c)$ او $(-a, c)$ وي، ددې مثلث مساحت مساوي دی په:

$$|A| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ a & b-c & 1 \\ -a & c & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ 0 & -2c & 0 \\ -a & c & 1 \end{vmatrix} \quad (R_2 - R_1)$$

د دویم سطر له مخې انکشاف ورکړل شوي دی: $= \frac{1}{2}[-2c(a+a)] = -2ac \Rightarrow A = 2ac$

1- د مثلث د درېو راسونو د وضعیه کمیاتو له مخې لاندې فورمول د مثلث د مساحت د پیداکولو لپاره په لاس راوړل شوي دی؛ $A = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$

د محترم ښوونکي د اضافي معلوماتو لپاره د مثلث مساحت د ډیټرمینانت (determinant) په واسطه هم پیداکولای شو.

که $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ او (x_3, y_3) د مثلث درې راسونه وي:

$$|A| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

که د لومړی ستون په واسطه د A دیټرمینانټ قیمت په لاس راوړو:

$$|A| = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

په لاس راځي.

په شکل کې P_3, P_2, P_1 د ساعت د عقربې مخالف (Counter clockwise) په نظر کې نیول شوي دي که نقطې د ساعت د عقربې په جهت (Clockwise) په نظر کې ونیول شي، امکان لري چې د مثلث د مساحت عددي قیمت منفي په لاس راشي، نو د منفي علامه په نظر کې نه نیول کیږي یا په بل عبارت مطلقه قیمت یې په نظر کې نیول کیږي.

2- که د ډیټرمینانټ قیمت صفر شي په دې معنا چې د P_3, P_2, P_1 نقطې د یو مستقیم خط پر مخ واقع دي.

3- د هغه مثلثونو مساحت چې د B،A او C راسونه یې په لاندې ډول راکړل شوي دي مساوي دی په:

$A(0,0) = (x_1, y_1) \qquad B(2,4) = (x_2, y_2) \qquad C(-2,2) = (x_3, y_3)$

$A(-1,-2) = (x_1, y_1) \qquad B(2,5) = (x_2, y_2) \qquad C(5,2) = (x_3, y_3)$

د لومړی مثلث مساحت:

$$|A| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[0 - 0 + 1(4+8)] = 6$$ د لومړی سطر په واسطه:

د دویم مثلث مساحت:

د لومړی سطر په واسطه: $|A|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-1 & -2 & 1\\ 2 & 5 & 1\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}[-1(5-2)+2(2-5)+1(4-25)]=-15$

نو د مثلث مساحت د سطحې 15 واحده دی.

4- د هغه مثلث مساحت چې د راسونو وضعیه کمیات یې A(5,3) ، B(−2,2) او C(4,2) وي، د سطحې 3 واحده دي.

د هغه مثلث مساحت چې د راسونو وضعیه کمیات یې A(2,3) ، B(−1,1) او C(4,−5) وي، د سطحې 14 واحده دي.

د پوښتنو ځوابونه:

1. د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې $A(\overset{x_1}{0},\overset{y_1}{0})$, $B(\overset{x_2}{8},\overset{y_2}{6})$ او $C(\underset{x_3}{12},\underset{y_3}{4})$ وي:

حل:

$$\text{مساحت}\quad \overset{\Delta}{ABC}=\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[0(6-4)+8(4-0)+12(0-6)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[32-72\right]=16-36=|-20|=20$$

2. که د یوه مثلث راسونه $A(4,0)$, $B(-4,0)$ او $C(0,3)$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړې.

حل:

$$\text{د مثلث مساحت}\quad \overset{\Delta}{ABC}=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$
$$=\frac{1}{2}[4(0-3)+(-4)(3-0)+0(0-0)]=\frac{1}{2}[-12-12]=|12|=12$$

3. د هغه څلور ضلعي مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې A(1,0), B(6,2), C(8,6) او D(2,4) وي.

حل: که د څلور ضلعي یو قطر رسم کړو د ABC او ACD دوه مثلثونه په لاس راځي چې د څلور ضلعې مساحت ددې دواړو مثلثونو د مساحتونوله مجموعي سره مساوي دی.

لومړی طریقه:

$$\text{مساحت}\quad \overset{\Delta}{ABC}=\frac{1}{2}[1(2-6)+6(6-0)+8(0-2)]=\frac{1}{2}(-4+36-16)=8$$
$$\text{مساحت}\quad \overset{\Delta}{ACD}=\frac{1}{2}[1(4-6)+2(6-0)+8(0-4)]=\frac{1}{2}[-2+12-32]=11$$

په نتیجه کې څلور ضلعې مساحت $8+11=19$ دی.

دویمه طریقه: د ABC او ACD د مثلثونو د مساحتونو مجموعه د څلور ضلعي له مساحت سره مساوي ده .

د لومړي سطر (R_1) د انکشاف په واسطه:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 6 & 2 & 1\\ 8 & 6 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 8 & 6 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}[1(2-6)-0+1(36-16)]+\frac{1}{2}[1(6-4)-0+1(32-12)]$$

$$=\frac{1}{2}(-4+20)+\frac{1}{2}(2+20)=8+11=19$$

د پوښتنو حل:

1. د نقطو د لاندې هر جوړې ترمنځ فاصله پیدا کړئ او همدارنګه ددې مستقیمو خطونو د تنصیف د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د A او B له دوو نقطو څخه تیریږي.

$a:\ A(3,1) \qquad B(-2,-4)$

$b:\ A(-8,3) \qquad B(2,-1)$

$c:\ A(-\sqrt{5},-\frac{1}{3}) \qquad B(-3\sqrt{5},5)$

د a جز حل:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-3)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{25+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

د AB د مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+(-2)}{2}=\frac{1}{2}$$
$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1+(-4)}{2}=-\frac{3}{2}$$

نو د AB د مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له: $(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$

حل جز b:

$$\overline{AB}=\sqrt{[2-(-8)]^2+(-1-3)^2}=\sqrt{100+16}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$$

د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-8+2}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$
$$y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{3-1}{2}=1 \qquad \Rightarrow (-3,1)$$

د c جز حل:

$$AB=\sqrt{[-3\sqrt{5}-(-\sqrt{5})]^2+[5-(-\frac{1}{3})]^2}=(\sqrt{5}-3\sqrt{5})^2+(5+\frac{1}{3})^2=20+\frac{256}{9}=\sqrt{\frac{436}{9}}=\frac{2\sqrt{109}}{3}$$

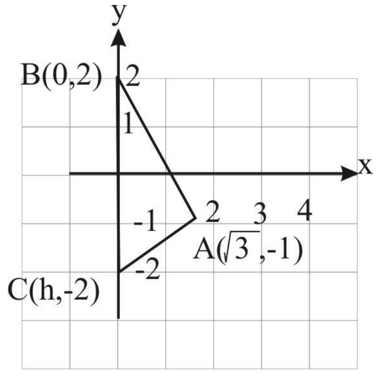
د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات:

$$x=\frac{-\sqrt{5}-3\sqrt{5}}{2}=-\frac{4\sqrt{5}}{2}=-2\sqrt{5}$$
$$y=\frac{-\frac{1}{3}+5}{2}=\frac{\frac{14}{3}}{2}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3} \qquad (-2\sqrt{5},\frac{7}{3})$$

2. که $A(\sqrt{3},-1)$، $B(0,2)$ و $C(h,-2)$ د یوه قایمه زاویه مثلث راسونه وي او د $\hat{A}=90^\circ$ وي د h قیمت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث قایم الزاویه دی نو د فیثاغورث د قضیې له مخې لرو چې:

$BC^2 = AC^2 + AB^2$
$AC^2 = (h-\sqrt{3})^2 + (-2+1)^2$
$AC^2 = h^2 - 2\sqrt{3}\cdot h + 3 + 1$
$AC^2 = h^2 - 2\sqrt{3}h + 4$
$AB^2 = (\sqrt{3}-0)^2 + (-1-2)^2 = 3 + 9 = 12$
$BC^2 = (h-0)^2 + (-2-2)^2 = h^2 + 16$
$h^2 + 16 = h^2 - 2\sqrt{3}h + 4 + 12 \Rightarrow -2\sqrt{3}h = 0 \Rightarrow h = 0$



3. د p د نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ په داسې حال کې چې هغه مستقیم خط چې د $A(1,4)$ و $B(5,6)$ له نقطو څخه تیریږي د $\frac{AP}{PB} = 2$ په نسبت وویشي.

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{r+1} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$
$$x = \frac{1+2\cdot 5}{2+1} = \frac{11}{3} \qquad y = \frac{4+2(6)}{2+1} = \frac{16}{3}$$

د P د نقطې وضعیه کمیات $P(\frac{11}{3},\frac{16}{3})$ دي.

4. د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې میل یې (-2) او د y محور په 3 کې قطع کړي.

حل:

$$y = mx + b$$
$$y = -2x + 3$$

5. د $x = \sqrt{7}$ او $y = -\sqrt{7}$ مستقیمو خطونو میل پیداکړئ.

حل: د $x = \sqrt{7}$ د مستقیم خط میل تعریف شوې نه دي او د $y = -\sqrt{7}$ مستقیم خط میل صفر دی.

6. د y د محور میل مساوي دي په:

$a)-1 \quad b)1 \quad c)0 \quad d)$ تعریف شوي نه دی

حل: د d جز سم دی.

7. د یوه مستقیم خط میل $m = \frac{2}{3}$ دي، د هغه مستقیم خط میل چې پردې خط عمودي وي مساوي دی په:

$a)\frac{2}{3} \qquad b)-\frac{2}{3} \qquad c)\frac{3}{2} \qquad d)-\frac{3}{2}$

حل: څرنګه چې د عمودوالی شرط $m_1 \cdot m_2 = -1$ دی؛ نو:

$$\frac{2}{3}\cdot m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = \frac{-1}{\frac{2}{3}} = -1\cdot\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

د d جز سم دی.

8. د هغو مستقیمو خطونو میل پیداکړئ چې د لاندې راکړل شوو نقطو له جوړو څخه تیریږي.

$a).(-2,4)\ ,\ (5,11) \qquad b).(3,-2)\ ,\ (2,7) \qquad c).(4,6)\ ,\ (4,8)$

د a جز حل:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{11-4}{5-(-2)}=\frac{7}{7}=1$$

د b جز حل:

$$m=\frac{7-(-2)}{2-3}=\frac{7+2}{-1}=\frac{9}{-1}=-9$$

د c جز حل:

$$m=\frac{8-6}{4-4}=\frac{2}{0}\ \text{(تعریف نشده)}$$

9. د $4x-y+2=0$ او $12x-3y+1=0$ مستقیم خطونه سره:

a) موازي دي b) عمود دي. c) نه عمود او نه موازي دي.

حل:

$$4x-y+2=0 \Rightarrow -y=-4x-2 \Rightarrow y=4x+2$$
$$12x-3y+1=0 \Rightarrow -3y=-12x-1 \Rightarrow y=4x+\frac{1}{3}$$

څرنگه چې $m_1=m_2$، نو دا مستقیم خطونه سره موازي دي.

د a جز سم دی.

10. د $3x-4y+3=0$ او $3x-4y+7=0$ مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

حل: څرنگه چې میلونه سره مساوي دي، نو سره موازي دي، اوس د یو مستقیم خط یوه نقطه پیداکوو.

$$x=0 \Rightarrow y=\frac{3}{4}$$

نو $(0,\frac{3}{4})$ د لومړی مستقیم خط یوه نقطه ده چې له دویم مستقیم خط څخه یې فاصله عبارت ده له:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|3(0)+(-4)(\frac{3}{4})+7\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{4}{\sqrt{9+16}}=\frac{4}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}\ \text{(د اوږدولی واحد)}$$

11. د مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(-4,7)$ له نقطې څخه تیر شي او $2x-7y+4=0$ له مستقیم خط سره موازي وي.

حل:

$$2x-7y+4=0$$
$$-7y=-2x-4$$
$$\Rightarrow 7y=2x+4$$
$$\Rightarrow y=\frac{2}{7}x+\frac{4}{7}$$
$$y-7=\frac{2}{7}(x+4)$$
$$7y-49=2x+8$$
$$-2x+7y-57=0$$
$$2x-7y+57=0$$

12. د $P(6,-1)$ د نقطې فاصله د $6x-4y+9=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

حل:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$d=\frac{|6(6)+(-4)(-1)+9|}{\sqrt{6^2+(-4)^2}}=\frac{36+4+9}{\sqrt{36+16}}=\frac{49}{\sqrt{52}}$$

13. د P د نقطې وضعیه کمیاتو په داسې حال کې پیدا کړئ چې د $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط چې د $P_1(2,-5)$ او $P_2(6,3)$ له نقطو څخه تیریږي د $\frac{3}{4}$ په نسبت وویشي.

حل:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{2+\frac{3}{4}\cdot 6}{1+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{13}{2}}{\frac{7}{4}}=\frac{13}{2}\cdot\frac{4}{7}=\frac{26}{7}$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{-5+\frac{3}{4}\cdot 3}{\frac{7}{4}}=\frac{\frac{-20+9}{4}}{\frac{7}{4}}=\frac{-11}{4}\cdot\frac{4}{7}=\frac{-11}{7}$$

$$P(x,y)=(\frac{26}{7},\frac{-11}{7})$$

14. د لاندې مستقیمو خطونو معادلې نورمال شکل ته واړوئ.

$a).\ 2x+5y-2=0$ $\qquad$ $b).\ 2y-6x+4=0$ $\qquad$ $c).\ 2x-3y+6=0$

د a جز حل: د معادلې دواړه خوا وې پر $\sqrt{2^2+5^2}=\pm\sqrt{29}$ ویشو، ددې لپاره چې د مساوات د ښی خوا علامه مثبته وي، نو د $\sqrt{29}$ په پام کې نیسو لرو چې:

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x+\frac{5}{\sqrt{29}}y-\frac{2}{\sqrt{29}}=0 \qquad \text{او یا} \qquad \frac{2x+5y-2}{\sqrt{29}}=0$$

څرنګه چې $\sin\theta$ او $\cos\theta$ دواړه مثبت دي، نو θ په لومړی ناحیه کې واقع ده.

د مثلثاتي جدول له مخې هغه زاویه چې $\cos=\frac{2}{\sqrt{29}}$ او $\sin=\frac{5}{\sqrt{29}}$ وي پیدا کوو او په فورمول کې یې وضع کوو.

15. د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(4,0)$ او $(-4,0)$ له نقطو څخه تیریږي مساوي دی په:

$a).\ 1$ $\qquad$ $b).\ -1$ $\qquad$ $c).\ 0$ $\qquad$ $d)$ تعریف شوی نه دی

حل:

$$m=\frac{0-0}{-4-4}=\frac{0}{-8}=0$$

د c جز سم دی.

16- د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال خط یې د x د محور له مثبت جهت سره 30° زاویه جوړوي.

حل:

$$x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$$
$$x\cos 30^\circ + y\sin 30^\circ - 10 = 0$$
$$x(\frac{\sqrt{3}}{2}) + y(\frac{1}{2}) - 10 = 0$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 10 = 0 \Rightarrow \sqrt{3x} + y - 20 = 0$$

17. د هغه مثلث مساحت پیداکړي چې راسونه يې $A(2,3)$ ، $B(-1,1)$ او $C(4,-5)$ وي.

حل: څرنگه چې لرو:

$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ مساحت مثلث} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$
$$= \frac{28}{2} = 14 \text{ (د سطحې واحد)}$$

18. د هغه مثلث مساحت چې راسونه يې $A(1,4)$, $B(2,-3)$ او $C(3,-10)$ دي مساوي دی په:

$a).\ 1$ $b).\ 2$ $c).\ 0$ $d).$ هيڅ يو

حل:
$$\overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$
$$\overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2}\left[1(-3+10) + 2(-10-4) + 3(4+3)\right]$$
$$= \frac{1}{2}(7 - 28 + 21) = 0$$

د c جز سم دی په دې معنا چې دا درې واړه نقطې پر يوه مستقيم خط واقع دي.

19. د $x + 2y = 6$ د مستقيم خط د تقاطع د نقطو وضعيه کميات د $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 39 = 0$ له دايرې سره پيداکړئ.

حل: د مستقيم خط له معادلې څخه لرو چې $x = -2y + 6$ دا قيمت د دايرې په معادله کې وضع کوو:

$$x = -2y + 6$$
$$(-2y+6)^2 + y^2 - 2(-2y+6) - 2y - 39 = 0$$
$$4y^2 - 24y + 36 + y^2 + 4y - 12 - 2y - 39 = 0$$
$$5y^2 - 22y - 15 = 0$$
$$\Rightarrow y = 5, -\frac{3}{5}$$

نو د تقاطع د نقطو وضعيه کميات عبارت دی له: $(\frac{36}{5}, -\frac{3}{5})$ و $(-4,5)$

20. د هغه دايرې معادله پيداکړئ چې د $A(1,1)$ ، $B(2,-1)$ او $C(3,-2)$ له نقطو څخه تيريږي.

حل: څرنگه چې $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ د دايرې عمومي معادله ده، د x او y پر ځای د A ، B او C د نقطو وضعيه کميات عوض کوو، څکه چې دا نقطې د دايرې پر محيط واقع دي، درې درې مجهوله معادلې په لاس راځي او همزمان يې حلوو او د a، b او c قيمتونه پيداکوو او د دايرې په عمومي معادله کې يې وضع کوو:

$$\begin{aligned}
&1+1+a+b+c=0 &&\Rightarrow \begin{cases} a+b+c+2=0..................(I) \\ 2a-b+c+5=0..................(II) \\ 3a-2b+c+13=0............(III) \end{cases} \\
&4+1+2a-b+c=0 &&\Rightarrow \\
&9+4+3a-2b+c &&\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{matrix} -a+2b-3=0 \\ -a+b-8=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b=-5 \Rightarrow -a-10-3=0 \\ a=-13 \end{matrix}$$

$$-13-5+c+2=0 \Rightarrow c=16$$

نو د غوښتل شوي دايرې معادله: $x^2+y^2-13x-5y+16=0$ ده

دويمه طريقه:

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2+2gx+2fy+c=0..................I \\
&2+2g+2f+c=0..............................II \\
&5+4g-2f+c=0..............................III \\
&13+6g-4f+c=0............................IV
\end{aligned}$$

که II معادله له III معادلې تفريق شي، لرو چې:

$$3+2g-4f=0....................V$$

معادله III له IV معادلې څخه تفريقوو لرو چې:

$$8+2g-2f=0....................VI$$

که V معادله له VI څخه تفريق شي، نو لرو چې:

$$5+2f=0 \Rightarrow f=\frac{-5}{2}$$

د f قيمت په VI معادله کې وضع کوو:

$$8+2g-2(\frac{-5}{2})=0 \Rightarrow g=\frac{-13}{2}$$

او د g او f قيمتونه په II معادله کې وضع کوو:

$$2+2(\frac{-13}{2})+2(\frac{-5}{2})+c=0 \Rightarrow c=16$$

د f,c او g قيمتونه په I معادله کې وضع کوو، نو غوښتل شوي معادله عبارت ده له:

$$x^2+y^2-13x-5y+16=0$$

21. د هغه دايرې معادله پيدا کړئ چې $A(3,-1)$ او $B(0,1)$ له نقطو څخه تيريږي او مرکز يې د $4x-3y-3=0$ پر مستقيم خط واقع وي.

حل: که $C(h,k)$ د دايرې مرکز په نومړي مستقيم خط واقع وي:

$$4h-3k-3=0.............I$$

او همدارنګه (د دايرې شعاع) $|OA|=|OB|$

$$\begin{aligned}
&(h-0)^2+(k-1)^2=(h-3)^2+(k+1)^2 \\
&h^2+k^2-2k+1=h^2+k^2-6h+2k+1
\end{aligned}$$

$-6h+4k+9=0$..................II

اویا

د I او II له حلولو څخه لرو چې:

$$\begin{cases}-6h+4k+9=0\\ \ \ 4k-3k-3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-18h+12k+27=0\\ \ \ \underline{16h-12k-12=0}\end{cases}$$

$$-2h+15=0$$

$$h=\frac{15}{2}$$

$$-6(\frac{15}{2})+4k+9=0$$

$$-45+4k+9=0\Rightarrow\ 4k=36$$

$$k=\frac{36}{4}=9$$

$$r^2=(\frac{15}{2})^2+(9-1)^2=\frac{225}{4}+64=\frac{481}{4}$$

$r^2=\frac{481}{4}\Rightarrow(x-\frac{15}{2})^2=\frac{481}{4}$ ویا $x^2+y^2-15x-18y+17=0$

22- د $4x^2+4y^2-8x+12y-25=0$ دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 4 وېشو.

$$x^2+y^2-2x+3y-\frac{25}{4}=0$$

$$-2h=-2\quad\Rightarrow h=1$$

$$-2k=3\qquad\Rightarrow k=-\frac{3}{2}$$

د دایرې مرکز $(h.k)=(1.-\frac{3}{2})$

د شعاع اوږدوالی $r=\sqrt{h^2+k^2-c}=\sqrt{1+\frac{9}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{4+9+25}{4}}=\sqrt{\frac{38}{4}}=\sqrt{\frac{19}{2}}$

$23-$ د هغه دایرې معادله پیدا کړئ چې د $A(4,1)$ او $B(6,5)$ له نقطو څخه تیرېږي او مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط باندې واقع وي.

حل: که د دایرې مرکز $C(h,k)$ وي، نو:

$$|CA|=|CB|$$

$$\left|(h-4)^2+(k-1)^2\right|=\left|(h-6)^2+(k-5)^2\right|$$

$$h^2-8h+16+k^2-2k+1=h^2-12h+36+k^2-10k+25$$

$$\Rightarrow 4h+8k-44=0\Rightarrow\begin{cases}h+2k-11=0...I\\ 4h+k-16=0...II\end{cases}$$

$$\begin{cases} h+2k-11=0 \\ _\ 8h\pm 2k_{\mp}32=0 \end{cases}$$

یا $-7h+21 \Rightarrow h=3 \quad \Rightarrow k=-12+16 \Rightarrow k=4$

$r^2=(h-4)^2+(k-1)=(3-4)^2+(4-1)^2=10$

د دایرې معادلې: $(X-3)^2+(Y-4)^2=10$ اویا:

$x^2-6x+9+y^2-8y+16=10$

$x^2+y^2-6x-8y+25=10$

$x^2+y^2-6x-8y+15=10$

24- که د یوه مثلث راسونه $A(5,-6)$, $B(-3,5)$ او $C(-1,2)$ وي دا مثلث:

a) متساوی الاضلاع دي b) متساوي الساقین دي c) مختلف الاضلاع دي

حل:

$\overline{AB}=\sqrt{(-3-5)^2+(5+6)^2}=\sqrt{185}$

$\overline{AC}=\sqrt{(-1-5)^2+(2+6)^2}=\sqrt{100}=10$

$\overline{BC}=\sqrt{(-1+3)^2+(2-5)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

لیدل کیږي چې دا مثلث هم مختلف الاضلاع دی، نو د c جز سم دی.

25-که د یو مثلث د راسونو وضعیه کمیات په ترتیب سره $A(5,4)$ $B(4,10)$ او $C(7,8)$ وي دا مثلث:

a) متساوي الاضلاع دی b) مختلف الاضلاع دی c) متساوی الساقین دی

حل:

$\overline{AB}=\sqrt{(4-5)^2+(10-4)^2}=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$

$\overline{AC}=\sqrt{(5-7)^2+(4-8)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$\overline{BC}=\sqrt{(7-4)^2+(8-10)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{13}$

لیدل کیږي چې مثلث مختلف الضلاع دی، نو د b جز سم دی.

26- که $p(-8,4)$ او $Q(2,-1)$ وي د A د نقطې مختصات پیدا کړئ که د A نقطه د PQ په مستقیم خط داخلاً او خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وویشي.

حل:

$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}=\frac{-8+(\frac{2}{3})\cdot 2}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-24+4}{3}}{\frac{3+2}{3}}=\frac{-20}{5}=-4$$

$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}=\frac{4+\frac{2}{3}(-1)}{\frac{5}{3}}=\frac{\frac{10}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{5}=2$$

د $A(-4,2)$ نقطه راکړل شوي، خط داخلاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت ووشي.

$$x=\frac{-8+(-\frac{2}{3})\cdot 2}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-28}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{-28}{3}\cdot\frac{3}{1}=-28$$

$$y=\frac{4+(-\frac{2}{3})(-1)}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{12+2}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{14}{3}\cdot\frac{3}{1}=14$$

د $A(-28,14)$ نقطه راکړل شوي، خط خارجاَ د $\frac{2}{3}$ په نسبت ووشي.

په دویم ډول:

$$P(x,y)=\left[\frac{(2)(2)+3(-8)}{2+3},\frac{3(4)+(-1)(2)}{2+3}\right]=(\frac{4-24}{5},\frac{12-2}{5})=(-4,2)$$

$$P(x,y)=\left[\frac{2(2)-3(-8)}{2-3},\frac{2(-1)-3(4)}{2-3}\right]=(28,14)$$

27- د $x-y+1=0$ د مستقیم خط د تقاطع نقطې د $x^2+y^2=5$ له دایرې سره پیدا کړئ.

حل:

$y=x+1$

$x^2+(x+1)^2=5$

$x^2+x^2+2x+1-5\Rightarrow x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0$

$x=1 \qquad x=-2$

نو د تقاطع نقطې عبارت دي له: $(-1,-2)$ و $(1,2)$

28- که د $x+ay-5=0$ مستقیم خط د $x^2+y^2-2x+4y=0$ له دایرې مماس وي، د a قیمت پیدا کړئ.

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه د x قیمت پیدا کوو او د دایرې په معادله کې یې عوض کوو:

$x=-ay+5$

$(-ay+5)^2+y^2-2(-ay+5)+4y=0$

$a^2y^2-10ay+25+2ay-10+4y+y^2=0$

$(a^2+1)^2+(-8a+4)y+15=0$

$\Delta=(8a+4)^2-4(a^2+1)\cdot 15=64a^2-64a+16-60a^2-60=0$

$4a^2-64a-44=0$

$a^2-16a-11=0$

$\Delta'=64+11=75$ وي یا

$a_{1,2}=8\pm\sqrt{75}$

29- د هغه دایرې معادله چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تیریږي او د $y-1=0$ له مستقیم خط سره مماس وي عبارت ده له:

a) $x^2+y^2-4x=0$

b) $x^2+y^2-2x=0$

c) $x^2+y^2+2x=0$

حل: څرنګه چې (0,0) او (2,0) نقطې د دايرې پر محيط باندې واقع دي نو :

$|AC|=|BC|$ (د دايرې شعاع)

$|AC|^2=|BC|^2$

$(h-0)^2+(5-0)^2=(h-2)^2+(k-0)^2$

$\Rightarrow h^2+k^2=h^2-4h+4+k^2 \Rightarrow 4h=4 \Rightarrow h=1$

نو د دايرې مرکز C(1,k) دي.

څرنګه چې y-1=0 دي.

$\frac{|0(1)+(k)(-1)|}{\sqrt{0^2+1^2}}=r \Rightarrow r^2=|k-1|^2$

$|AC|^2=(k-1)^2$

$h^2+k^2=k^2-2k+1$

$1=-2k+1 \Rightarrow k=0$

$r^2=|0-1|^2=1$

$(x-1)^2+(y-0)^2=1$

$x^2+y^2-2x=0$

د b جز سم دی.

30 – هغه دايره چې معادله يې $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ ده.

a) حقيقي ده   b) نقطوي ده   c) موهومي ده

$r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}=\sqrt{\frac{(-6)^2}{4}+\frac{4^2}{4}-14}=\sqrt{\frac{36}{4}+\frac{16}{4}-14}=\sqrt{9+4-14}=\sqrt{-1}$

د c جز سم دی موهومي ده.

31- هغه دايره چې معادله يې $x^2+y^2+2x-4y+5=0$ ده.

a) حقيقي ده   b) نقطوي ده   c) موهومي ده

حل:

$r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}=\sqrt{\frac{2^2}{4}+\frac{(-4)^2}{4}-5}=\sqrt{1+4-5}=0$

د b جز سم دی دايره نقطوي ده.

32- د $A(4,-3)$ او $B(-2,-5)$ وي د A او B د نقطو ترمنځ فاصله پيدا کړئ او هم د $\overline{AB}$ د خط د تنصيف نقطې کميات پيدا کړئ.

حل:

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-2-4)^2+(-5+3)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ (د اوږدوالي واحد)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4+(-2)}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$$
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{-3-5}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات: $(x, y) = (1, -4)$ دي.

33- که د یوه مثلث راسونه $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ وي وښایاست چې دا مثلث قایمه الزاویه دي.

$$\overline{AB} = \sqrt{(3+6)^2 + (-5-3)} = \sqrt{145}$$
$$\overline{AC} = \sqrt{(-1+6)^2 (5-3)^2} = \sqrt{29}$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (5+5)^2} = \sqrt{116}$$

څرنګه چې:

$$(\sqrt{145})^2 = (\sqrt{29})^2 + (\sqrt{116})^2$$

(د فیثا غورث قضیه)

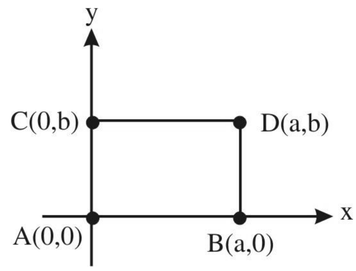
$$145 = 29 + 16$$

نو مثلث قایمه زاویه دی:

$$145 = 145$$

34- وښایاست چې $A(0,0)$ ، $B(a,0)$ ، $C(0,b)$ ، $D = (a,b)$ نقطې د یو مستطیل راسونه دي او هم وښایاست چې د مستطیل د قطرونو اوږدوالی سره مساوي دی.

$$|AB| = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{a^2} = a$$
$$|CD| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-b)^2} = \sqrt{a^2} = a$$
$$|AC| = \sqrt{(0-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{b^2} = b$$
$$|BD| = \sqrt{(a-a)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{b^2} = b$$



لیدل کیږي چې $|AC| = |BD|$ او $|CD| = |AB|$ دي، نو د C,B,A او D نقطې د مستطیل راسونه دي:

$$|AD| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|BC| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

په نتیجه کې $|BC| = |AD|$ دی، نو د مستطیل قطرونه سره مساوي دي.

35 – وښایاست چې $A(3,1)$, $B(6,2)$ او $C(9,3)$ نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

حل: ددې لپاره چې درې واړه نقطې پر یوه مستقیم خط واقع وي، د $\overline{AB}$ او $\overline{BC}$ د مستقیمو خطونو میلونه باید سره مساوي وي.

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{6-3} = \frac{1}{3}$$
$$m_{\overline{BC}} = \frac{3-2}{9-6} = \frac{1}{3}$$

نو دا نقطې په یوه مستقیم خط واقع دي.

همدارنګه د $|AC| = |AB| + |BC|$ مساوات په واسطه هم ښودل کیږي.

$$|AC| = \sqrt{(9-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$
$$|BC| = \sqrt{(9-6)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}$$
$$|AB| + |BC| = \sqrt{10} + \sqrt{10} = 2\sqrt{10} \Rightarrow |AC| = |AB| + |BC|$$

په نتیجه کې C,B,A نقطې پر یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

36- د هغه مستقیمو خطونو معادلې پیدا کړئ چې د لاندې جوړو له نقطو څخه تیریږي.

a : $(5,8),(1,2)$
b : $(-1,-3)$, $(2,-1)$
c $(0,3)$, $(5,0)$
d : $(3,5),(8,15)$
e : $(-2,-1)$, $(3,-4)$
f : $(0,2)$, $(-2,0)$

د a جز حل:

$$y-8 = \frac{2-8}{1-5}(x-5) \Rightarrow y-8 = \frac{-6}{-4}(x-5) \Rightarrow 2y-3x-1=0$$

د b جز حل:

$$y+3 = \frac{-1+3}{2+1}(x+1) \Rightarrow y+3 = \frac{2}{3}(x+1) \Rightarrow 3y-2x+7=0$$

د c جز حل:

$$y-3 = \frac{0-3}{5-0}(x-0) \Rightarrow y-3 = \frac{-3}{5}x$$
$$5y-15+3x=0 \Rightarrow 5y+3x-15=0$$

د d جز حل:

$$y-5 = \frac{15-5}{8-3}(x-3) \Rightarrow y-5 = \frac{10}{5}(x-3)$$
$$y-5 = 2x-6 \Rightarrow y-2x+1=0$$

د e جز حل:

$$y+1 = \frac{-4+1}{3+2}(x+2) \Rightarrow 3x+5y+11=0$$

د f جز حل:

$$y-2 = \frac{0-2}{-2-0}(x-0) \Rightarrow x-y+2=0$$

37 – د هغه مستقیم خط معادله چې د $(5,8)$ او $(-1,10)$ له نقطو څخه تیریږي، عبارت ده له:

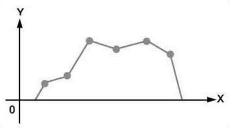
$a:\ y = -\frac{1}{3}x + 9\frac{2}{3}$ $b:\ y = -\frac{x}{3} + 9\frac{2}{3}$ $c:\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{29}{3}$

$d:$ درې واړه سم دي:

لیدل کیږي چې درې واړه معادلې سره مساوي دي، نو د d جز سم دی.

اتم څپرکی
احصائیه





د فریکونسي څو ضلعي ګراف

د درسي کتاب (359)مخ   د لوست وخت(1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د فریکونسي څو ضلعي ګراف د رسمولو په طریقه وپوهیږي. • د راکړل شوي (data) له مخې د فریکونسي څو ضلعي ګراف رسم کړای شي. • و پوهیږي چې د مستطیلي ګراف د مستطیلونو مساحت د فریکونسي څو ضلعي ګراف له لاندې سطحې سره مساوي دی. • وپوهیږي چې دا ډول ګرافونه د متصلو مقداري متحولینو لپاره مناسب دي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	د انګیزې د پیدا کولو لپاره له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. چې د مستطیلونو ټول مساحت د فریکونسي د څو ضلعي ګراف له لاندې سطحې سره مساوي دی.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې:

د (395) مخ فعالیت دې زده کوونکي د راکړل شوي جدول له مخې د 360 مخ د مثال له حلولو څخه وروسته په ګروپونو کې کار وکړي چې ددې فعالیت حل په درسي کتاب کې توضیح شوي دی او ګراف یې ددې لوست په اضافي معلوماتو کې رسم شوی دی. د 360 مخ د مثال له حلولو څخه وروسته د زده کوونکو په وړاندې اخیستنې سره د فعالیت ګراف رسم کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره د 362 مخ $(data)$ لپاره چې د 24 زده کوونکو د تنې لوړوالی راکړل شوي دی، د فریکونسي جدول ترتیب کړئ چې ګراف یې د پوښتنو په حل کې رسم شوی دی.

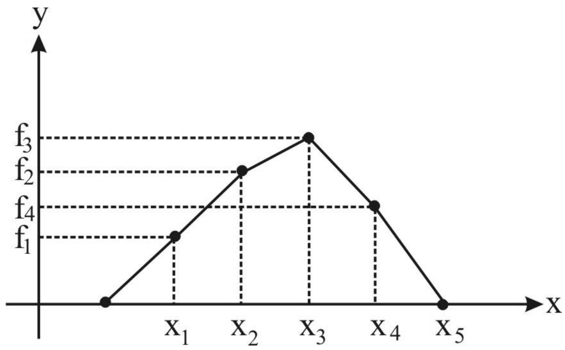
د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

له زده کوونکو وپوښتئ چې یو ګراف د x محور څه وخت قطع کولای شي.

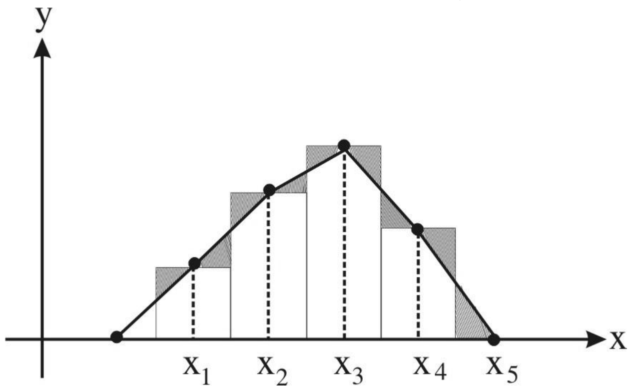
د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

• په دې ګراف کې د (x_i, f_i) نقطې د وضعیه کمیاتو په مستوي کې سره نښلولو چې (x_i) د صنف مرکز او (f_i) د اړونده صنف فریکونسي ده. یو منکسر خط په لاس راځي چې (x_1, f_1) یې د پیل او (x_k, f_k) یې د پای ټکي دي. له دې ګراف څخه نوره استفاده هم کوي. ددې لپاره چې د فریکونسي څو ضلعي ګراف د لاندې برخې مساحت د مستطیلي ګراف مساحت د مستطیلونو له مساحت سره مساوي شي. د څو ضلعي ګراف دواړه انجامونه د x له

محورسره نښلوو فرض کیږي چې د لومړی صنف څخه تر مخه یو بل صنف هم لرو چې فریکونسي یې صفر ده او همدارنګه فرضوي چې د k ام صنف څخه وروسته یو بل صنف هم شته دی چې فریکونسي یې هم صفره ده. ددې دوو صنفونو په فرضولو سره به یو داسې ګراف رسم شي چې دا خاصیت ولري (x محور قطع کوي).
(د فریکونسیو د څو ضلعي ګراف لاندې مساحت د مستطیلي ګراف له مساحت سره مساوي دي) د مثال په ډول لاندې شکل وګورئ.



چې د x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 نقطې د صنفونو مرکزونه او f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 د صنفونو اړونده فریکونسی دي.
که پر دې ګراف مستطیلي ګراف (هستوګرام) رسم کړو لاندې شکل غوره کوي:



که شکل ته پاملرنه وشي (د مستطیل خط شوي برخه له هغه خط شوي برخې سره مساوي ده چې د فریکونسي څو ضلعي ګراف د باندې واقع ده) نو په دې اساس د ټولو مستطیلونو مساحت د فریکونسیو د څو ضلعي ګراف له لاندې مساحت سره مساوي دي. د فریکونسیو څو ضلعي ګراف د مقداري متصلو متحولینو لپاره مناسب دی .

- د مثال په ډول د لاندې (data) د فریکونسیو څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

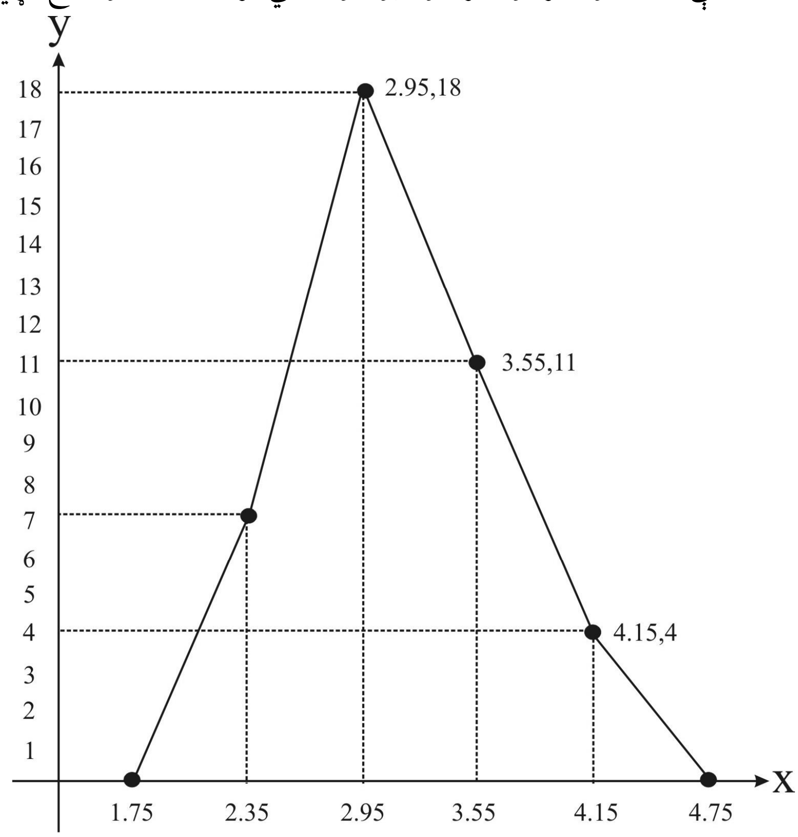
$$\text{د لومړي صنف مرکز} = \frac{2.05 + 2.65}{2} = 2.35$$

صنفونه	د صنف مرکز	د صنف وسعت	مطلقه فریکونسي
$2.05 - 2.65$	2.35	0.6	7
$2.65 - 3.25$	2.95	0.6	18
$3.25 - 3.85$	3.55	0.6	11
$3.85 - 4.45$	4.15	0.6	4
مجموع			40

ددې لپاره چې د فریکونسیو د څو ضلعي ګراف د x محور قطع کړي څرنګه چې د صنف طول یا وسعت (0.6) دی، نو:

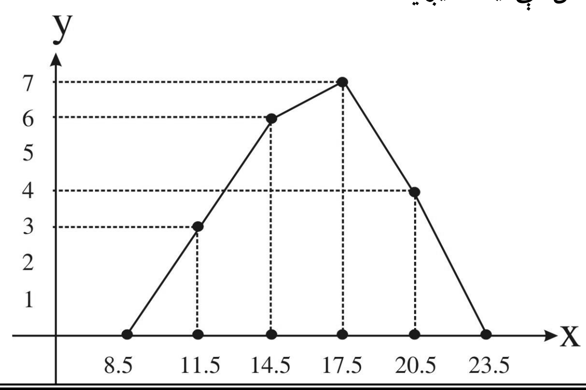
$(c = 2.65 - 2.05 = 0.6)$ $\quad 2.35 - 0.6 = 1.75 \quad$ $4.15 + 0.6 = 4.75$

نو د $(1.75,0)$ او $(4.75,0)$ نقطې علاوه کوو، ترڅو د فریکونسیو څو ضلعي ګراف د x محور قطع کړي.



- د (359) مخ د فعالیت حل:

د $(11.5,3)$, $(14.5,6)$, $(17.5,7)$ او $(20.5,5)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په مستوي کې ټاکو چې ددې نقطو د x د مختصې قیمت یې د صنف مرکز او د y د مختصې قیمت یې د صنف اړونده فریکونسي ده. ددې لپاره چې د فریکونسیو د څو ضلعي ګراف لاندې سطحه د مستطیلي ګراف له مساحت سره مساوي شي (چې دا موضوع به وروسته مطالعه شي) دوه صنفونه چې یو صنف له لومړي صنف ترمخه بل صنف له اخرني صنف څخه وروسته علاوه کوو چې ددې دواړو صنفونو فریکونسي صفر ده او د صنف اوږدوالی یا وسعت (Class interval) $14.5 - 11.5 = 3$ دی. نو $11.5 - 3 = 8.5$ له لومړی صنف څخه تر مخه فرضي صنف مرکز دی او $20.5 + 3 = 23.5$ اخرني صنف څخه وروسته صنف مرکز دی، که دواړه نقطې له پورتنیو نقطو سره علاوه کړو د فریکونسي د څو ضلعي ګراف لاس ته راځي چې په شکل کې لیدل کیږي.



د پوښتنو ځوابونه:

1- د نهم اولسم ټولګیو د 24 زده کوونکو د تنې لوړوالی د سانتي متر په حساب په لاندې ډول راکړای شوي دي.

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
125	98	117	153	141	126

د پورتنیو دیتا (Data)لپاره د فریکونسي یو جدول جوړ کړئ.دیتا (Data) په شپږو طبقو وویشئ، ددې ډیتا (Data) د ښودلو لپاره کوم ډول ګراف ښه دی د فریکونسیو څو ضلعي ګراف یې رسم کړئ.

حل: لومړی راکړل شوي دیتا ترتیبوو:

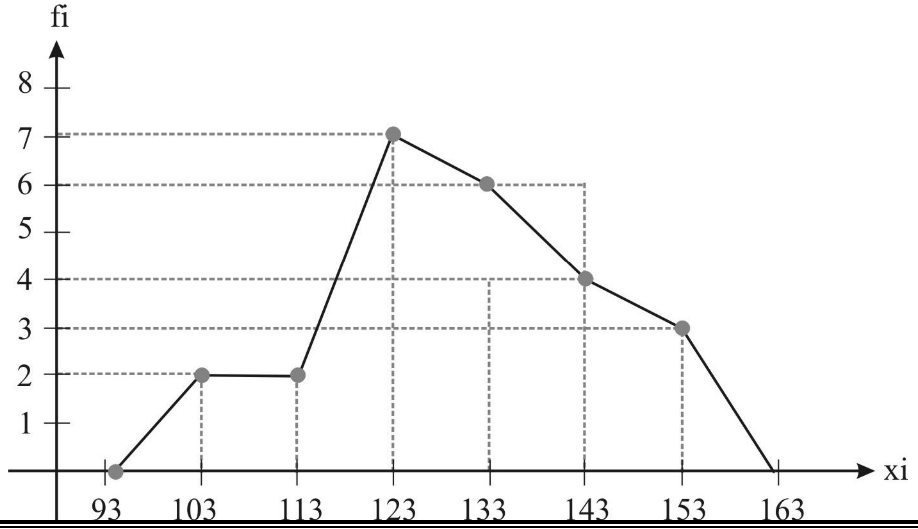
98 107 115 117 118 121 122 123 123 126 126 128 128 129 133
135 136 138 141 142 144 148 152 153

صنفونه	فریکونسي fi	د صنف مرکز xi
98 – 108	2	103
108 – 118	2	113
118 – 128	7	123
128 – 138	6	133
138 – 148	4	143
148 – 158	3	153

که د صنف مرکز (x_i) د x پر محور او فریکونسي (f_i) د y پر محور وښایو، د (x_i,f_i) مرتبه جوړه لاس ته راځي او په مستوي کې ددې نقطو په ټاکلو سره د فریکونسیو د څو ضلعي ګراف د پورتنی دیتا د ښودلو لپاره جوړېږي.

$(x_i - c,0) = (103 - 10,0) = (93,0)$

$(x_n + c,0) = (163,0)$





د ساقې او پاڼې ګراف

د درسي کتاب (363)**مخ** **دلوست وخت**: (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د ساقې او پاڼې دگرا ف د رسمولو طريقه زده کړي. • وپوهيږي چې په راکړل شوي ديتا کې کوم رقمونه د ساقې او کوم رقمونه د پاڼو په حيث ليکل کيږي. • په دې وپوهيږي چې که د ساقې او پاڼې ګراف د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت کې د 90° په اندازه دوران وکړي. په ميله يې ګراف بدليږي. • د ورکړل شوي data له مخې د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړای شي. • د موضوع د زده کړې په پايله کې د رياضي زده کړې ته علاقه مند شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	د لومړينو فعاليتونو له سرته رسولو څخه وروسته، ورودي برخې پوښتنه د انګيزې د پيدا کولو لپاره له زده کوونکو وکړئ. کولای شوو چې احصائيوي ټولنه د ساقې په حيث قبوله کړو د مثال په ډول هر کس يو د تابعيت تذکرې يا د کارت نمره لري.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**:

د 363 مخ فعاليت دې استاد زده کوونکو ته توضيح کړي او ورودي وښودل شي چې که د ساقې او پاڼې ګراف ته د 90° په اندازه د ساعت عقربې د حرکت په مخالف جهت کې دوران ورکړو، په ميله يې ګراف بدليږي.

د (364) مخ مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړي او ګراف يې په چارت او يا د تختې پر مخ رسم کړئ.

همدارنګه د (365) مخ مثال هم په همدې ډول زده کوونکو ته توضيح کړئ.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**:

د زده کړې د پياوړتيا لپاره لاندې پوښتنه حل کړئ.

د لاندې (*data*) د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

19 06 10 22 08 18 23 05 16 09 18

17 14 12 24 25 16 23 24 22 16 18 17

نوټ: څرنګه چې ټول عددونه دوه رقمي دي په دې اساس د 6 عدد د 06 په شکل او د 5 عدد د 05 په شکل او د 9 عدد د 09 په شکل ليکل شوي دی.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې:**

د لاندې (*data*) لپاره د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

38 , 48 , 45 , 32 , 29 , 32 , 45 , 36 , 22 , 21 , 35 , 45 , 47 , 26 , 43 , 48 , 64

چې ځواب يې داسې دی:

لومړی عددونه په صعودي ډول ترتيب کړئ

21 , 22 , 26 , 29 , 32 , 32 , 35 , 36 , 38 , 43 , 45 , 45 , 45 , 47 , 48 , 48 , 64

ددې (*data*) د ساقې او پاڼې ګراف په دې ډول دی:

ساقه	پاڼه
2	1 2 6 9
3	2 2 5 6 8
4	3 5 5 5 7 8 8
5	
6	4

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- دا ډول ګراف د هغه اطلاعاتو او مشاهدو لپاره مناسب دی چې لومړی طبيعي عددونه وي او بيا څه وخت چې د لومړيو مرتبو رقمونه يې حذف شي، کوم عددونه چې پاتې کيږي، زيات توپير ونه لري. د لومړيو مرتبو عددونه د پاڼو او پاتې عددونه د ساقې په حيث د ساقې او پاڼې ګراف جوړوي، د موضوع د لا وضاحت لپاره هغه پوښتنه چې ددې لوست د پياوړتيا په برخه کې راکړل شوي ده، که يويز رقمونه يې حذف کړو، نود 0 ،1 او (2) عددونه پاتې کيږي چې په خپل منځ کې زيات توپير نه لري.
اوس هغه عددونه چې لسيز رقمونه يې صفر دي، په پام کې نيسو او يويز رقمونه يې په ترتيب سره له ساقې څخه په لږه فاصله کې يې ورته مخامخ ليکو، د صفر پاڼه په لاندې ډول جوړيږي: 5689 0
په دې معناچې په يويز کې څلور عددونه لرو چې عبارت له 8,6,5 او 9 څخه دي اوپه همدې ډول د 1 عدد پاڼه د 1 عددونه دي او د 2 د عدد پاڼه عبارت ده، له 2233445 څخه، د ساقې او پاڼې ګراف يې په لاندې ډول دی. 026666778889 :

0 5689
1 024666778889
2 2233445

چې 1,0 او 2 ساقه ده که دګراف د °90 په اندازه د ساعت د عقربې دحرکت په مخالف جهت وڅرخوو، نو ميله يې ګراف ترې جوړيږي په لاندې ډول:

	9	
	8	
	8	
	8	
	7	
	7	5
	6	4
	6	4
9	6	3
8	4	3
6	2	2
5	0	2
0	1	2

د ساقې او پاڼې د گراف له گټو څخه يوه داده چې د اړتيا په وخت کې اطلاعات هم را سره موجود وي.

نوټ: ددې گراف د رسمولو لپاره مو له مطلقه فريکونسيو څخه استفاده وکړه. له نسبي فريکونسيو څخه په استفاده يې هم رسمولای شوو، ښکاره خبره ده چې په دې صورت کې به دگراف لوړوالی لږ شي، خو نسبتونه به تغير نه کوي.

2- د لاندې دتيا د ساقې (Stem) او پاڼې (Leaf) گراف په دې ډول دی.

32 , 32 , 34 , 91 , 38 , 12 , 17 , 62 , 22 , 51, 27, 34 , 43 , 44 , 44 , 8 , 30 , 30 , 31 , 40 , 34 , 37 38 , 38 ,78 , 50 , 26 , 54 , 28 , 29 , 19 , 6 , 54

ساقه	پانه
0	6,8
1	2,7,9
2	2,6,7,8,9
3	0,0,1,2,2,4,4,4,7,8,8,8
4	0,3,4,4,5
5	0,1,4
6	2
7	8
8	
9	1

3- د لاندې data د ساقې او پاڼې گراف رسم کړئ.

53, 49, 27, 48, 60, 52, 44, 38, 47, 52, 82, 46, 55, 31, 39, 54, 51, 47, 50, 45, 50, 61, 43, 64

ساقه	پانه
2	7
3	1,8,9
4	3,4,5,6,7,7,8,9
5	0,0,1,2,2,3,4,5
6	0,1,4
7	
8	2

4- د کرکټ د یو ټیم دګټل شوو او بایلل شوو لوبو شمېر په مختلفو کلونو کې په لاندې دول راکړل شوي دی:

کلونه	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
دګټل شوو لوبو شمېر	55	20	37	52	30	49	27	35	31	34	33
د بایلل شوو لوبو شمېر	10	19	24	17	13	26	17	21	24	19	16

له دوو خواوو څخه ددې ډیټا د ساقې او پاڼې ګراف ترتیب کړئ:

حل:

د بایلل شوو لوبو شمېر	ساقه	دګټل شوو لوبو شمېر
9 9 7 7 6 3 0	1	
6 4 4 1	2	0 3 7
	3	0 1 4 5 7
	4	9
	5	2 5

5- دهغو مختلفو ونو لوړوالی چې تر ټولو زیات لوړوالی لري په لاندې ډول راکړل شوي دي د ساقې او پاڼې ګراف یې ترتیب کړئ.

د ونې ډول	لوړوالی	د ونې ډول	لوړوالی	د ونې ډول	لوړوالی
A	47	G	38	M	55
B	40	H	77	N	84
C	40	I	74	O	63
D	67	J	58	P	40
E	42	K	61	Q	48
F	91	L	44	R	35

3	5 8
4	0 0 0 2 4 7 8
5	5 8
6	1 3 7
7	4 7
8	4
9	1

6- د ځینو عناصرو اتومي نمبر(Atomic Number) په لاندې ډول راکړل شوی دی د ساقې او پاڼې ګراف یې ترتیب کړئ.

عنصر	نمبر اتومي	عنصر	نمبر اتومي	عنصر	نمبر اتومي	عنصر	نمبر اتومي
Hydrogen	1	Silver	47	Carbon	6	Titanium	22
Nitrogen	7	Barium	56	Argon	18	Bromine	35
Calcium	20	Iron	26	Krypton	36	Iodine	53

حل:

0	1 6 7
1	8
2	0 2 6
3	5 6
4	7
5	3 6

7- د ساقې او پاڼې دلاندې گراف ډیتا ولیکئ

ساقه	پاڼه
5	0 1 4 8
6	2 6 7
7	1 4 5 6 6
8	2

چې data يې عبارت دی له: 50 , 51 , 54 , 58 , 62 , 66 , 67 , 71 , 74 , 75 , 76 , 76 , 82

د پوښتنو ځوابونه:

1- د لاندې ډيتا لپاره د ساقې او پاڼې گراف رسم کړئ.

7.9 8.3 10.9 11.7 8.4 9.1 6.8
12.5 11.2 7.8 12 11.3 8.4 13 6.8

حل: له کوچني عدد څخه لوي عدد ته يې ترتيبوو:

6.8 6.8 7.8 7.9 8.3 8.4 8.4 9.1 10.9
11.2 11.3 11.7 12 12.5 13

ددې لپاره چې اعشاري برخه يې له منځه يوسو، په 10 کې يې ضربوو.

68 68 78 79 83 84 84 91 109 112 113 117 120 125 130

ساقه	برگ
6	8,8
7	8,9
8	3,4,4
9	1
10	9
11	2,3,7
12	0,5
13	0

يا په دې ډول چې د 3.8 عدد د 038 په شکل، د 11.2 عدد د 112 په شکل او د 12 عدد د 120 د عدد په شکل په لاندې ډول ليکو:

ساقه	پاڼه
06	8 8
07	8 9
08	3 4 4
09	1
10	9
11	2 3 7
12	0 5
13	0

ربعي (چارکونه)

د درسي کتاب (367) مخ **د لوست وخت (1 درسي ساعت)**

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د لومړۍ، دویمې او دریمې ربعې تعریفونه زده کړي. • په دې پوه شي چې لومړی، دویم او دریم چارک په ترتیب سره په Q_1, Q_2 او Q_3 سره ښودل کیږي. • د چارکونو مقدار او موقعیت پیدا کړای شي. • د احصائیوي مسایلو په حلولو کې ترې استفاده وکړای شي او په اهمیت یې پوه شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه او...
د ورودي برخې توضیح (5 دقیقې)	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د انګیزې د پیداکولو پاره له زده کوونکو څخه دې د ورودي برخې پوښتنه وشي.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې:

ددې لوست فعالیت زده کوونکو ته توضیح کړئ. له دې وروسته چې د چارکونو د مقدار او موقعیت پیداکول زده کوونکو ته توضیح شي. دزده کوونکو په ونډې اخیستنې سره د دې لوست مثال حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

ددې لوست پوښتنه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

له زده کوونکو پوښتنه وکړئ چې د Q_1, Q_2 او Q_3 مقدارونه تعریف کړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

• Q_1, Q_2 او Q_3 په دې ډول هم ټاکي:

د لاندې دیتا Q_1, Q_2 او Q_3 عبارت دي له:

26 17 21 23 19 28 17 20 29

لومړي دیتا په صعودي ډول ترتیبوو لرو چې:

17 17 19 20 21 23 26 28 29

$$Q_1 = \frac{17+19}{2} = 18 \qquad Q_2 = 21 \qquad Q_3 = \frac{26+28}{2} = 27$$

• په لاندې data کې Range لومړی او دریم چارک کوم عددونه دي؟

65 42 45 20 66 60 76

$Range = 56$ $Q_1 = 42$ $Q_3 = 66$

•

84 95 76 88 92 78 98

$Range = 22$ $Q_1 = 78$ $Q_3 = 95$

•

13 11 14 16 14 15 16 17 14 18 19 16 25

$Range = 14$ $Q_1 = 14$ $Q_3 = 17.5$

•

2 3 3 3 3 3 (3) 4 4 4 4 4 4 (4) 4 5 5 5 5 5 (5) 5 5 5 5 5 6

میانه $= 4$

$Q_1 = 3$ $Q_3 = 5$

د پوښتنو ځوابونه:

فرض کړئ چې لاندې دیتا راکړل شوي وي:

100 90 80 120 160 140 85

a) لومړی او دریم چارک پیدا کړئ.

b) له میانې څخه مخکې عددونه ولیکئ.

c) له میانې څخه وروسته عددونه ولیکئ.

حل: راکړل شوي دیتا په صعودي ډول ترتیبوو او بیا شماره ورکوو:

80 85 90 100 120 140 160

1 2 3 4 5 6 7

a) لومړی چارک $Q_1 = \frac{1 \cdot 7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7+2}{4} = \frac{9}{4} = 2.5 \Rightarrow Q_1 = 85.5$

$Q_3 = \frac{3 \cdot 7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{21}{4} + \frac{1}{2} = \frac{23}{4} = 5.75 \Rightarrow Q_3 = 120.75$

b) څرنګه چې میانه له Q_2 سره مساوي ده، نو لومړی میانه پیدا کوو بیا له میانې مخکې او وروسته عددونه ټاکو:

$Q_2 = \frac{2 \cdot 7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{14+2}{4} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow Q_2 = 100$

له میانې څخه مخکې عددونه عبارت دي له: 90 85 80

c: له میانې څخه وروسته عددونه عبارت دي له: 160 140 120

صندوقچه يي ګراف

د درسي کتاب (369)مخ **د لوست وخت(1 درسي ساعت)**

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د راکړل شوي (data) د صندوقچه يي ګراف رسمول زده کړي. • په دې وپوهيږي چې داګراف نسبت نورو ګرافونو ته د (data) تيتوالی ښه ښکاره کوي. • وپوهيږي چې دا ګراف (data) ترټولو لوی او کوچنی (data)، لومړی او دريم چارك او ميانې په اساس ښکاره کوي. • ددې ګراف له مخې پيداکړای شي چې ديتا متناظره ده او که نه؟ • د راکړل شوي (data) صندوقچه يي ګراف رسم کړای شي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د انګيزې د پيداکولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه دې له زده کوونکو وشي چې د سرخلاصي صندوق شکل لري.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) دقيقې:

دې لوست فعاليت شايد زده کوونکي حل نه کړای شي، محترم ښوونکي دې حل کړي چې حل يې په لاندې ډول دی:

لومړی (*data*) ترتيبوو:

10 , 11 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18 ,(19), 23 , 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 31 , 31

د پورتنيو عددونو ميانه 19 ده. هغه عددونه چې د ميانې مخکې نيمايي کې واقع دي، عبارت دي له:

10 , 11 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18

دې عددونه ميانه $\frac{14+15}{2}=14.5$ ده.

او هغه عددونه چې د ميانې وروسته نيمايي کې واقع دي عبارت دي له:

23 , 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 31 , 31

چې ددې عددونه ميانه $\frac{26+27}{2}=26.5$ ده.

دويم چارك يا Q_2 (19) دې چې له ميانې سره مساوي دی. له دې وروسته چې صندوقچه يي ګراف او د رسمولو مرحلې يې زده کوونکو ته توضيح شي، لومړی مثال دې ده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**:

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره لاندې پوښتنه حل کړي.

که لاندې *data* راکړل شوي وي.

1,1.5 , 1.5 , 1.75 , 3 , 7 , 12 , 15 , 20

ددې عـــددونو میانـــه د (3) عـــدد دی چـــې *data*,50% لـــه میـــانې لانـــدې د [1,1.75] یـــا 0.75 پـــه فاصـــله کـــې یعنې 1.75 , 1.5 , 1.5 , 1 او په دې ډول چې 50% (data) د[7,20] په فاصله کې د 13 پـه اوږدوالـي تیـت شـوي ده. نو دا احصائیوي جامعه متناظره نه ده یعني د دیتا تراکم کیڼې خواته زیات دی نسبت ښې خواته.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**:

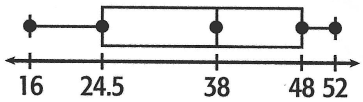
که لاندې دیتا راکړل شوي وي صندوقچه یي ګراف یې رسم کړئ

21 , 51 , 36 , 38 , 45 , 52 , 28 , 16 , 41

لومړی عددونه په صعودي ډول لیکو:

16 , 21 , 28 , 36 , 38 , 41 , 45 , 51 , 52

څرنګه چې میانه $\tilde{x} = 38$ د ښې خوا د څلورو عددونو میانه 48 او د کیڼې خوا د څلورو عددونو میانه (24.5) ده ګراف یې په لاندې ډول دی.



د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

صندوقچه یي ګراف د (*data*) د رقمونو او عددونو د پرتله کولو لپاره ډیر ګټور دی. د دې ګراف په واسطه معلومـولای شـو چې احصائیوي جامعه متناظره ده که نه؟ لیکن داسې پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای لکه ایا عددونه سره نـژدې دي؟ ایـا د حسابي ا وسط په شاوخوا کې زیات عددونه راټول شوي دي.

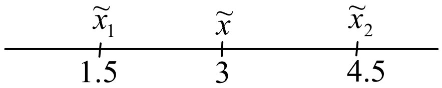
د لاندې راکړل شوي (*data*) صندوقچه یي ګراف عبارت دی له:

1 , 1.25 , 1.75 , 2 , 3 , 4 , 4.25 , 4.75 , 5

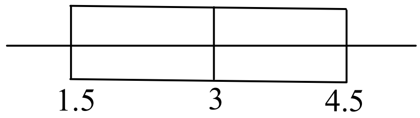
دګراف د رسمولو لپاره یې لومړی میانه، $\tilde{x} = 3$ (x تیلدا) ده، له میانې څخه د کوچنیو عددونو (2 , 1.75 , 1.25 , 1) میانه عبارت ده، له $\tilde{x}_1 = \frac{1.25+1.75}{2} = 1.5$ او له میانې څخه د لویو عددونو (5 , 4.75 , 4.25 , 4) میانه عبارت ده له:

$$\tilde{x}_2 \frac{4.25+4.75}{2} = 4.5$$

د عدد و خط پر مخ درې نقطې $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ او میانه $\tilde{x}$ ټاکو.



داسې یو مستطیل رسمولو چې سور یې اختیاري او اوږدوالی یې له $\tilde{x}_1$ تر $\tilde{x}_2$ پورې وي، د($\tilde{x}$) په نقطه کې دا مستطیل د عمود خط په واسطه په دوو برخو وېشو:



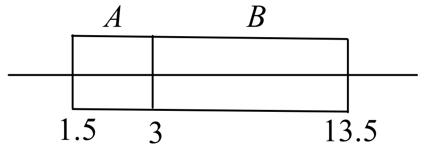
څرنګه چې 50% عددونه په جبعه کې له 1.5 څخه تر 3 پورې واقع دي او 50% عددونه له 3 څخه تر 4.5 پورې واقع دي نو د جعبې دواړه برخې سره مساوي دي.

په نتیجه کې د عددونو تراکم د میانې په دواړو خواو کې سره مساوي دی، نو دا احصائیوي جامعه متناظره ده.

- همدارنګه لاندې *data* متناظره نه ده.

1 , 1.5 , 1.5 , 1.75 , 3 , 7 , 12 , 15 , 20

چې ګراف یې په لاندې ډول دی:



په شکل کې ښکاره لیدل کیږي چې 50% عددونه له میانې لاندې د A په کوچنی ساحه کې او 50% عددونه له میانې پورته د B په لویه ساحه کې واقع دي، نو په دې اساس د عددونو تراکم د میانې کیڼې خواته، زیات دی نسبت ښیې خواته، نو دا *data* متناظره نه ده.

- صندوقچه یي ګراف (Box and Whisker Plots) : داګراف د data توزیع ښکاره کوي.

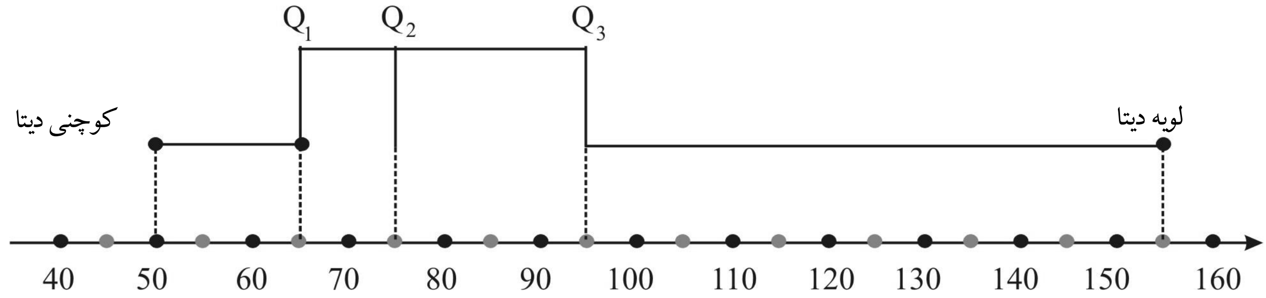
مثال: دل لاندې *data* صندوقچه یي ګراف رسم کړئ .

50 51 53 57 65 66 69 70 72 77 82 88 88 98 107 112 155

↑ تر ټولو لویه دیتا (155) — ↑ $Q_3 = 93$ — ↑ $Q_2 = 72$ میانه — ↑ $Q_1 = 61$ — ↑ تر ټولو کوچنی ډیتا (50)

$$Q_1 = \frac{57+65}{2} = 61$$

$$Q_3 = \frac{88+98}{2} = 93$$



پنځه کمیتونه (ترټولو لویه دیتا، Q_1, Q_2, Q_3 او تر ټولو کوچنی ډیتا) مستطیل جوړوي.

ددې بکس د جوړولو لپاره لاندې پنځه مرحلې په پام کې ونیسئ:

1- ډیتا په صعودي (Increasing) ډول ترتیب او Q_1, Q_2, Q_3 پیدا کړئ.

2- د عددونو یو خط (Line numbers) رسم کړئ لویه او کوچنی ډیتا پرې ولیکئ.

3- داسې یو بکس جوړ کړئ چې کیڼې خواته یې Q_1 او ښې خواته یې Q_3 وي.

4- د میانې په نقطه کې یو عمودي خط (Vertical line) (په Q_2 یا (میانه) کې رسم کړئ).

5- یو خط ددې بکس کیڼې خواته له Q_1 څخه تر کوچنۍ دیتا او بل خط د بکس ښې خواته له Q_3 څخه تر لوي دیتا پورې رسم کړئ.

مثال:

a: د راکړل شوي *data* صندوقچه يي ګراف رسم کړئ.

60 , 58 , 75 , 64 , 90 , 85 , 60

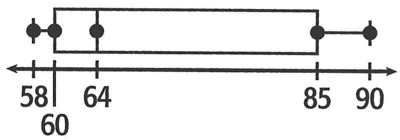
دیتا ترتیب کړئ.

58 , 60 , 60 , 64 , 75 , 85 , 90

په پورتنی data کې

تر ټولو کوچني دیتا = 58 $Q_1 = 60$ $Q_2 = 64$ $Q_3 = 85$

تر ټولو لویه دیتا = 90 Range = 32



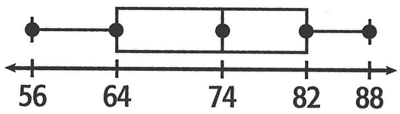
b-

56, 88 , 60 , 84 , 72 , 68 , 80 , 76

په پورتنی data کې

تر ټولو کوچني دیتا = 56 $Q_1 = 64$ $Q_2 = 74$ $Q_3 = 82$

تر ټولو لویه دیتا = 88 Range = 32



د پوښتنو ځوابونه:

1- شکل ته په پاملرنې سره د لاندینیو پوښتنو ځوابونه ووياست. (پام مو وي چې په درسي کتاب کې ددې شکل په رسمولو کې اشتباه شوې ده)



a) په پورتني ګراف کې میانه څو ده؟

b) ددې *data* لومړی چارك 8 دی، دا عدد د څه شي ښودونکي دی؟

c) دریم چارک (ربعه) څو ده؟ دا عدد څه شی ښیي؟

d) دا چې میانه د صندوق (بکس) کینې خواته واقع ده داد څه شي ښکارندی ده؟

e) د کینې خوا د ترادف اوږدوالي (د عددونو شمېر) نسبت ښيې خواته زیات دی، دا د څه ښکاروندوي دي؟

حل:

a) په پورتني ګراف کې میانه 9 ده.

b) لومړی چارک یا $Q_1 = 8$ دا ښيې چې 25% اطلاعات د Q_1 کینې خواته واقع دي.

c) دریم چارک $(Q_3 = 11)$ دی، دا ښکاره کوي چې 75% دیتا د Q_3 کینې خواته واقع ده.

d) کینې خواته د میانې موجودیت ښیې چې ډیر اطلاعات *data* کینې خواته واقع دي.

e) کینې خواته د عددونو د ترادف اوږدوالی نسبت ښې خواته هم ددې مدعا ښکارندوی دی چې ډیر اطلاعات کینې خواته واقع دي.

2- د یوه هېواد د فوټبال ملي ټیم د لوبغاړو عمرونه په لاندې ډول دي:

25	24	26	19	31	18	23	22	25	26
25	27	23	29	25	25	33	31	26	

له لاندې نتیجو څخه کومه یوه سمه ده؟

- د هغه لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه لوړ وي، زیات دي.
- د هغه لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له میانه څخه لوړ وي، زیات دي.
- د هغه لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه لږ وي، زیات دي.
- د هغه لوبغاړو شمیر چې عمر یې له اوسط څخه زیات دی، د هغه لوبغاړو له شمیر سره مساوي دي چې عمرونه یې له اوسط څخه کم دي.

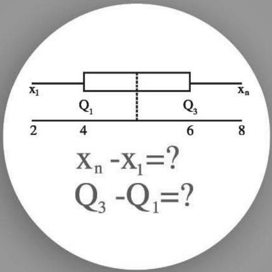
حل: څرنګه چې واقعي اطلاعات راکړل شوي دي، نو د فریکونسیو د جدول جوړولو ته اړتیا نشته دی، لومړی *data* ترتیبوو.

18	19	22	23	23	24	25	25	25	(25)	25
26	26	26	27	29	31	31	33			

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = (18+19+22+23+24+25+25+25+25+25+26+26+26+27+$$

$$+29+31+31+33) = \frac{483}{19} = 25.42$$

- لومړی جلمه سمه نه ده ځکه چې د هغه لوبغاړو شمېر چې عمرونه له اوسط (25.42) څخه زیات دي، 8 کسه دي په داسې حال کې چې د هغه لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه لږ دی 11 کسه دي.
- دویمه جمله سمه ده ځکه چې د هغه لوبغاړو شمیر چې عمرونه یې له میانې (25) څخه زیات دي 8 کسه دي او د هغه لوبغاړو شمیر چې عمرونه یې له میانې (25) څخه لږ دي، 6 کسه دي.
- دریمه جمله هم سمه ده، ځکه دهغه لوبغاړو شیمر چې عمرونه یې له اوسط څخه لږ دي، 11 کسه دي.
- څلورمه جمله سمه نه ده، ځکه چې $(8 \neq 11)$



د چارکونو انحراف
(Inter Quartile Range)

د درسي کتاب (375)**مخ** **دلوست وخت**(1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (**پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي**)	دې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • د (data) ربعي انحراف (د چارکونو انحراف) د پیداکولو طریقه زده کړي. • په دې وپوهیږي چې د هماغه مستطیل اوږدوالی چې په صندوقچه يي ګراف کې يې دوې میانې سره نښلولې، د چارکونو له انحراف څخه عبارت دی. • د چارکونو دانحراف د پیداکولو فورمول زده کړي. • ددې فرمول په واسطه د (data) دچارکونو انحراف پیدا کړای شي. • په احصائیوي مسایلو کې له دې فورمول څخه ګټه واخیستلای شي.
د تدریس لارې (**میتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته ددې لپاره چې فعالې زده کړې ته انګیزه پیدا شي، له زده کوونکو څخه دې د ورودي برخه پوښتنه وشي او ورته واضح دې شي، څه وخت چې یوه احصائیوي جامعه سره نژدې او یا لویه وي، د دوو ډیر کوچني او ډیر لوی مقدار له امله له جامعې څخه لوي عددي تغیرات لاس ته راځي، یا په بل عبارت یو نامناسب تغیر ښیي په همدې اساس د *data* څلورمه برخه له پورته او لاندې برخې څخه حذفوي چې د چارکونو انحراف د تیت والي له معیارونو څخه یو معیار دي او د $Q = Q_3 - Q_1$ له فرمول څخه په لاس راځي.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې**:

ددې لوست فعالیت دې محترم ښوونکي کار کړي متوجه اوسي چې ددې فعالیت د عددونو د لیکلو په وخت کې اشتباه شوې ده چې عددونه یې په لاندې ډول دي:

0 1 2 8 7 6 5 9 10 6 15 11

پورتني او لاندیني چارکونه:

ځینې وختونه امکان لري چې د تغیراتو لمن یا د تحول ساحه له احصائیوي جامعې څخه نامناسبه تعبیر وښیې. د مثال په ډول هغه معلومات او اطلاعات چې یو له بله سره ډیر نژدې وي. یا د عددونو د ډیرو لویو او یا ډیرو کوچنیو مقدارونو په سبب د تحول

ساحه Range يو لوی عدد په لاس راشي، لکه: که په 12 ورځو کې هغه شمير زده کوونکي چې د مطالعې لپاره کتابتون ته تللي وي، په لاندې ډول راکړل شوي وي.

0 , 1 , 2 , 8 , 7 , 6 , 5 , 9 , 10 , 6 , 15 , 11

ښکاره ده چې Range= 15-0=15 دی، خو په عمومي ډول (data) د 5 او 11 تر منځ تيت شوي ده چې تيت والې يې دومره زيات نه دی. له همدې سببه د لويو او کوچنيو (data) د تاثير له منځه وړلو لپاره يو شمېر پورتني او لانديني عددونه له منځه وړل کيږي، دا چې کوم شمير عددونه حذف شي، د عددونو په شمير او نژدېوالي پورې اړه لري. ځينې وختونه لسمه برخه او ځينې وختونه څلورمه برخه له پورتنيو او لاندينيو عددونو څخه حذفيږي. لومړی پورتني راکړل شوي عددونه ترتيبوو او که له پورتنيو او لاندينيو عددونو څلورمه برخه حذف شي، نو لرو چې:

0 , 1 , 2 , 5 , 6 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 15

نو (Range) يې عبارت له $9-5=4$ څخه دی چې له حذفولو څخه مخکې يې Range $15-0=15$ وه.

د چارکونو انحراف زده کوونکو ته توضيح کړئ او بيا ددې لوست مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې:**

د لاندې ديتا ترټولو کوچنی او تر ټولو لويه (data) ، چارکونه ، Range او ربعي انحراف يا د چارکونو انحراف پيدا کړئ او صندوقچه يي گراف يې هم رسم کړئ

5 6 9 2 3 7 2 9 8

چې ځواب يې داسې دی.

لومړی *data* ترتيبوو:

2 2 3 5 (6) 7 8 9 9

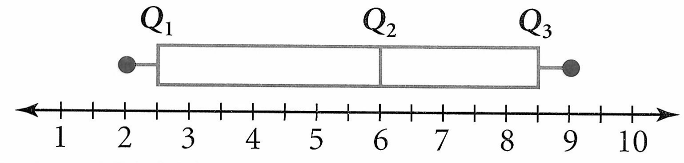
$$Q_1=\frac{2+3}{2}=2.5$$

$$Q_2=6$$

$$Q_3=\frac{8+9}{2}=8.5$$

$$\text{Range}=9-2=7$$

$$\text{IQR}=8.5-2.5=6$$



د لوست ارزونه: (5) **دقيقې:**

د ارزونې لپاره د لومړی پوښتنې يوه برخه دې له زده کوونکو وپوښتل شي.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

څرنګه چې د احصائيې هدف دا دی چې معلومات او اطلاعات لنډ کړي، په دې ډول چې موجوده اطلاعات لـه منځـه، ولاړ نـه شي.

ددې لپاره چې ويوهيږو چې د وسطي برخې د رقمونو فريکونسي له دواړو خواوو څخه زياتـه ده. مرکـز تـه د مـيلان لـه معيـارونو څخه ګټه اخيستل کيږي، دا مقدارونه چې د *data* د مرکز مشخص کوونکي دي، مرکـز تـه د مـيلان د معيـارونو (Measures of location or central Tendency) په نامه يادېږي چې عبارت دی له:

حسابي اوسط(Arithmetic Mean)

ميانه(Median) او موډ (Mode)

د انحراف يـا تيـت والـي معيارونـه (Types of dispersion) يـا(Measures of dispersion) يـا د تيـت والـي پـارا مترونـه پـه عمومي ډول عبارت دي له:

1- وسعت(Range) يا د تغيراتو لمن (د تحول ساحه)

2- وريانس(variance)

3- معياري انحراف (standard Deviation)

4- منځنی انحراف (Mean Deviation)

5- د چارکونو انحراف (Quartile Deviation)

څرنګه چې د تحول ساحه يا وسعت (R) مساوي په $R = b - a$ دی چې b تر ټولو لويه *data* او a تر ټولـو کـوچنی *data* ده که $R = 0$ وي، نو ټول اطلاعات (data) سره مساوي دی، يا په بل عبارت په اطلاعاتو *data* کې هيڅ تيت والی نشته.

د 1,5,4,5,4,6,10 عددونو د تحول ساحه $R = 10 - 1 = 9$ ده، د تحول ساحه د مرکزي معيارونو په شان لکه مـوډ او ميانـه نظـر ټولـــو اطلاعــاتو (data) تـــه حـــساسه نـــه ده. د مثـــال پـــه ډول $\{1,2,3,4,8,9,10\}$ عــددونو د تحــول ســاحه Range هم $R = 10 - 1 = 9$ ده، سره له دې چې په مخکنيو عددونو کې، عددونه نسبت دې عددنو ته سره نژدې واقع وو چې پـه نتيجـه کې يې تيت والی لږ دی، دانحراف له معيارونو يو هم د چارکونو انحراف دی

عموما په اطلاعاتو (عددونو او رقمونو) کې ډير لوی او کوچني عددونـه موجـود وي او سـربېره پـر دې زيـات عددونـه پـه مرکـزي برخه کې راټول شوي وي. په هره اندازه چې ددې عددونو $(data)$ له اوسط څخه يا د لويو او يا کوچنيـو عـددونو خواتـه ولاړ شـو فريکونسي يې کميږي، نو بايد نه دي چې لوی او کوچني مقدارونه د فريکونسي د کموالي په اساس د جامعې د وېش پـه ترسـيم کې رول ولري. که دوی له احصائيوي جامعې څخه حـذف شـي، څـه چـې پـاتې کيـږي د جـامعې واقعيتونـو تـه بـه نـژدې وي. د همدې هدف لپاره په صندوقچه يي ګراف کې ددې لپاره چې د اطلاعاتو متناظر او غير متناظروالی ښـکاره کـړو، هغـه اطلاعـات (جامعه) چې د دريو ميانو په واسطه مو په لاس راوړه، پـر څلـورو مـساوي برخـو مـو ويـشل، پـه حقيقـت د لـومړنی څلـورمې او

وروستي څلورمې برخو څخه صرف نظر کوه او د مستطیل اوږدوالی هغه قطعه خط و چې دوې میانې ګانې یې سره نښلولي. په حقیقت کې د چارکونو انحراف د همدې د مستطیل اوږدوالی دی.

څرنګه چې لومړني چارك هغه کمیت دی چې $\frac{1}{4}$ برخه اطلاعات ترې لږ او $\frac{3}{4}$ برخه اطلاعات ترې زیات وي، دویم چارك هغه کمیت دی چې د (data) $\frac{2}{4}$ برخه ترې کمه او $\frac{2}{4}$ برخه ترې زیاته وي، نو دویم چارك میانه ده یا $Q_2 = \tilde{x}$

او دریم چارك هغه کمیت دې چې $\frac{3}{4}$ برخه احصائیوي جامعه ترې لږه او $\frac{1}{4}$ برخه ترې لویه وي چې دریم چارك په Q_3 سره ښودل کیږي که د چارکونو انحراف په Q سره وښودل شي، نو $Q = Q_3 - Q_1$ دی.

مثال: د لاندې راکړل شوي (data) د چارکونو انحراف پیدا کړئ:

1 , 5 , 9 , 4 , 3 , 2 , 7 , 6 , 4 , 5 , 7 , 4 , 3 , 5 , 9 , 2 , 7 , 7 , 6 , 5

لومړی (data) ترتیبوو:

1,2,2,3,3, ↓ Q_1 4,4,4,5,5 ↓ Q_2 5,5,6,6,7 ↓ Q_3 7,7,7,9,9

د $(data)$ شمیر 20 دی، نو $\frac{1}{4}$ برخه یې مساوي په 5 ده او $\frac{3}{4}$ برخه یې 15 کیږي، نو لومړنی چارك باید له پنځو اطلاعاتو زیات او له 15 اطلاعاتو څخه کوچنی وي یا لومړنی چارك د 4 او 3 ترمنځ کمیت دی چې ددې دوو عددونو حسابي اوسط لومړنی چارك دی.

$$Q_1 = \frac{4+3}{2} = 3.5$$

دویم چارك باید له (10) عددونو څخه ریات او له (10) عددونو څخه لږ وي یا Q_2 د 5 او 5 په منځ کې وي یا:

$Q_2 = \frac{5+5}{2} = 5$ او دریم چارك $Q_3 = \frac{7+7}{2} = 7$

نو د چارکونو انحراف یې عبارت له:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 7 - 3.5 = 3.5$$

ځینې وختونه د چارکونو انحراف د $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ له فورمول څخه هم په لاس راځي.

د چارکونو د انحراف د پیدا کولو لپاره لاندې مرحلې په پام کې نیسو.

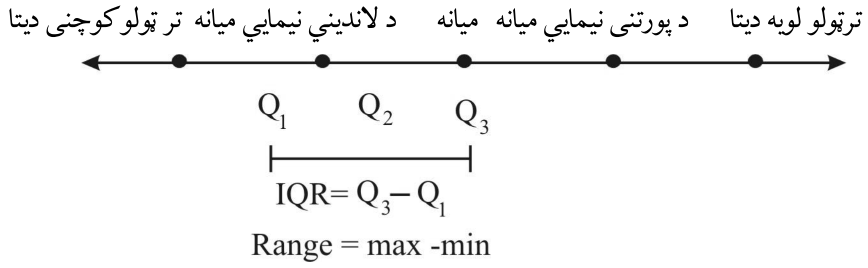
1) د data میانه پیدا کړئ، څو فیصده اطلاعات له میانې څخه لوړ او څو فیصده له میانې څخه لاندې واقع دي.

2) د data لاندینی نیمایي میانه پیداکړئ، څو فیصده data له دې میانې څخه لاندې واقع ده.

3) د پورتنی نیمایي data میانه پیداکړي چې څو فیصده data له دې میانې پورته واقع ده.

4) د عددونو یو خط رسم کړئ او هغه میانې ګانې چې په لومړی، دویمه او دریمه مرحله کې پیدا شوي دي او هم تر ټولو

کوچنی او لویه data د عددونو پر دې خط په نښه کړئ.



دلوېي او کوچنی data د تفریق حاصل د تحول ساحه (Range) دی او د لوی او کوچنی چارکونو د تفریق حاصل $(Q_3 - Q_1)$ د څلورمو د داخلي انحراف (Inter Quartile Range) په نامه یادیږي او یا په (IQR) سره ښودل کیږي.

مثال: د لاندې ډیتا د څلورمو انحراف او د تحول ساحه په لاندې ډول په لاس راځي:

50 , 57 , 77 , 66 , 53 , 72 , 51 , 88 , 82 , 70 , 112 , 107 , 69 , 88 , 98 , 65 , 155

دیتا ترتیب کړئ چې میانه یې نهم قیمت یعنې 72 ده. د لاندې نیمایي ډیتا میانه $Q_1 = \frac{57+65}{2} = 61$ او د پورتني نیمایي ډیتا میانه $Q_3 = \frac{88+98}{2} = 93$ ده.

50 51 53 [57 65] 66 69 70 [72] 77 82 88 [88 98] 107 112 155

کوچنی ډیتا ↑ 50 — $Q_1 = 61$ — $Q_2 = 72$ میانه — $Q_3 = 93$ — لویه ډیتا ↑ 155

$\text{Range} = 155 - 50 = 105$

$\text{IQR} = Q_3 - Q_1 = 93 - 61 = 32$

د پوښتنو ځوابونه:

1- د لاندې ډیتا د تحول ساحه، د څلورمو (چارکونو) انحراف او موډ پیدا کړئ او ووایاست چې د دیتاګڼوالی په کومه ساحه کې ډیر دي؟

5 11 12 14 15 15 16 17 30

حل: ډیتا په صعودي ډول ترتیبوو

د تحول ساحه یې: $30 - 5 = 25$

ددې عددونو میانه $Q_2 = 15$ ده.

$$Q_1 = \frac{11+12}{2} = \frac{23}{2} = 11.5$$

$$Q_3 = \frac{16+17}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$$

$Q = Q_3 - Q_1 = 16.5 - 11.5 = 5$

او موډ یې هم د 15 عدد دی.

2- دلاندې دیتا د تحول ساحه او د څلورمو انحراف پیدا او د لومړی پوښتنې د چارکونو د انحراف سره یې پرتله کړئ.

27 24 21 29 28 26 23 22

حل: لومړی پورتني اطلاعات په صعودي ډول ترتیبوو:

$\underline{21\ \ 22\ \ 23}\ \ 24\ \ 26\ \ \underline{27\ \ 28\ \ 29}$

د تحول ساحه یې: $R = 29 - 21 = 8$

د چارکونو انحراف او یا ربعې انحراف:

$$Q_2 = \frac{24+26}{2} = 25$$
$$Q_1 = 22$$
$$Q_3 = 28$$
$$Q = Q_3 - Q_1 = 28 - 22 = 6$$

د لومړۍ پوښتنې ربعې انحراف (چارکونو انحراف) 5 او د دویمې پوښتنې 6 دی؛ نو د دویمې پوښتنې د اطلاعاتو تیت والی نسبت د لومړۍ پوښتنې اطلاعاتو ته زیات دی.

واریانس(variance)

د درسي کتاب (377)**مخ** **د لوست وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	• د راکړل شوي ډیټا د وریانس د پیداکولو طریقه زده کړي. • د دواړو فورمولونو په واسطه د راکړل شوي ډیټا واریانس پیداکړای شي. • وپوهیږي چې واریانس د تيت والی یو داسې معیار دی چې نظر ټولو اطلاعاتو ته حساس دی • د احصائیوي مسایلو په حلولو کې د واریانس له فرمول څخه استفاده وکړای شي.
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته ورودي پوښتنه له زده کوونکو وکړئ. د پوښتنې هدف دا دی که د ډنده (حوض) د ژوروالي حسابي اوسط معلوم وي. د مثال په ډول که د حوض د ژوروالي حسابي اوسط 1.5m وي او که پوه شو چې د ژوروالي تغیرات د حسابي اوسط په شاوخوا کې له 1.5m څخه زیات نه دی، نو په پوره ډاډ سره به په کې ولامبو، په دې شرط سره چې دا تغیرات له یو مناسب عددي معیار سره معرفي شوي وي چې دا مناسب عدد واریانس دی.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې:**

د (377) مخ فعالیت ښایي زده کوونکي حل نه کړای شي، محترم ښوونکي دې د فعالیت هدف زده کوونکو ته واضح کړي چې ددې حوض حسابي اوسط $2m = \frac{1.5m + 2.5m}{2}$ دی.

محترم ښوونکي دې له د زده کوونکو سره مرسته وکړي، تر څو دوی د واریانس د پیداکولو طریقه زده کړي. ضرور نه ده چې زده کوونکي د واریانس د فورمول ثبوتول زده کړي. که ښوونکي یې لازم ګڼي ثبوت دې شي، مثال دې د دواړو فورمولونو په واسطه د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل شي. که چیرې ډیټا په صنفونو کې ترتیب شوي وي، نو د واریانس د پیداکولو فورمول یې په درسي کتاب کې د اضافي معلوماتو لپاره ورکړل شوي دي چې ددې لوست په اضافي معلوماتو کې یو مثال هم ددې فورمول په واسطه حل شوي دي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې:**

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره دا پوښتنه حل کړئ.

د 1,2,3,4,5, طبیعي عددونو واریانس پیداکړئ.

$\overline{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$ $\sigma^2 = \frac{1}{5}[4+1+0+1+4] = \frac{10}{5} = 2$

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

د ارزونې لپاره لاندې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د هغه ساعتونو شمیر چې په یوه هفته کې 4 محصلینو په کتابخانه کې د مطالعې لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول دی. ددې *data* واریانس پیدا کړئ.

1,5,7,9

حل: $\bar{x}=\frac{1+5+7+9}{4}=5.5$ او له اوسط څخه انحراف یې (3.5 , 1.5 , -0.5 , -4.5) دی.

له اوسط څخه د انحرافونو مجذور $=20.25, 0.25, 2.25, 12.25$

له اوسط څخه د انحرافونو د مجذور اوسط $=\sigma^2=\frac{20.25+0.25+2.25+12.25}{4}=\frac{35}{4}=8.75$

وریانس $\Rightarrow \sigma^2=8.75$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

ددې لپاره چې د تیتوالی معیار نظر ټولو اطلاعاتو ته حساس وي، باید د تیت والی په معیار کې له ټولو اطلاعاتو څخه استفاده وشي. ددې کار لپاره د هر عدد توپیر له یوه ثابت مقدار څخه محاسبه کوو او مجموعه یې په لاس راوړو، ددې لپاره چې دا کار یو نواخت وي، نو د هر یوه عدد د تفریق حاصل له حسابي اوسط څخه محاسبه کیږي. په دې معنا که هره *data* عبارت له x_i څخه وي، نو $x_i-\bar{x}$ له حسابي اوسط څخه د i – ام (*data*) انحراف دی.

څرنګه چې د اوسط له خصوصیاتو څخه پوهیږو چې $\sum(x_i-\bar{x})=0$ دی د صفر کېدو دلیل یې دا دی چې ځینې *data* له اوسط څخه لوی او ځینې بیا له اوسط څخه کوچنی وي، یا په بل عبارت ځینې انحرافونه مثبت او ځینې یې منفي وي. چې د هغوی مجموعې یو بل سره خنثی کوي.

ددې ستونزې له منځ وړلو لپاره له مطلقه قیمت څخه کار اخیستل کیږي یعنې د

$(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+(x_3-\bar{x})+\ldots+(x_n-\bar{x})$

پر ځای د

$|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\ldots+|x_n-\bar{x}|=\sum|x_i-\bar{x}|$

څخه کار اخیستل کیږي.

ښکاره خبره ده په هره اندازه چې دا مقدار زیات وي، تیت والی زیات دی، په هره اندازه چې کم وي، تیت والې یې کم دی که پورتني مقدار صفر وي، نو ټول اطلاعات سره مساوي دي، بیا هم مشکل پاتې کیږي او هغه مشکل دا دی چې که د نمونې اندازه زیاته شي یا نورې دیتاوې علاوه شي نو پورتنی مجموعه زیاتیږي، ایا دا به صحیح خبره وي چې د *data* په زیاتوالي سره تیت والی هم زیات شي؟

پام مو وي چې تیت والی د احصائیوي جامعې ذاتي خاصت دی او په کارنه ده چې د *data* په زیاتوالي یا کموالي سره لږ او زیات شي، نو د دې لپاره چې د *data* د شمېر تاثیر له منځه یوسو، نو پورتني مجموعه *data* په (n) وېشو او $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i-\bar{x}|)$ چې له اوسط څخه انحراف (وسطي انحراف) دی او کولای شو پر ځای یې $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ په نظر کې

ونیسو، نو د تیت والي معیار چې واریانس نومیږي په لاندې ډول لاس ته راځي چې په (σ^2) یا S^2 سره ښودل کیږي.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$$

یاپه بل عبارت واریانس د مجذورونو اوسط دی له حسابي اوسط څخه او یا د مقدارونو د انحرافونو د مربعګانو اوسط د واریانس په نامه یادیږي چې په احصائیه کې د تیت والي د معیار په حیث مروج دی.

- پام مو وي چې که له هرې $data$ سره یو ثابت عدد جمع او یا یې ترې تفریق کړو، د واریانس په مقدار کې تغیر نه راځي. او که هره $data$ د k له یو ثابت عدد سره ضرب شي، واریانس په k^2 کې ضربیږي.

لاندې مثالونه ددې مفهوم ښکارندوي دي.

مثال1: د 105 , 104 , 103 , 102 , 101 واریانس پیدا کړئ.

له هر عدد څخه 100 تفریقوو لرو چې:

1,2,3,4,5

$$\overline{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$S^2 = \frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

2مثال: که د $x_1, x_2 \ldots x_n$ د 5 واریانس عد وي، د $-x_1+5, -x_2+5, \ldots -x_n+5$ واریانس پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د 5 عدد ورسره جمع شوي دي. په واریانس کې تغیر نه راځي. څرنګه چې هره $data$ په (-1) کې ضرب شوې ده، نو واریانس په $(-1)^2$ کې ضربیږي.

$$S^2 = (-1)^2 \cdot 5 = 5$$

نوټ: که $data$ په صنفونو وېشل شوي وي واریانس له لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{\sum f_i(x_i-\overline{x})^2}{n} = \frac{\sum f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum f_i}$$

3مثال: د لاندې جدول واریانس پیدا کړئ.

x_i	2	4	6
f_i	2	4	2

$$\overline{x} = \frac{2\cdot 2+4\cdot 4+2\cdot 6}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

$$S^2 = \frac{2(2-4)^2+4(4-4)^2+2(6-4)^2}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

کولای شو چې واریانس له $S^2 = \frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n}$ یا د $S^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\frac{\sum x_i}{n})^2$ او یا د $S^2 = \frac{1}{n}[x_1^2+\ldots x_n^2] - \overline{x}^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{x}^2$ فورمول په لاس راړو.

4مثال: 10 زده کوونکو د ریاضي په مضمون کې له 100 نمرو څخه لاندې نمرې اخیستنې دي، واریانس یې پیدا کړئ.

46 , 50 , 52 , 60 , 63 , 64 , 51 , 61 , 55 , 66

حل: لومړی یې $S^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n}$ له فرمول څخه واریانس پیدا کوو:

x_i	$x-\overline{x}$	$(x-\overline{x})^2$
46	−10.8	116.64
50	−6.8	46.42
52	−4.8	23.04
60	3.2	10.24
63	6.2	38.44
64	7.2	51.84
51	−5.8	33.64
61	4.2	17.64
55	−1.8	3.24
66	9.2	84.64
568	−	425.60

$\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{568}{10} = 56.8$ $S^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{425.60}{10} = 42.56$

اوس یې د $S^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\frac{\sum x_i}{n})^2$ له فورمول څخه په مستقیم ډول واریانس پیدا کوو:

x_i	$(x_i)^2$
46	2116
50	2500
52	2704
60	3600
63	3969
64	4096
51	2601
61	3721
55	3025
66	4356
مجموع 568	32688

$$S^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\frac{\sum x}{n})^2 = \frac{32688}{10} - (\frac{568}{10})^2 = 3268.80 - 3226.24$$

$$S^2 = 42.56$$

په پایله کې له دواړو فورمولونو څخه عین ځواب په لاس راځي.

د وریانس مربع جذر معیاري انحراف دی.

$$S = \sqrt{S^2}$$

مثال: که په پنځو مضمونونو کې احمد او محمود لاندې نمرې اخیستې وي د احمد او محمود د نمرو واریانس په لاندې ډول لاس ته راځي:

احمد	66	43	37	50	54
محمود	54	49	47	48	52

احمد:

$$\bar{x} = \frac{66+43+37+50+54}{5} = 50$$

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
66	16	256
43	-7	49
37	-13	169
50	0	0
54	-4	25
مجموع	0	490

$$\text{Variance}: \delta^2 = \frac{490}{5} = 98$$

$$\text{S.d}: \delta = \sqrt{98} = 9.9$$

محمود:

$$\bar{x} = \frac{54+49+47+48+52}{5} = 50$$

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
54	4	16
49	-1	1
47	-3	9
48	-2	4
52	2	4
مجموع	0	34

$$\text{Variance}: \delta^2 = \frac{34}{5} \approx 6.8$$

$\text{S.d}: S = \sqrt{6.8} = 2.6$ معياري انحراف

- د لاندې ډيټا واريانس د دواړو فورمولونو په واسطه پيدا کړئ.

1 5 6 7 9

$$\bar{x} = \frac{1+5+6+7+9}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$x_1^2 + \ldots x_5^2 = 1+25+36+49+81 = 192$$

$$S^2 = \frac{192}{5} - (5.6)^2 = 38.4 - 31.36 = 7.04$$

او يا په مستقيم ډول:

$$S^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5} = \frac{21.16+0.36+0.16+1.96+11.56}{5}$$

$$= 7.04$$

- ایا امکان لري چې د یوې دیتا واریانس صفر وي، که ځواب هو وي، د کوم شرط پر اساس امکان لري؟

ځواب: که دې یوې دیتا ټول عددونه سره مساوي وي، په دې صورت کې د دیتا واریانس صفر کیږي.

که له اطلاعاتو سره یو ثابت عدد جمع شي واریانس تغیر نه کوي، خو که اطلاعات د a په ثابت عدد کې ضرب شي په دې ډول چې عددله یوه څخه لوی وي اطلاعات لوېږي او په پایله کې تیت والی به یې زیاته شي او که $a > 1$ او مثبت وي اطلاعات به سره نژدې شي او په نتیجه کې واریانس به یې کوچنی شي او که $a < 0$ وي په تیت والی به همدا تاثیر لري.

د مثال په ډول: که دولت تصمیم ولري چې د دولت د هر کارکوونکي تنخوا 1000 افغانی زیاته شي، په پایله کې په واریانس کې تغیر نه راځي او که دولت تصمیم ونیسي چې د دولت د کارکوونکو تنخوا 10% زیاته شي، نو په دې صورت کې که د هر مامور معاش x_i وي، نو 10 فیصده یې $0.1x_i$ کیږي او له زیاتولای وروسته د مامور معاش $x_i = x_i + 0.1x_i = 1.1x_i$ څرنګه چې $(1.1)^2 = 1.21$ کیږي، نو دمعاش له زیاتوالی څخه وروسته د تنخوا واریانس په 1.21 کې ضربیږي یعنې د معاش تیت والی زیاتیږي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- د هغه ساعتونو شمیر چې په یوه اونۍ کې زده کوونکو د ورزش لپاره ټاکلی دی، په لاندې ډول دی.

3 2 1 4 3 2 2

ددې دیتا واریانس پیدا کړئ.

حل:

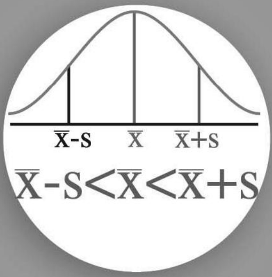
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \text{او یا :} \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\bar{x} = \frac{3+2+1+4+3+2+2}{7} = \frac{17}{7} = 2.428$$

$$S^2 = \frac{3^2+2^2+1^2+4^4+3^2+2^2+2^2}{7} - (2.428)^2$$

$$S^2 = \frac{9+4+1+16+9+4+4}{7} - 5.895$$

$$S^2 = \frac{47}{7} - 5.895 = 0.819$$



معياري انحراف

(Standard deviation)

د درسي کتاب (381) **مخ** **د لوست وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي بايد: • د ورکړل شوي *data* د معياري انحراف د پيدا کولو طريقه زده کړي. • په دې وپوهيږي چې د واريانس مربع جذرله معياري انحراف څخه عبارت دی. • د راکړل شوي *data* معياري انحراف پيدا کړای شي. • د معياري انحراف او واريانس تر منځ په اړيکه وپوهيږي. • د احصائيوي مسايلو په حلولو کې له معياري انحراف څخه استفاده وکړای شي او په اهميت يې پوه شي.
د تدريس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	هغه منحني چې داړو خواو ته متناظر وي، د طبيعي منحني يا Narmal curve په نامه ياديږي چې د زنګ شکل يا (Bell shaped) لري. په نارمل منحني کې تيت والی داسې دی چې که S د احصائيوي جامعې معياري انحراف وي، نو د احصائيوي جامعې د افرادو تيتوالی په دې ډول دی، د مثال په ډول که حسابي اوسط $\overline{x}$ د 5 عدد او معياري انحراف S يې 2 وي، غواړو وپوهيږو چې څو فيصده اطلاعات د $(2+2{,}5-5)$ په فاصله کې يا په (3,7) کې واقع دي، د نارمل منحني په دې ساحه کې 68 فيصده ديټا واقع وي، ددې لوست په اضافي معلوماتو کې مثال حل شوي دی.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې:**

څرنګه چې له دې فعاليت سره زده کوونکي تر اوسه پورې نابلده دي، نو محترم ښوونکي دې له هغوی سره مرسته وکړي، لومړی جدول د تختې پر مخ وليکئ چې x_i يا هره *data* او $\overline{x}$ د *data* حسابي اوسط دی $(\frac{8+9+6+4+8}{5}=7)$

او $(x-\overline{x})$ له اوسط څخه د هرې *data* انحراف او $|x_i-\overline{x}|$ د انحراف مطلقه قيمت او $(x_i-\overline{x})^2$ له اوسط څخه د انحراف مربع ده.

ښکاره خبره ده چې کارخانې ته د توکو د فرمايشو د تسليمي دوخت اوسط 7 دی او د انحرافونو د مطلقه قيمت اوسط يا وسطي انحراف عبارت دی له $1.6=\frac{8}{5}=\frac{1+2+1+3+1}{5}$ او وريانس يې $3.2=\frac{16}{5}=\frac{1+4+1+9+1}{5}$ دی.

د واريانس مربع جذر يا معياري انحراف $1.78=\sqrt{3\cdot 2}$ دی.

څرنګه چې زده کوونکو د واريانس فورمول په مخکينی لوست کې زده کړی دی، نو د واريانس د فورمول مربع جذر

$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n}}$ له معیاري انحراف څخه عبارت دی.

زده کوونکي مجبور نه دی چې ثبوت يې زده کړي، دلته يوازې د اضافي معلوماتو په حیث راوړل شوي دی، د دې لوست مثال دزده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**:

د زده کړې د پیاوړیتا لپاره دا پوښتنه حل کړئ.

پوښتنه:- د 8 , 14 , 10 , 16 , 12 عددونو معیاري انحراف پیدا کړئ.

حل:

$$\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{60}{5} = 12$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{40}{5}} = \sqrt{8} = 2.83$$

x	$(x-\overline{x})$ (	$(x-\overline{x})^2$
12	0	0
16	4	16
10	-2	4
14	2	4
8	-4	16
60	0	40

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**:

په خپله خوښه په یوه روغتون کې د پنځو کسانو د کار ساعتونه په لاندې ډول راکړل شوي دي، ددې *data* معیاري انحراف پیدا کړئ.

1 3 4 5 6

$$\overline{x} = \frac{1+3+4+5+6}{5} = \frac{19}{5} = 3.8$$

$$S^2 = \frac{(-2.8)^2 + (-0.8)^2 + (0.2)^2 + (1.2)^2 (2.2)^2}{5} = 2.96$$

$$S = \sqrt{2.96} = 1.7$$

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

دا چې د وریانس واحد د متحول دمجذور واحدي دي، نو ستونزي پیدا کوي، د مثال په ډول کـه محمـود د خپـل ټولګي د زده کوونکو د تنې لوړوالی د (m) په واحد، احمـد د (cm) پـه واحـد انـدازه کـړي وي، پـه دې صـورت کـې د احمـد د انـدازه کولـو واریانس به نظر، د محمود اندازه کولو ته (10000) چنده وي، داسې ښکاري چې د احمد په اندازه کولـو کـې تیـت والـی زیـات دی. ددې لپاره چې دا توپیر له منځه ولاړ شي، کوښښ کیږي چې د واریـانس او حـسابي اوسـط پـه واحـد کـې دا عمـده تـوپیر د واریانس د جذر نیولو په واسطه له منځه ولاړ شي. د واریانس مربع جذر ته معیاري انحراف وایي، معیـاري انحـراف پـه σ او یـا S سره ښودل کیږي.

د معياري انحراف واحد د متغير له واحد څخه عبارت دی. $s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i-\overline{x})^2}$

-1 که ټولې $data$ سره مساوي وي، نو واريانس او معياري انحراف صفر کيږي او برعکس که واريانس او معياري انحراف صفر وي، ټول اطلاعات سره مساوي دي، د مثال په ډول د 20،20،20 عددونو معياري انحراف صفر دی.

-2 که له هرې $data$ سره يو عدد جمع او يا ترې تفريق شي، واريانس او معياري انحراف تغير نه کوي.

-3 که هره $data$ د k په يوه ثابت عدد کې ضرب شي، معياري انحراف د $|k|$ او واريانس په k^2 کې ضربيږي.

1مثال: که د (x,y,z) د $data$ معياري انحراف 5 وي.

a: د $(x+3,y+3,z+3)$ معياري انحراف پيدا کړئ.

b: د $(-3x+3,-3y+3,-3z+3)$ معياري انحراف پيدا کړئ.

ځواب:

a) د (3) د عدد په جمع کولو سره معياري انحراف تغير نه کوي، هماغه د (5) عدد دی

b) څرنگه چې هره $data$ په (-3) کې ضرب شوي ده، نو معياري انحراف يې: $s=|-3|\cdot 5=15$ کيږي.

2مثال: د $(2,6,10,14)$ عددونو معياري انحراف د $(1,3,5,7)$ د عددونو د معياري انحراف څو چنده دی؟

حل: څرنگه چې د $(2,6,10,14,)$ عددونه د $(1,3,5,7)$ د عددونو دوه چنده دي، نو معياري انحراف يې هم د $(1,3,5,7,)$ عددونو دوه چنده دي.

3مثال: که د $x_1,x_2,...x_n$ د عددونو واريانس د 5 عدد وي، د $-x_1+5,-x_2+5,...-x_n+5$ واريانس څو کيږي؟

حل: د 5 د عدد په جمع کولو سره واريانس تغير نه کوي، خو واريانس يې عبارت دی له:

$(-1)^2\cdot 5=5$

-4 د $(\overline{x}\pm s)$ يا د $\overline{x}-s<\overline{x}<\overline{x}+s$ په ساحه کې تقريباً 68.27 فيصده مشاهدې شاملې دي.

او د $(\overline{x}\pm 2S)$ په ساحه کې تقريباً 95.45 فيصده مشاهدې شاملې دي.

او د $(\overline{x}\pm 3S)$ په ساحه کې تقريباً 99.73 فيصده مشاهدې شاملې دي.

4 مثال: لاندې د 12 مختلفو ډولونو درمل وزن په گرام سره راکړل شوي دی.

a: حسابي اوسط و b: معياري انحراف يې پيدا کړئ.

c: د $(\overline{x}\pm s),(\overline{x}\pm 2s)$ او $(\overline{x}\pm 3s)$ په ساحو کې څو فيصده مشاهدې شاملې دي.

43,54,45,44,58,47,50,52,51,45,48,46

حل:

43,44,45,45,56,47,48,50,51,52,54,58

x	x^2
43	1849
54	2916
45	2025
44	1936
58	3364
47	2209
50	2500
52	2704
51	2601
45	2025
48	2304
46	2116
583	28549

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{583}{12} = 48.58$$

$$s \cdot D = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - (\frac{\sum x}{n})^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{28549}{12} - (\frac{583}{12})^2}$$

$$s = \sqrt{2379.08 - 2360.34}$$

$$s = \sqrt{18.74} \approx 4.33$$

په $(\bar{x} \pm s) = 48.58 \pm 4.33$ ساحه کې 52.91 او 44.25 ، نو په پایله کې په دې ساحه کې 8 ډوله درمل دي چې فیصدي یې عبارت ده له:

$$100 \cdot \frac{8}{12} = 66.66 \approx 67\%$$

په $(\bar{x} \pm 2S)$ ساحه کې

$$\bar{x} \pm 2S = 48.58 \pm 2(4.33)$$

39.92 و 57.24

په 11 ډوله درمل دي.

$$100 \cdot \frac{11}{12} = 91.66 \approx 92\%$$

په $(\bar{x} \pm 3S)$ په ساحه کې

$$(\bar{x} \pm 3S) = 48.58 \pm 3(4.33)$$

61.57 او 35.59 دي.

چې ټول درمل په دې ساحې کې شامل دي:

$$100 \cdot \frac{12}{12} = 100\%$$

5- که $(data)$ په صنفونو کې ترتیب شوي وي، نو معیاري انحراف یې د لاندې فورمول په واسطه پیدا کیږي:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

5مثال: د $\{6,6,4,6,4,2,8,8,8,2,2,6,6\}$ عددونو معیاري انحراف عبارت دی له:

x_i	f_i	$f_i x_i$	$\overline{x}$	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i (x_i - \overline{x})^2$
6	5	30	5.23	0.77	0.59	2.95
4	2	8	5.23	−1.23	1.51	3.02
2	3	6	5.23	−3.23	10.43	31.29
8	3	24	5.23	2.77	7.67	23.01

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum f_i (x_i - \overline{x})}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{13}(2.95 + 3.02 + 31.29 + 23.01)} = \sqrt{\frac{1}{13}(60.27)} = \sqrt{4.64}$$

$$s = 2.15$$

د پوښتنو ځوابونه:

-1 د پوهنې وزارت د څلورو تلویزیونونو پروګرامونو د ساعتونو شمېر په لاندې ډول راکړل شوي دي معیاري انحراف یې پیدا کړئ.

1 3 4 5

حل: څرنګه چې د واریانس مربع جذر معیاري انحراف دی، نو لومړی د پورتنی دیتا واریانس حسابوو.

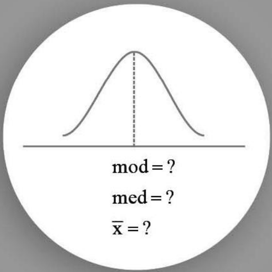
$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i^2}{4} - \overline{x}^2 \qquad \overline{x} = \frac{1+3+4+5}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$S^2 = \frac{1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2}{4} - (3.25)^2$$

$$S^2 = \frac{1+9+16+25}{4} - 10.56$$

$$S^2 = \frac{51}{4} - 10.56 = 12.75 - 10.56 = 2.19$$

معیاري انحراف $S = \sqrt{2 \cdot 19} = 1 \cdot 479$



د مرکزي معیارونو پرتله کول د نارمل منحني په واسطه

د درسي کتاب (371)مخ **د لوست وخت(1 درسي ساعت)**

د زده کړې موخې (پوهنیزې، مهارتي ، ذهنیتي)	زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • نارمل منحني وپېژني. • وپوهېږي چې نارمل منحني د مرکزي معیارونو (حسابي اوسط، میانه او موډ) د پرتله کولو لپاره استعمالیږي. • درک کړي چې نارمل منحني د میانې، حسابي اوسط او موډ موقعیت یو دی یا په بل عبارت تقریبا سره مساوي وي. ($mod = med = \bar{x}$)
د تدریس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) دقیقې	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته دې د ورودي برخې پوښتنه زده کوونکو ته توضیح شي چې په نارمل منحني کې $mod = med = \bar{x}$ دی او دا یو متناظر منحني دی.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) دقیقې:

ددې لوست فعالیت دې استاد کار کړي او زده کوونکو ته دې توضیح شي، څه وخت چې منحني متناظر نه وي، د ښي او کیڼې خوا تیت والي داسې دی چې که تیت والی ښي خواته وي، نو $mod < med < \bar{x}$ او که تیت والی کیڼې خواته وي نو $\bar{x} < med < mod$ وي.

له توضیح کولو وروسته دواړه مثالونه دې محترم ښوونکي د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړي.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

که د 16 د زده کوونکو د تنې لوړوالی د انچ پر حساب په لاندې ډول راکړل شوي وي:

64 , 67 , 62 , 66 , 63 , 64 , 63 , 69 , 63 , 65 , 67 , 71 , 65 , 64 , 72 , 66

ددې *data* حسابي اوسط او معیاري انحراف پیدا کړئ او هم ووایاست چې څو فیصده مشاهدې د $(\bar{x} \pm S)$, $(\bar{x} \pm 2S)$ او $(x \pm 3S)$ په ساحو کې شاملې دي.

حل: لومړی دیتا په صعودي ډول لیکو:

62 , 63 , 63 , 63 , 64 , 64 , 64 , 65 , 65 , 66 , 66 , 67 , 67 , 69 , 71 , 72

ځواب: $s = 2.82$ $\bar{x} = 65.69$

د $(\bar{x} \pm S)$ ، په ساحه کې 75% د $(\bar{x} \pm 2S)$ په ساحه کې ,93.75% او د $(\bar{x} \pm 3S)$ په ساحه کې ,100% مشاهدات دي.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

د ارزونې لپاره لاندې پوښتنې له زده کوونکو څخه وپوښتئ:

که د یوې ازموینې د نمرو توضیح تقریبا د نورمال په شکل وي که حسابي اوسط یې 650 او معیاري انحراف یې 100 وي:

a) د یوې تصادفي نمرې چانس د 450 او 850 ترمنځ څومره دی؟

b) له 1000 نمرو څخه څو نمرې به د 450 او 850 په منځ کې وي؟

حل:

a)

$\overline{x} = 650$ او $\sigma = 100$

$$650 - 2\sigma \le \overline{x} \le 650 + 2\sigma$$

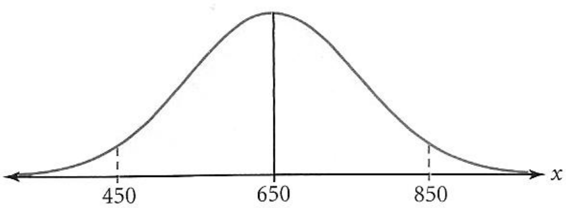
نو د 450 او 850 ترمنځ د یوې نمرې احتمال %95 دی.

b)

د %95 د 1000 مساوي دی په:

$$0.95 \cdot 1000 = 950$$

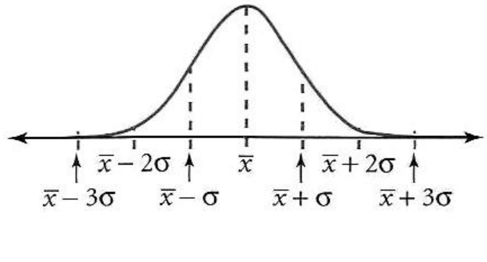
یعنې له 1000 نمرو څخه 950 نمرې د 450 او 850 ترمنځ واقع دي.



ښوونکي لپاره اضافي معلومات

1- نارمل توزیع (Normal Distributions): د دیتا متناظره توزیع ده، نسبت حسابي اوسط ته ($\overline{x}$) هغه منحني چې په هستوګرام (Histogram) کې د مستطیلنو د د تنصیف له ټکو څخه تیر شي چې دیتا په نارمل ډول توزیع شوي وي د نارمل منحني (Normal Curve) په نامه یادیږي چې نارمل منحني د حسابي اوسط او معیاري انحراف په واسطه تعریف کیږي.

یو معیاري نارمل منحني (Standard Normal Curve) داسې یو منحني دی چې حسابي اوسط یې صفر او معیاري انحراف یې 1 وي لاندې شکل وګورئ.



2- نارمل منحني د يو موډل په شکل قبوله شوي ده.

a) دنارمل منحني ګراف د رياضي يوه تابع ده او د تصادفي پېښو لپاره يو موډل دی.

b) دنارمل منحني ګانو شمېر زيات دي چې د اوسط او معياري انحراف په مشخصو قيمتونو سره ټاکل کيږي.

c) نارمل منحني متناظر شکل لري چې اعظمي لوړوالی يې په وسط کې قرار لري.

d) نارمل منحني يو متمادي (متصل) منحنی دی چې د x د هر قيمت لپاره د y يو قيمت لري.

e) د y قيمت هر وخت مثبت دی او د x قيمتونه يا مثبت يا منفي وي.

f) نارمل منحني د x محور قطع کولای نه شي، يا د x محور يې افقي مجانب دی.

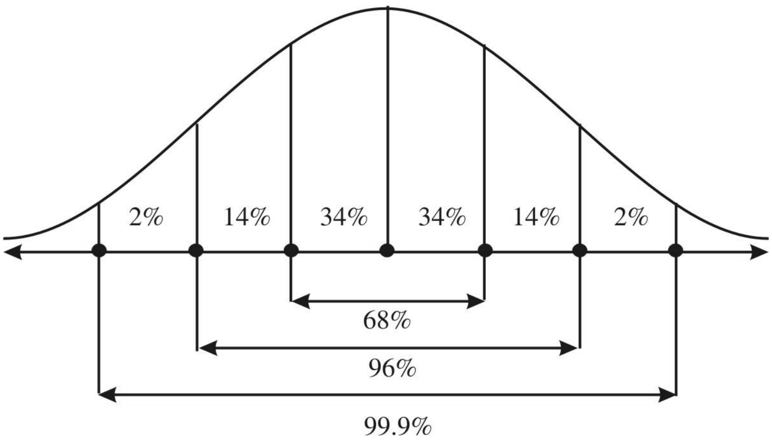
g) د نارمل منحني لاندې سطحه 1 واحد ده.

د مثال په ډول: که د $data$ حسابي اوسط 5 او معياري انحراف يې 2 وي

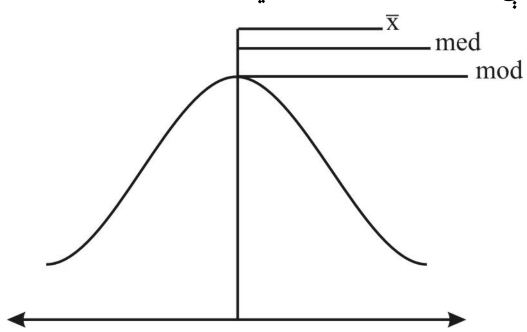
غواړو وپوهيږو چې څو فيصده ډيټا د $(2+5 , 2-5)$ يا $(\overline{x}-S,\overline{x}+S)$ په انټروال يا د $(3,7)$ په انټروال کې واقع ده. په لاندې منحني کې ښودل شوي ده چې 68% په دې انټروال کې واقع ده، همدارنګه د $(4+5 \ , \ 4-5)$ يا په $(\overline{x}-2S,\overline{x}+2S)$ او يا په $(1,9)$ ، 96% ډيټا واقع ده او بالاخره د $(5-3S \ , \ 5+3S)$ په انټروال کې تقريباً 100% ډيټا واقع ده.

دا مقدارونه پر منحني باندې تقريبي دي ددې مقدارونو محاسبه د معياري انحراف د لوست په اضافي معلوماتو کې په لاس راوړل شوي ده.

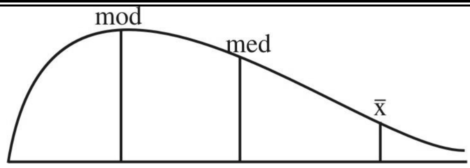
که S د واريانس جذر او يا معياري انحراف وي، د نارمل په توضيح کې د $\overline{x}\pm S$ په ساحه کې تقريباً 68.27% مشاهدات، د $\overline{x}\pm 2S$ په ساحه کې تقريباً 95.45% مشاهدات او د $\overline{x}\pm 3S$ په ساحه کې تقريباً 99.73% مشاهدات شامل دي.



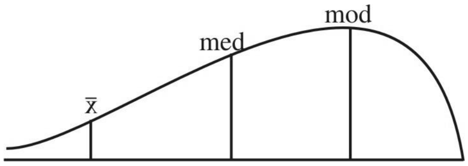
که منحني متناظر وي په دې صورت کې $\overline{x} = med = \text{mod}$ دي.



که تيت والي ښي خواته وي $\overline{x} > med > \text{mod}$ وي، لکه لاندې شکل:

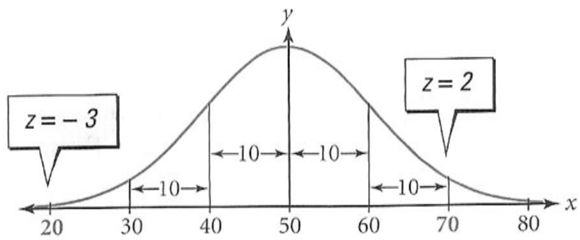


او که تیت والی کیڼې خواته وي $\bar{x} < med <$ mod

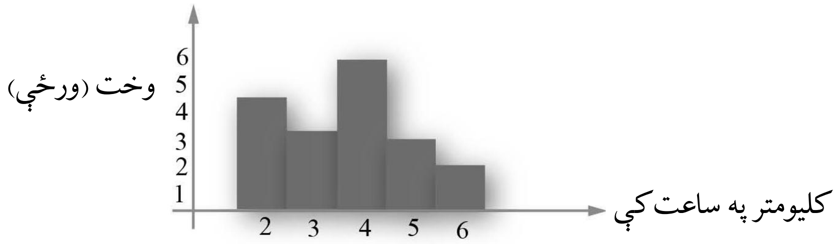


دZ نمرې (Z- scores) : یوه اندازه ده، که حسابي اوسط او معیاري انحراف معلوم وي، له حسابي اوسط څخه د نمرې فاصلې ښيي.

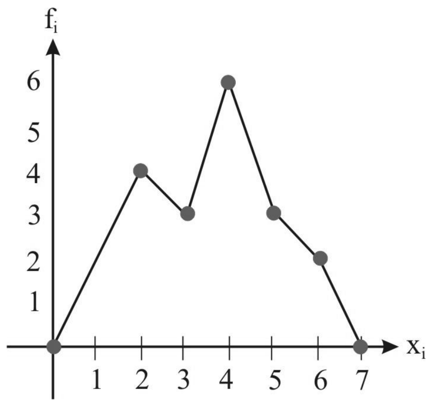
د مثال په ډول: که د یوې دیتا حسابي اوسط 50 او معیاري انحراف یې 10 وي، نو د 70 نمرې Z- scores د 2 عدد دی ځکه چې دا نمره د 2 واحدو په اندازه له اوسط څخه پورته واقع ده او د 20 د نمرې Z- scores 3 دی. په دې معنا چې دا نمره د 3 په اندازه له حسابي اوسط څخه لاندې واقع ده.



1- لاندې گراف د باد سرعت توزیع په 19 ورځو کې ښکاره کوي، په گراف کې د راکړل شوو معلوماتو پر بنسټ د باد سرعت لپاره د فریکونسیو څو ضلعي گراف رسم کړئ که چیرې یوې کښتۍ ته د حرکت ورکولو لپاره 5 کیلومتره په ساعت کې سرعت ته اړتیا وي، نو څو ورځې د کښتۍ د حرکت کولو لپاره مناسبې دي؟ په دې پوښتنه کې ولې د فریکونسیو د څو ضلعي گراف نظر مستطیلي گراف ته مناسب دی؟



حل:



له شکل څخه لیدل کیږي چې کښتۍ ته د حرکت ورکولو لپاره 5 ورځې مناسبې دي.

ددې *data* لپاره د فریکونسیو د څو ضلعي گراف مناسب دی، که چې پورتني او لاندیني سرحدونه یې معلوم نه دي او د صنفونو منځني ټکي په شکل کې راکړل شوي دي، نو له همدې سببه د فریکونسیو څو ضلعي گراف مناسب دی.

د دریم جز حل: د فریکونسو د څلور ځلعي گراف مناسب دی، ځکه چې پورتني او لاندیني سرحدونه یې معلوم نه دي او د صفنونو مرکزونه معلوم دي او د فریکونسي د څو ضلعي گراف د رسمولو لپاره د صنفونو منځني ټکې په کار دي.

2- فریکونسیو څو ضلعي گراف هغه گراف دی چې .... په افقي محور او......... د عمودي محور پر مخ ښودل کیږي.

الف) صنفونو مرکز- نسبي فریکونسي

ب) نسبي فریکونسي- د صنفونو مرکز

ج) د صنفونو حدود- مطلقه فریکونسي

د) د صنفونو مرکز – مطلقه فریکونسي

ځواب: د (د) جز سم دی.

3- د ساقې او پاڼې گراف راکړل شوي دي، له دې گراف څخه یې اړونده *data* ولیکئ:

ساقه	
1	0 3 3 4
2	0 2 4 8 8
3	2

ځواب:

10 13 13 14 20 22 24 28 28 32

4- کوم گراف ته د 90° په اندازه (د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف لورې کې) دوران ورکړو، تر څو میله یي گراف لاس ته راشي.

الف: د ساقې او پاڼې گراف

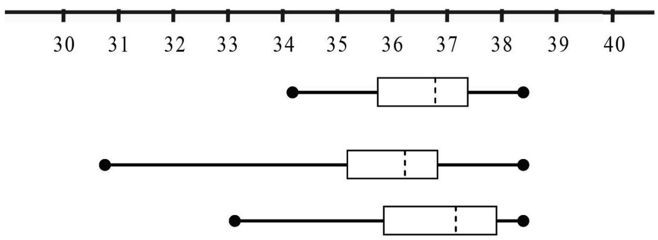
ب: مستطیلي گراف

ج: د فریکونسیو څو ضلعي گراف

د: دایروي گراف

حل: د الف جز سم دی.

5- لاندې گراف د الف، ب، او ج د درېو ټولگیو د ریاضي ازموینې نمرې ښکاره کوي، گراف ته په پاملرنې سره لاندې پوښتنه ځواب ورکړئ!



د الف صنف (A)

د ب صنف (B)

د ج صنف (C)

- دکوم ټولگي د تحول ساحه زیاته دی؟
- دکوم ټولگي د نمرو تیت والی تر ټولو زیات دی؟
- دکوم ټولگي د نمرو میانه تر ټولو زیاته ده؟ او دکوم ټولگي د نمرو میانه تر ټولو کوچنی ده؟
- دا درې تولگي، نمرو ته په پام سره چې په ازمونیه کې یې اخیستې دي له کمزورې څخه د قوي خواته ترتیب کړئ.

ځواب:

$R_A = 37.5 - 33 = 4.5$

$R_B = 37.5 - 30 = 7.5$

$R_C = 37.5 - 32 = 5.5$

- لیدل کیږي چې د ب د ټولگي د تحول ساحه تر ټولو زیاته ده.

- د ج ټولگي میانه له ټولو زیاته او د ب ټولگي میانه له ټولو کمه ده.

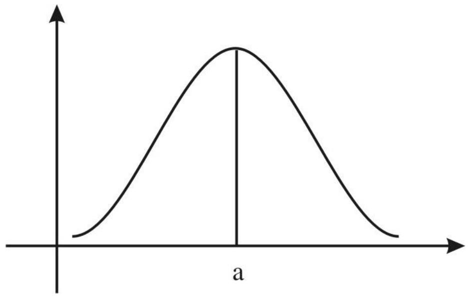
- د ب ټولگي تیت والی زیات دی.

- د ب ټولگي، د ج ټولگی، د الف ټولگی

الف =$\overline{x}$ 36.41

ب=$\overline{x}$ 34.94

ج=$\overline{x}$ 35.92



6- په ګراف کې د a مقدار عبارت دی له ؟

الف: میانه

ب: حسابي اوسط

ج: دریمه ربعه (چارک)

د: موډ

ځواب: څرنګه چې لیدل کیږي منحني متناظر دي، نو د a په نقطه کې حسابي اوسط میانه او موډ سره مساوي دي

7- د غذايي موادو د تولید دوې فابریکې د A او B په نامه د 48 ګرامو په قطعیو کې بسکیټ خرڅوي.

په تصادفي ډول د دواړو فابریکو د بسکیټ له قطعیو څخه 5 قطعی ټاکل شوي دي او په پوره غور سره یې وزنونه معلوم شوي دي چې په لاندې ډول دي .

$A: 48.08 \quad 48.32 \quad 47.96 \quad 47.84 \quad 47.96$

$B: 49.16 \quad 48.84 \quad 48.88 \quad 49.08 \quad 49$

- په قطعیو کې کومه فابریکه زیات بسکیټ خرڅوي؟ د پوښتنې د حل لپاره له کوم ټاکوونکي څخه استفاده کوي؟
- د بسکیټ په وېشولو کې کومې فابریکې یو شان عمل کړی دی؟

حل: د پوښتنې د حلولو لپاره د ساحې له تحول څخه استفاده کوو

$$R_A = 48.32 - 47.84 = 0.48$$
$$R_B = 49.16 - 48.84 = 0.32$$

- په B کې تیت والی نظر A ته کم دی

- په B کې نظر A ته ثبات زیات دی.

$$\overline{x}_A = \frac{48.08 + 48.32 + 47.96 + 47.84 + 47.96}{5} = \frac{24.16}{5} = 48.032$$

$$\overline{x}_B = \frac{49.16 + 48.84 + 48.88 + 49.08 + 49}{5} = \frac{244.96}{5} = 48.992$$

$$S = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + |x_3 - \overline{x}| + |x_4 - \overline{x}| + |x_5 - \overline{x}|}{n}$$

$$S_A = \frac{|48.08 - 48.032| + |48.32 - 48.032| + |47.96 - 48.032| + |47.84 - 48.032| + |47.96 - 48.032|}{5}$$

$$S_A = \frac{0.048 + 0.288 + 0.072 + 0.192 + 0.072}{5} = 0.1344$$

$$S_B = \frac{|49.16 - 48.992| + |48.84 - 48.992| + |48.88 - 48.992| + |49.08 - 48.992| + |49 - 48.992|}{5}$$

$$S_B = \frac{0.168 + 0.152 + 0.112 + 0.088 + 0.008}{5} = 0.1056$$

د B کارخانې د بسکیتو په توزیع کې یو شان عمل کړي دي.

8- که د ډیټا د تحول ساحه صفر وي، د دیتا په برخه کې څه نتیجه اخلئ؟

حل: ټول اطلاعات سره مساوي دي.

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$$

9- د هغو ساعتونو شمیر چې زده کوونکو په یوه اونۍ کې د ورزش کولو لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي:

1 5 7 9

ددې ډیټا واریانس پیدا کړئ.

حل:

$$\overline{X} = \frac{1+5+7+9}{4} = \frac{22}{4} = 5.5$$

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

$$S^2 = \frac{(1-5.5)^2 + (5-5.5)^2 + (7-5.5)^2 + (9-5.5)^2}{4} = \frac{(-4.5)^2 + (-0.5)^2 + (1.5)^2 + (3.5)^2}{4}$$

$$= \frac{20.25 + 0.25 + 2.25 + 12.25}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = 8.75$$

10- په لاندې جدول کې واریانس پیدا کړئ.

xi	25	35	45
fi	10	25	15

حل:

$$S^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum f_i}$$

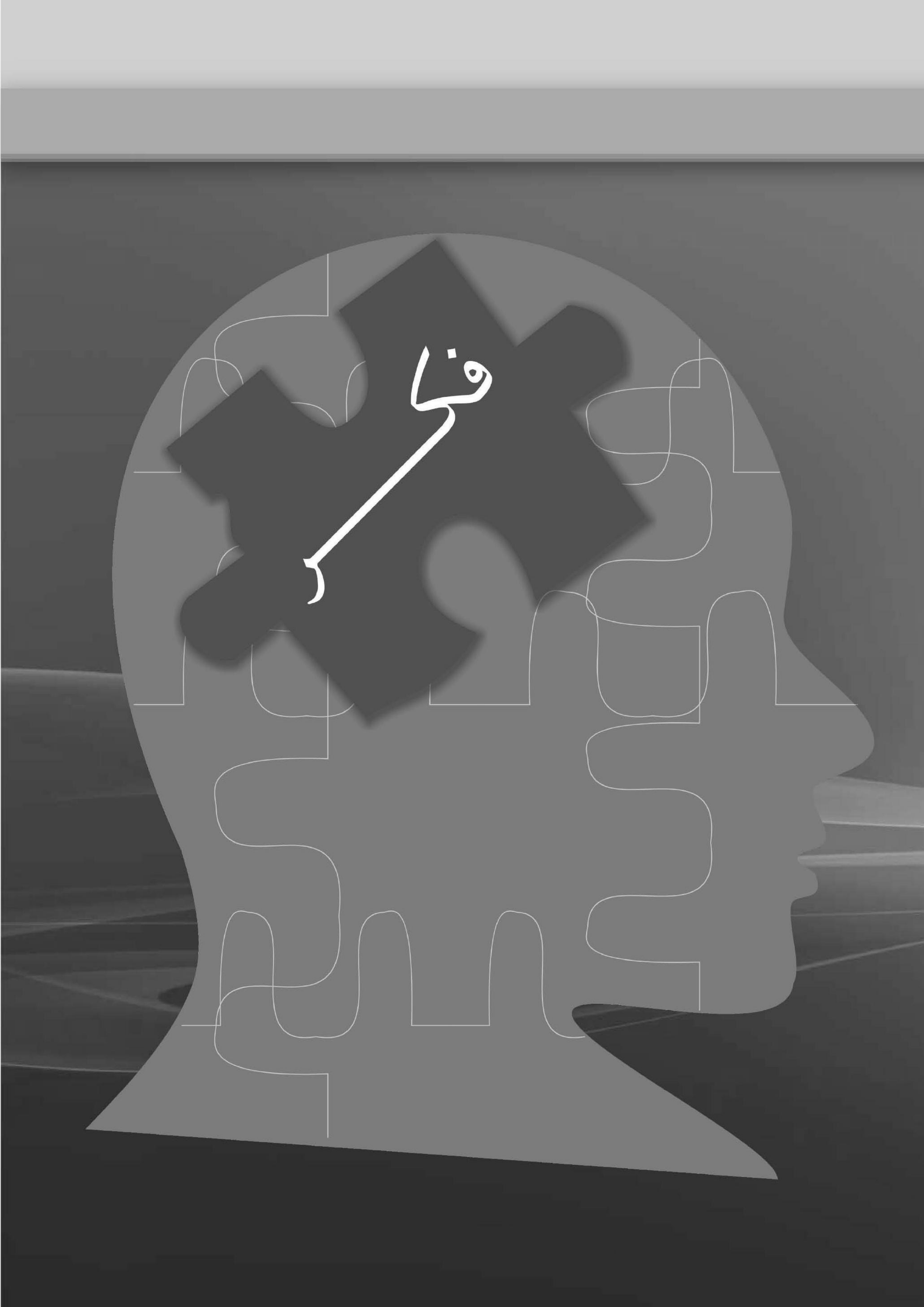
$$\overline{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{250 + 875 + 675}{50} = \frac{1800}{50} = 36$$

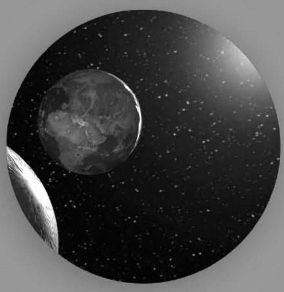
$$S^2 = \frac{10(25-36)^2 + 25(35-36)^2 + 15(45-36)^2}{50}$$

$$S^2 = \frac{1210 + 25 + 1215}{50} = \frac{2450}{50} = 49$$

نهم څپرکی

د رياضي منطق


فكر



د شهودي درک استدلال

د درسي کتاب: (391) مخ   **د لوست وخت:** (1 درسي ساعت)

د زده‌کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	• وپوهيږي چې شهودي درک کولای شي يوه طبيعي پوهه يا له استدلاله پرته احساس وي. • په دې پوه شي، کومه پايله چې د شهودې درک په واسطه منځته راځي په ډاډ سره نشو ويلای چې سل په سلو کې سمه ده. • وپوهيږي چې انسان د مجردو مفهومونو د سموالي او د زړه د ډاډ لپاره شهودي او تجربي درک ته اړ دی. • په دې پوه شي چې له شهودي درک څخه نتيجه اخيستنه کيدای شي د صحيحو حکمونو او قضيو بنسټ وي، همدارنګه د مسلئې د حل لپاره د هلو ځلو او د انګيزې پيداکولو سبب دی.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخـــې توضـــيح (5) دقيقې	له لومړينو فعاليتونو څخه وروسته دې ورودې پوښتنه توضيح شي. تر ډيرو پيړيو پورې انسانانو باور کاوه چې ځمکه هواره او ستورې يې پرشاوخوا څرخې. هغوی دا خبره نه منله چې ځمکه ګرده ده او د لمر پرشاوخوا څرخي، حال دا چې نن ورځ هر څوک دانظر تائيد وي، خو د هغه زماني د خلکو له شهود سره برابره نه وه.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې:**

د شهوي درک له تعريفولو څخه وروسته دې زده‌کوونکي ددې لوست فعاليت سرته ورسوي، خو څرنګه چې زده‌کوونکي ددې موضوع سره بلد نه دي، محترم استاد دې مرسته او لارښوونه ورته وکړي، نتيجه دې زده‌کوونکو ته توضيح کړي، چې په ډير برخو کې شهودي درک له موږ سره مرسته‌کوي، چې د رياضي په مفهومونو ښه پوه شو، د مختلفو برخو د ثبوت لپاره ښه حدسونه (اټکلونه) ووهو، داسې اټکلونه لږ او ډير احتمال لرونکي او د موقت استدلال په شکل په موږ کې قناعت پيداکوي چې د يو حتمي استد لال لپاره هڅه وکړو.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) دقیقې:

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره ددې لوست لومړی پوښتنه حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) دقیقې:

د ارزونې لپاره دویمه پوښتنه له زده کوونکو وپوښتنئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

وَإِذْ قَالَ إِبْرَاهِيمُ رَبِّ أَرِنِي كَيْفَ تُحْيِي الْمَوْتَى قَالَ أَوَلَمْ تُؤْمِن قَالَ بَلَى وَلَكِن لِّيَطْمَئِنَّ قَلْبِي قَالَ فَخُذْ أَرْبَعَةً مِّنَ الطَّيْرِ فَصُرْهُنَّ إِلَيْكَ ثُمَّ اجْعَلْ عَلَى كُلِّ جَبَلٍ مِّنْهُنَّ جُزْءًا ثُمَّ ادْعُهُنَّ يَأْتِينَكَ سَعْيًا وَاعْلَمْ أَنَّ اللَّهَ عَزِيزٌ حَكِيمٌ ﴿260﴾ بقره

څه وخت چې ابراهیم (ع) وویل زما څښتنه ماته وښایه چې مړي په څه ډول ژوندي کوي، ویې فرمایل ایمان نه لري؟ ویې ویل ایمان خو لرم، د زړه ډاډ غواړم، ورته ویې فرمایل ((چې څلور ډوله مرغۍ راواخله ټوټې ټوټې یې کړه او سره ګډ یې کړه، بیا هره ټوټه په هر غره باندې کېږده، بیا دا مرغان ځانته راوغواړه، ډېر ژر به ستا خواته راشي او په دې ښه پوه شه، چې خدا لوی واکمن او د حکمت څښتن دی)) ﴿260﴾ بقره

پولیا وایې: (چې ریاضي دوه اړخه لري. چې یو یې شهودي او تجروبې جوړښت او بل یې مجرد جوړښت دی.)

زده کوونکي د ثبوتونو د درک کولو، منلو او د ریاضي د یو مفهوم په سموالي د ډاډ پیداکولو لپاره د شهودو تقویه کولو او د تجربې او ازمېښت له لارې استد لال رسیدلو ته اړتیا لري، تر څو داسې زمینه برابره شي چې مجرد درک صورت ونیسي.

په دې برخه کې پولیا وایې: کوښښ وکړئ هغه څه چې شهودي درته ښکاري په رسمي ډول یې په غور سره ثبوت کړئ او هغه څه چې مو په رسمي او دقیق ډول ثبوت کړي دي، په شهودي ډول یې درک کړئ چې دا یو مغزي ورزش دی.

هدف دادی چې د یو شي په سموالي ډاډه کېدل یوه خبره ده او دا چې ولې دا شی سم دی، بله خبره ده، زموږ او ستاسو هدف هم ددې ولې له پوهېدو څخه دی. ارسطو د سلیم عقل (ذهني استدلال) پر اساس حکم کړی و چې د جسمونو د ازاد سقوط په وخت کې دروند جسم نظر سپک جسم ته ژرځمکې ته رارسیږي، تر څو چې تجربه او مشاهده شوي نه وه، نورو پوهانو هم د ارسطو د ناسم نظر څخه پیروي کوله. سلیم عقل (ذهني استدلال) او (دنني منطق) یوازې هغه وخت موږ ته د حقیقتونو د کشفولو لارښوونه کولای شي چې پر مشاهده او تجربه (په عمل یا ذهن کې) ولاړ وي هغه وخت نو کولای شوو چې د پوهې او ذهني استدلال په قوه پټې او نامعلومې رابطې (اړیکې) کشف کړو او د حقیقت اټکل وکړای شو، په طبیعي پوهه کې دا حدس (اټکل) د مشاهدې او تجربې په واسطه اود ریاضي په پوهه کې د منطقي استدلال په واسطه منل کیږي او یا ردیږي.

د پوښتنو ځوابونه:

1- د دوو نقطو تر منځ لنډه فاصله له يوه مستقيم خط څخه عبارت ده، ايا ددې مسلې درک کول يو شهودي درک دی، څرنګه استدلال کوئ؟

حل: د پورتنی مسلې درک کول يوه طبيعي پوهه او يا له استد لال پرته احساس دی.

2- له لاندې حکمونو څخه کوم يو يې د شهودي استدلال په طريقه د درک وړ دی؟

a : د يوې متوازي الاضلاع مقابلې زاويې سره مساوي دي.

b : د لوزي(معين) قطرونه يو پر بل عمود او يو بل نيمايې کوي.

c : په يوه قايم الزاويه مثلث کې وتر،له هرو دوو ضلعو څخه لوی دی .

حل: د (c)جز د شهودي درک په استدلال سره د درک وړ دي، خود a او bجزونه د ثبوت او استدلال څخه پرته نه درک کيږي.

تمثيلي يا قياسي استدلال

د درسي کتاب (393)مخ **د لوست وخت:** (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	ددې لوست په پای کې زده کوونکي باید: • په دې وپوهيږي چې تمثيل يوازې زموږ ذهن وينبوي اود مشاهدې او ازمېښت (تجربې) په يو څو حالتونو تکيه کوي. • پوه شي چې تمثيل د جزيې نتيجې اخيستل او يا يو مشابه والي بل مشابه والي ته نقلول دي. • وپوهيږي چې تمثيل (قياس) په حقيقت کې د بيلابيلو مفهومونو په منځ کې د يو شان والي (شباهت) پيداکول دي. • وپوهيږي سره له دې چې تمثيل يو څه محدويت لري، بيا هم کولای شي چې د رياضي د زياتو مفهومونو د درک کولو او ثبوتولو لپاره مرستندويه وي.
د تدريس لارې (میتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخـــې توضـيح (5) **دقيقې**	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته دې د وردې برخې پوښتنه توضيح شي چې مقصد د مشابهت پيداکول دي. چې هغه د چرګې هګۍ ده.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**:

محترم استاد دې تمثيلي استد لال تعريف کړي او ددې لوست فعاليت دې زده کوونکي په مناسبونو ګروپونوکې سرته ورسوي او استاد دې ورسره مرسته او لارښوونه ورته وکړي، لومړی او دويم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**:

د زده کړې د پياوړتيا لپاره محترم استاد کولای شي د لاندې مثال په شان يو مثال زده کوونکو ته حل کړي که

m او n طبيعي عددونه وي نو: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

او دا حالت په هغه صورت کې چې mاو n طبيعي عددونه نه وي هم کاروي. $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5}$

چې دا ډول استد لال، تمثيلي استد لال دی.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې:**

د ارزونې لپاره ددې لوست لومړی پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

تمیثل (Analogies)   قیاس (deduction)

د ورځنې ژوند په زياتو کارونوکې له سطحې نتيجې اخيستنې څخه تر عمده او علمي موفقيتونو او يا هنري کارونو پورې له تمثيل اويا قياس څخه استفاده کوو. تمثيل يا قياس د مختلفو مفهومونو تر منځ د يوشان والی پيداکول دي چې په ټولو مختلفو سطحوکې د استفادې وړ دی. د تمثيل مختلف ډولونه کولای شي چې د رياضي د زياتو مفهومونو د درک کولو او ثبتولو لپاره د شهودي زمينې د پيداکولو موثره مرستندويه طريقه وي. تمثيلي استدلال ته ځينې خلک د ماشومانو استد لال وايي، خو علمي نوم يې تمثيل او تمثيلي استد لال دی، فقهيان تمثيل ته ((فقهي قياس)) وايي، خو دلته قياس په هغه معنا نه دی چې په منطق کې په کار وړل کيږي (د يو عام حکم په اساس قضاوت کول) بلکې د شباهت په معنا دي يعنې هدف منطقي قياس نه دی. قياس د مشابه والي او تمثيل په معنا په کارول کيږي. د مثال په ډول ((قياس په نفس)) يا هر څه چې په خپل ځان کې ويني، نورو ته يې هم نسبت ورکړئ، يا پنځه ګوتې سره برابرې نه دي. د انسانانو د حقونو له نابرابروالي سره شباهت ورکوي چې په حقيقت کې له تمثيلي استدلال څخه استفاده شوي ده.

نشو کولای چې تمثيل د رياضي د استدال پر ځای(چې په منطق کې ورته قياسي استد لال وايې) په کار يو سو، د تمثيل په واسطه يوازې حدس (اټکل) وهلي شو چې د احدس امکان لري په عمل کې سم او يا ناسم وي، يوازې قياسي استدلال دی چې د څومره او ولی پوښتنې ځوابوي يا تمثيل کولای شي د څيړنې لپاره يوه انګيزه وي. تمثيل په يو خاص حالت کې د يوې نتيجې پيژندل دي د بل خاص حالت لپاره.

قياس د يو کلُي قانون يوجزيي حالت ته نقلول دی يا داسې يوه نتيجه چې په عمومي حالت کې ثبوت شوي وي، په يوه خاص حالت کې يې منل دي يا د رياضي د قياسي استد لال خاصيت له کل څخه وجز ته تلل دي.

پوښتنه پيداکيږي دا چې رياضي په قياسي استد لال تکيه لري؟ ايا رياضي يوه يقيني، بې تغيره او په خپل قانون کې تکامل نه منوونکي پوهه ده ؟

داسمه ده چې راضي منطقي، استنتاجي او يا په اصلاح کې قياسي پوهه ده. خو بايد هېر نه کړو چې د رياضي د مفهومونو اساس او قانونونه په مشاهدو، ازميښتونو او عمل باندې ولاړ دي.

د رياضي هره څانګه په تعريفونو او موضوعه اصولو باندې تکيه لري. استد لال نه شو کولای چې له هيڅ څخه يې شروع کړو. استد لال يو ډول تکيه ځای لري چې ټولو ته د منلو وړ وي او په رياضياتو کې دا تکيه ځای هماغه موضوعه اصول دي، چې

ثبوتولوته اړتيا نه لري او سموالي يې ټولو منلي وي اود وخت په تيريدو سره يې پخواني اصول ښايې اصلاح شي، نو په اخير نې تحليل کې رياضيات هم د هرې بلې پوهې په شان له طبيعته راپورته شوي دي او د طبيعت د قوانينو د رازونو په پيژندلو سره تکاملي تغير لري او مخکنيو قوانينو او رابطو ته عموميت ورکوي يا رياضيات هم د هرې بلې پوهې په شان ژوندې پوهه ده. لکه څرنګه چې هر ژوندي موجود هيڅکله هم پر خپل ځای نه دريږي او کولای شي تر يوه حده مخکې ولاړشي چې د نن ورځې انسان يې په ذهن کې تصور هم نه شي کولای.

د پوښتنو حل:

1- دابيان چې (بختور کال د کال له پسرلي څخه معلوميږي) په لاندې کوم استدلال باندې دلالت کوي؟

a: د شهودي درک استدلال

b: قياسي استدلال

c: هيڅ ډول استدلال په کې نشته

حل: د b جز سم دی.

2- د قياسي استدلال په مرسته په کوم مثلث کې د فيثاغورث د قضيې په اساس لاندې نتيجه ثبوتيدلای شئ؟

$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$ (په قايمه زاويه مثلث کې)



استقرايي استدلال

د درسي کتاب (395)مخ **د لوست وخت**: (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي، ذهنيتي)	• وپوهېږي چې استقرايي استدلال له جز څخه وکل ته رسيدل دي. • په دې وپوهيږي چې په حقيقيت کې استقرايي استدلال د لوی نمونې په برخه کې د يوې کوچني نمونې يو خاصيت ته عموميت ورکول دي. • درک کړي چې استقرايي استدلال په مسايلو کې د عمومي قوانينو په لور موږ ته لارښوونه کوي. او په مشاهدو کې خطا د استقرايي استدلال له ستونزو څخه يوه ستونزه ده.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) دقيقې	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د ورودې برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ، که هغوی يې ځواب پيدانه کړای شو، تاسو ورسره مرسته وکړئ، تر څو سم ځواب پيداکړای شي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**:

د لوست فعاليت دې زده کوونکي په مناسبو ګروپونوکې سرته ورسوي او محترم استاد دې څارنه،لارښوونه او مرسته ورسره وکړي.

$1+3=4=2^2$

$1+3+5=9=3^2$

$1+3+5+7=16=4^2$

$1+3+5+9=25=5^2$

$1+3+5+...+n=n^2$

د فعاليت نتيجه دې زده کوونکو ته توضيح کړئ.

لومړی او دويم مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**:

ددې لوست دويمه پوښتنه حل کړئ چې ځواب يې په دې ډول دی:

$1\cdot 8+1=9$

$12\cdot 8+2=98$

$123\cdot 8+3=987$

$234\cdot 8+4=9876$

$12345\cdot 8+5=98765$

$123456\cdot 8+6=987654$

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې:**

ددې لوست لومړی پوښتنه له زده کوونکو وپوښتئ

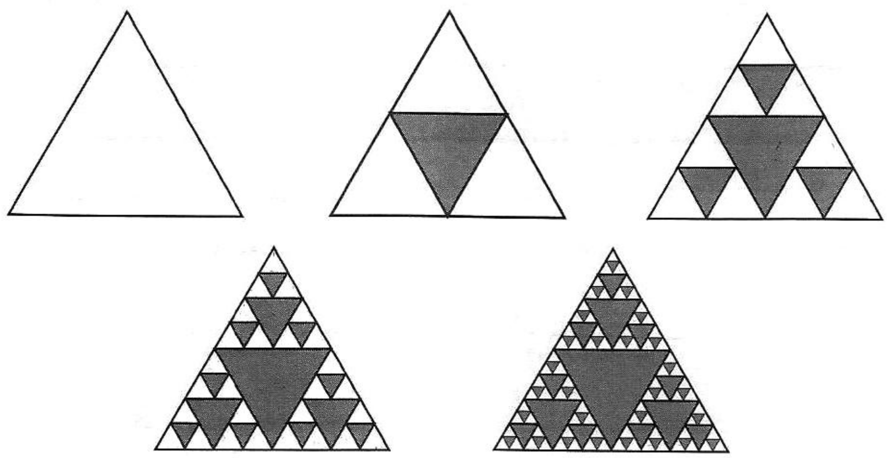
د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

څه وخت چې يو ناروغ ډاکټر ته مراجعه وکړي . ډاکټر د خپلې تجربې له مخې د ناروغۍ د ډول په برخه کې ګمان (حدس) کوي، چې په دې وخت کې ډاکټر يوازې په خپل تجروبوي احساس باندې اتکا نه کوي او د زياتو ازميښتونو په سرته رسولو اود مختلفو علامو د مشاهدو په اساس د ناروغۍ د ډول او د تداوۍ په برخه کې خپل اخرنۍ تصميم نيسي. په دې ډول ډاکټر د لابراتواري معاينو له مشاهدو، د معلوماتو د جمع کولو، اندازه کولو او د دوي په منځ کې دنظم په اساس ناروغي تشخيصوي. په طبي مسايلو او تجربوي علومو کې استد لال، استقرايي استدلال دی. په رياضي کې هم د مسلو د حل لپاره د يوې ښې طريقې په حيث له استقرايي استد لال څخه استفاده کيږي. په دې طريقه کې لومړی حدس وهو، بيا خپل حدسونه دقيق کوو، په پای کې د سموالي په اړوند حکم کوو.

مثال: يو متساوي الاضلاع مثلث د شکل په شان په پام کې ونيسي.

a) د مثلث د ضلعو نيمايي ټکي، لکه څنګه چې په شکل ښودل شوي دی، سره ونښلوئ، درې مثلثونه چې په غاړو کې جوړيږي، په پام کې ونيسي او په تورولو سره ونښلوي.

b) درې مثلثونه چې په غاړو کې جوړيږي، په پام کې ونيسي او په تورولو سره منځني مثلث حذف کړئ دا کار په نوو دريو مثلثونو تکرار کړئ، په دې ډول (9) انطباق منوونکي مثلثونه جوړيږي.



1- د هغه نوو مثلثونو شمير چې له لومړی څخه تر څلورمی مرحلې پورې جوړ شوي دي وشمارئ او په لاندې جدول کې يې وليکئ.

n	…	2	1	0	مرحلې
				1	شمېر

د n -امی مرحلې د مثلثونو د شمير پيداکولو په برخه کې څه ويلای شئ، دا د استقرايي استد لال يو مثال دی.

- استقرايي استد لال له جزيي مفهومونو څخه کلي مفهومونو ته تلل دي، يا د ځينو مشاهدو په اساس کلي نتيجه د استقرايي استد لال په نامه ياديږي.

ساینس پوهان د طبیعت د قوانینو په کشفولو کې له دې طریقې څخه استفاده کوي او د ریاضي پوهان د قضیو د ثبوت کولو لپاره له دې طریقې څخه استفاده کوي، باید متوجه او سوچې د مشاهدو محدودیت او په مشاهدو کې خطا د استقرايي استدلال یوه ستونزه ده د مثال په ډول:

$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$
$14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$
$24 = 2^2 + 2^2 + 4^2$
$59 = 1^2 + 3^2 + 7^2$
$61 = 3^2 + 4^2 + 6^2$

ایا د استقرايي استدلال په مرسته نتیجه اخیستلای شئ چې هر طبیعي عدد، د طبیعي عددونو د کاملو مربعگانو د جمعې د حاصل په شکل لیکلای شو، څرنگه چې د 17,19,23 لومړني عددونه (Prime Numbers) نه شو کولای چې د طبیعي عدد د کاملو مربعگانو د جمعې د حاصل په شکل یې ولیکو، نو دانتیجه سمه نه ده. او دا د استقرايي استد لال یو محدودیت دی په دې معنا چې استقرايي استدلال نه شي کولای چې هر وخت سمه نتیجه وښیې، خو کولای شي چې د ریاضي د استقرا لپاره یوه ښه زمینه وي چې د ریاضي له مهمو استدلالونو څخه شمیرل کیږي.په تجربوي علومو کې دې ډول استد لال ته تجربوي یا علمي او په ریاضي کې ورته استقرايي استدلال وایي. په احصائیه کې نتیجه گیري کولای شو چې د استقرايي استدلال په مرسته د عمومیت ورکولو یوه نمونه وگڼو.
په حقیقت کې تمثیل د استقرا پیل دی چې تمثیلي استد لال د مشاهدو او ازمیښتونو په یوه یا څو حالتونو باندې تکیه کوي، خو استقرايي استد لال په تکراري مشاهدو او ازمیښتونو باندې تکیه لري.
په عمومي ډول استقرا د تجربو اود مشاهدو په تحلیل او پرتله کولو او له ازمیښتونو څخه راغلو، نتیجو سره پیلیږي، بیا نتیجه یا نتیجو څخه د نورو مشابه حوادثو په برخه کې حدس وهل کیږي او له مشاهدو او ازمېښتونو څخه وروسته استقرايي نتیجه په لاس راځي او قبلیږي چې دا نتیجه (رابطه، قاعده، قانون او ...) د ټولو مشابه حالتونو لپاره سمه ده.
همدادلیل دی چې نشو کولای ازمېښت د ټولو مشابه حوادثو یا پدیدو په برخه کې تحقیق کړو، نو دې ډول استقرا ته ناقصه استقرا او قبولې شوي نتیجې ته فرضیه وایي.

د پوښتنو حل:

1. هغه طریقه چې دیو محدود شمیر مشاهدو په اساس ترینه عمومي نتیجه اخیستل کیږي څرنگه استد لال دي؟

الف) قیاسي یا تمثیلي استد لال

ب) استقرايي استد لال

ج: د شهودي درک استدلال

حل: د b جز سم دی (استقرايي استد لال دی)

2. د عددونو ترتیب ته په پام سره لاندې خالي ځایونه ډک کړئ.

$1 \times 8 + 1 = 9$
$12 \times 8 + 2 = 98$
$123 \times 8 + 3 = 987$
$1234 \times 8 + 4 = 9876$

-3

a) د دویمې پوښتنې د حل په پام کې نیولو سره کیدای شي چې د عددونو پورتني ترتیب ته تر لایتناهي پورې دوام ورکړو.

حل: نه شو کولای چې لایتناهي پورې دوام ورکړو

b) د محاسبه کولو پرته اود پورتنیو پوښتنو په پاملرنې سره اټکل کړي چې کوم عددونه د لاندې پوښتنو په خالي ځایونو کې راتلای شي.

$12345 \times 8 + 5 = 98765$

$123456 \times 8 + 6 = 987654$



د رياضي د استقرا استدال

د درسي کتاب (397) **مخ** **د لوست وخت**: (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)	• پوه شي څه وخت چې له جزيي حکمونو څخه کلي حکمونو ته ورسيږو، د نتيجې اخيستلو دې طريقې ته استقرا وايي، کيداى شي، موږ سمې او يا ناسمې نتيجې ته ورسوي. • زده کړي چې که يو بيان د n=1 لپاره سم وي او ددې په فرضولو سره چې د n=k لپاره سم دى اود n=k+1 لپاره يې ثبوت کړاى شو، نو دا بيانيه د هر طبيعي عدد لپاره سمه ده چې دې طريقې ته د رياضي استقرا وايې. • د رياضي د استقرا اهميت درک کړي چې د رياضي استقرا د يوې مجموعې د ټولو غړو لپاره يو عمومي خصوصيت دي.
د تدريس لارې (ميتودونه)	پوښتنې او ځوابونه، بحث کول، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخـــې توضـيح (5) **دقيقې**	له لومړينو فعاليتونو څخه وروسته ددومينو لوبه دې زده کوونکو ته وروپيژندل شي، هدف دادي چې که يوه رابطه د n=1 لپاره سمه وي، فرض کړو چې د n=k لپاره سمه ده اود n=k+1 لپاره يې سموالي ثابت کړاى شو، په حقيقت کې دې طريقې ته د رياضي استقرا وايې.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**:

ددې لوست فعاليت دې زده کوونکي په مناسبو ګروپونو کې سرته ورسوي او محترم استاد دې مرسته ورسره وکړي چې حل يې په لاندې ډول دى.

د عددونو مجموعي مربع	د مکعبونو مجموعه	د پرله پسې عددونو مکعب
1^2	1	1^3
3^2	9	1^3+2^3
6^2	36	$1^3+2^3+3^3$
10^2	100	$1^3+2^3+3^3+4^3$
15^2	225	$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$

چې نتيجه يې داده:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

د پرله پسې متوالي طبيعي عددونو د مکعباتو مجموعه د عددونو د مربعاتو له مجموعې سره مساوي ده، محترم استاد دې دا خبره توضيح کړي چې يوازې د پورتنې جدول په قيمتونو سره نتيجه اخيستنه نه پوره کيږي، تر څو چې د استقرا په طريقه ثبوت نه شي، نو استاد دې د n=k+1 لپاره فورمول ثبوت کړي چې ثبوت يې په دې ډول دی:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots I$$

ايا د $(n+1)$ مسلسل عدد لپاره سمه ده؟ يا

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^2=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 \ldots\ldots\ldots\ldots II$$

رابطه صدق کوي؟

که اوله رابطه له دويمې رابطې څخه تفريق شي، نو لرو چې:

$$(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2-\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=(\frac{n+1}{2})^2[(n+2)^2-n^2]=\frac{(n+1)^2}{4}[n^2+4n+4-n^2]$$

$$=\frac{(n+1)^2}{4}[4n+4]=\frac{(n+1)^2}{4}(n+1)4=(n+1)^3$$

ويلای شو چې د III رابطې نتيجه له دويمې II رابطې سره معادله ده.

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^2=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

په نتيجه کې په ډاډ سره ويلای شو، چې د n پرله پسې طبيعي عددونو د مکعباتو مجموعه، د عددونو د مجموعې له مربع سره مساوي ده.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقيقې**:

لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره يې حل کړئ.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې**

د رياضي د استقرا مرحلې له زده کوونکو وپوښتنئ.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

حکمونه کيدای شي چې کلي اويا جزيې وي

د کلي حکمونو مثالونه:

- د هرې متوازي الاضلاع قطرونه يو بل سره نيمايي کوي.
- د هرعدد يو يز رقم چې صفر وي، پر 5 پوره د ويشلو وړ دی.

د پورتنيو حکمونو جزيې يا خاص حکمونه:

- د ABCD په متوازي الاضلاع کې قطرونه يو بل سره نيمايي کوي.
- د 140 عدد پر 5 د ويش وړ دی

له کلُي حکم څخه جز ئې حکم تللو ته قياس وايي.

څه وخت چې له جزئي حکمونو څخه کلي حکمونو ته ورسیږو د نتیجې اخیستلو دې طریقې ته استقرا وایي.

پوښتنه داده چې په ریاضي کې استقرا څرنګه په کار یوړل شي. تر څو سمه نتیجه په لاس راشي.

د مثال په ډول د $x^2 + x + 41$ دري حده په پام کې نیسو چې د لئونار د یولر هم ورته متوجه شوي وه که په دې دري حده کې $x = 0$ شي نو د 41 لومړني عدد لاسته راځي او که $x = 1$ شي نو بیا هم د 43 لومړني عدد لاسته راځي. که دې کار ته ادامه ورکړو اود x پرځای د 2،3،4،5،6،7،8،9 او 10 عددونه وضع کړو نو 47،53،61،71، 83،97، 113، 131 او 151 لومړني عددونه (Prime Numbers) راسته راځي.

اوس که حکم وشي چې په دی دري حده کې که هر صحیح عدد چې منفي نه وي وضع شي هر وخت لومړني عدد دي. حال داچې دا حکم سم نه دي نو نه سموالی یې چیرې دی؟ تر x = 39 پورې لومړني عدد دی خود $x = 40$ لپاره د $(41)^2$ عدد په لاس راځي چې لومړنی عدد نه دی یعنې $(41^2 + 40 + 41)$ پر 41 د ویش وړ دی.

یا د مثال په ډول د $A = 2^{2^n} + 1$ عدد په پام کې نیسو دا عدد د $n = 0,1,2,3,4$ لپاره په دې ډول دی.

$n = 0 \Rightarrow A = 2^{2^0} + 1 = 3$ $\quad$ $n = 1 \Rightarrow A = 2^{2^1} + 1 = 5$

$n = 2 \Rightarrow A = 2^{2^2} + 1 = 17$ $\quad$ $n = 3 \Rightarrow A = 2^{2^3} + 1 = 257$

$n = 4 \Rightarrow A = 2^{2^4} + 1 = 65537$

چې ټول لومړني عددونه دي په (17) پیړۍ کې فرانسوي ریاضي پوه فرما ګمان کاوه چې داعدد د n په هر قیمت لومړني عدد دی خو په (18) پیړۍ کې یو لر ثابته کړه چې دا عدد د n=5 لپاره لومړني عدد نه دی .

$n = 5 \Rightarrow A = 2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$ چې لومړنی عددونه ندي.

یا په (17) پیړۍ کې الماني ریاضي پوه(لیپ نیتز) ثابته کړه چې د n عدد هر صحیح قیمت لپاره $n^3 - n$ پر 3 او $n^5 - n$ پر 5 او $n^7 - n$ پر 7 د ویشلو قابلیت لري هغه ګمان کاوه چې د K د هر طاق عدد اود n د هر صحیح او مثبت قیمت لپاره د $n^k - n$ عدد پر K د ویشلو وړ دی خو پخپله متوجه شوه چې $2^9 - 2 = 510$ پر 9 د ویشلو وړ نه دي..

نتیجه: د ریاضي یو حکم کیدای شي په ډیرو خاصو قیمتونو کې سم وي خو په کلي ډول ناسم وي نو څرنګه کولای شوو چې مسایل د خاص استدلال په طریقه چې د ریاضي د استقرا یا (کاملي استقرا) په نامه مشهور دی حل کړو او څرنګه کولای شو چې دا حکم په کلي حالت کې تایید کړو ددې طریقی بنسټ د ریاضي د استقرا په اصل ولاړ دی چې دا اصل دارنګه دی.

د هر طبیعي عدد د nلپاره یو حکم هغه وخت سم دی چې:

1- د n=1 لپاره سم وي.

2- n=K د سموالی له منلو نتیجه شي چې د n=k+1 لپاره هم سم دی.

د مثال په ډول وښایاست چې:

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$s_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$s_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$s_3=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}=\frac{3}{4}$$

ددې په فرضولو چې پورتنۍ رابطه د n=k لپاره سمه ده یعنې

$$s_k=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

چې k یو اختیاري طبیعي عدد دی اوس ددې رابطې سموالي د n=k+1 لپاره څیړو یا په بل عبارت غواړو چې وښایو $s_{k+1}=\frac{k+1}{k+2}$ دی

په حقیقت کې $s_{k+1}=s_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ دی، نو لرو چې:

$$s_{k+1}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

اوس د استقرا د اصل په اساس حکم کولای شو چې د $s_n=\frac{n}{n+1}$ رابطه د ټولو طبیعي عددونو لپاره سمه ده، بیا هم متوجه اوسئ چې ټولې رابطې د ټولو طبیعي عددونو لپاره سمې نه وي.

د مثال په ډول

$17+2=19$

$19+4=23$

$23+6=29$

$29+8=37$

$37+10=47$

(17) له لومړني عدد څخه مو پیل کړی و، د 17 له عدد سره مود 2 جفت عدد جمع کړ، په نتیجه کې د (19) لومړنی عدد په لاس راغي، په همدې ډول مو له (19) سره دویم جفت عدد (4) جمع کړ، د (23) لومړنی عدد لاس ته راغی، د 23 عدد مو له دریم جفت عدد(6) سره جمع کړ، د (29) لومړنی عدد لاس ته راغي ایا له دې پنځو نتیجو څخه ویلای شو چې یو قانون مو کشف کړی دی؟ او ایا که دا طریقه تعقیب کړو هر وخت لومړني عدد په لاس راځي.

$47+12=59$

$59+14=73$

$73+16=89$

$89+18=107$

$107+20=127$

- بیا هم لیدل کیږي چې ټول لاس ته راغلي عددونه لومړني عددونه (Prime Numbers) دي.

$127+22=149$

$149+24=173$

$173+26=199$

$199+28=227$

$227+30=257$

خو په شپاړسم قدم کې صدق نه کوي $289=32+257$ چې 289 یو لومړنی عدد نه دی ځکه چې: $17\cdot17=289$ دی یو قانون نه دي، که دوام ورته ورکړو کله لومړنی اوکله مرکب عدد لاسته راځي.

$323+36=359$ (لومړنی عدد)

$289+34=323=17\cdot19$ (مرکب عدد)

$397+40=437=19\cdot23$ (مرکب عدد)

$359+38=397$ (لومړنی عدد)

$437+42=479$ (لومړنی عدد)

$479+44=523$ (لومړنی عدد)

زموږ حدس (ګمان) سم نه و، په دې برخه کې کلي قانون شتون نه لري. له پخوا زمانو راهیسې د استقرا نظریه موجوده وه او ګټه ترې اخیستل کیده، خو د استقرا په واسطه ثبوت د شپاړسمې پیړۍ په لومړیو وختو کې رواج وموند، خو په (17) پیړۍ کې مشهور ریاضي پوه فرما له استقرا څخه ګټه اخیسته طرح کړه، خو د (ریاضي استقرا) اصطلاح د (19) پیړۍ په لومړیو کې د انګلیسي ریاضي پوه دیمورګن له خوا وکارول شوه او د استقرا له طریقې څخه د ریاضي په ثبوتونو کې استفاده کېدله.

د استقرا عمومیت:

په دې مثالونو کې چې مو تر اوسه ولیدل د ریاضي استقرا مو له n=1 څخه پیل کوله، یا د مطلوب حکم سموالي مو د n=1 لپاره وښوده، خو ځینې وختونه لازمه وي چې داستقرا لومړنی مرحله له یوه طبیعي عدد $n>1$ څخه پیل کړو، د مثال په ډول $n!>3^n$ رابطې لپاره $n\geq7$ مناسب دی

ثابت کړئ چې د m یو مناسب عدد $m>1$ موجود دی چې د هر طبیعي عدد n لپاره د $(n\geq m)$ دا رابطه $n!>3^n$ صدق کړي.

حل: لومړی ځیړو چې n باید څومره لوی وي.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
n!	1	2	6	24	120	720	5040	40320
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561

لیدل کیږي چې د $n<7$ لپاره دا حکم سم نه دی، خو د $n=7$ لپاره د $n!>3^n$ رابطه سمه ده او له (7)څخه د زیاتو قیمتونو لپاره هم سمه ده . اوس فرضوو چې $k\geq7$ لپاره دا حکم سم دی، یعنې $k!\geq3^k$ دی، اوس غواړو وښایو چې:

$(k+1)!>3^{k+1}$

که د $k!>3^k$ د رابطې دواړه خواوې په $(k+1)$کې ضرب شي، نو لرو چې:

$(k+1)k!>(k+1)3^k$

څرنګه چې $k\geq7$ فرض شوی دی، نو $(k+1)k!>7\cdot3^k$

او له دې ځایه لرو چې:

$7\cdot3^k>3\cdot3^k=3^{k+1}$

$7\cdot3^k>3^{k+1}$

د تعریف په اساس$(k+1)!=(k+1)k!$ دی، که په پورتنی رابطه کې وضع شي

لرو چې

$(k+1)!>3^{k+1}$

په دې ډول د $k \geq 7$ لپاره مو وښودل چې که $k! > 3^k$ وي

نو $(k+1)! > 3^{k+1}$ دی اوس په ډاډ سره ویلای شوو چې د هر $n \geq 7$ لپاره لرو چې $n! > 3^n$ دی

په دې مثال کې ولیدل شوه چې د m مناسب عدد (7) دی، دې ډول استدلالي طریقې ته د استقرا عمومیت وایي.

د استقرا د عمومیت اصل:

فرض کړئ چې P(n) د طبیعي عددونو په برخه کې یو حکم وي، که P(m) د $m > 1$ لپاره سم وي او د هر طبیعي عدد $k \geq m$ لپاره د P(k) له صحت څخه P(k+1) نتیجه شي، نو P(n) د هر طبیعي عدد $n \geq m$ لپاره صحت لري.

(متوجه اوسئ چې په هره مسئله کې د m مناسب عدد پیدا کړئ)

1- مناسب m پیدا کړئ.

2 – د $n = m$ لپاره یې سموالی ښایو.

3- ثبوتوو که د $n = k \geq m$ لپاره صحت ولري. په هغه صورت کې د $n = k+1$ لپاره هم صحت لري او له دې څخه نتیجه کېږي چې د هر طبیعي عدد $n \geq m$ لپاره حکم صحت لري.

د پوښتنو حل:

1- د ریاضي د استقرا په واسطه وښایاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لرو چې:

$$1^2 + 2^2 + \dots\dots\dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

محترم ښوونکي دې متوجه وي چې په درسي کتاب کې ددې فرمول په لیکلو کې اشتباه شوي ده.

چې د ریاضي د استقرا په واسطه په لاندې ډول ثبوتېږي:

$$1^2 + 2^2 + \dots\dots\dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

لومړی پړاو:

$$n = 1 \qquad : \quad 1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{2\cdot 3}{6} = 1$$

صحت لري.

دویمه پړاو: فرضوو چې د n=k لپاره سمه ده.

$$n = k \qquad \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

درېم پړاو: ثبوتوو چې.

$$1^2 + 2^2 + \dots\dots k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)}{6} = \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

نو د n هر طبیعي عدد لپاره پورتنۍ رابطه سمه ده.

2- د ریاضي د استقرا په واسطه وښایاست چې:

$$2+6+10+.......+(4n-2)=2n^2 \qquad (i)$$
$$1+3+5+.................+(2n-1)=n^2 \qquad (ii)$$

د (i) حل:

1- صحت لري $n=1 \qquad 2\cdot 1^2=2$

2- د $n=k$ لپاره یې فرضوو چې راکړل شوي رابطه سمه ده.

$$2+6+10+............+(4k-2)=2k^2$$

3- د $n=k+1$ لپاره یې ثبوتوو چې رابطه سمه ده.

$$2+6+10+...........+4k-2+4(k+1)-2=2(k+1)^2$$
$$2k^2+4(k+1)-2=2k^2+4k+4-2=2k^2+4k+2=2(k^2+2k+1)=2(k+1)^2$$

ثبوت شوه چې پورتنې رابطه د $n=k+1$ لپاره سمه ده نو دا رابطه د ټولو طبیعی عددونو لپاره سمه ده.

د (ii) جز حل: رابطه د $n=1$ لپاره سمه ده.

$$n=1 \qquad \Rightarrow 1^2=1$$

2- د $n=k$ لپاره یې سموالی فرضوو.

$$n=k \Rightarrow 1+3+.........+(2k-1)=k^2$$

د $n=k+1$ لپاره یې سموالی ثبوتوو:

ثبوت:

$$1+3+..........+2k-1+2(k+1)-1=(k+1)^2$$
$$k^2+2(k+1)-1=k^2+2k+2-1=k^2+2k+1=(k+1)^2$$



استنتاجي استدلال

د درسي کتاب: (401) مخ **د لوست وخت** (1 درسي ساعت)

د زده کړې موخې (پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي)

- په دې وپوهېږي چې استنتاجي استدلال له هغو حقيقتونو څخه په استفادې چې د هغو سموالی مو قبول کړی دی، د نتيجې اخيستلو يوه طريقه ده.
- درک کړي چې په حقيقت کې هغه طريقه چې نتيجه اخيستل او يا ثبوتول يې له هغه مفهومونو څخه په استفادې چې سموالی يې ولرو او داده اوسو چې نتيجه يې هر وخت سمه ده، استنتاجی استدلال دی.
- پوه شي هغه وخت له استنتاجي استدلال څخه استفاده کوو چې ډاډه اوسو چې نتيجه هر وخت سمه ده. يا د کلي نتيجې اخيستلو سموالي د استناجي استدلال په واسطه ثبوتېږي.
- درک کړي چې کلي يا عمومي قضيې هغه حکمونه دي چې همیشه سمې دي.

د تدريس لارې (ميتودونه)

پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...

درسي او مرستندويه مواد

درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...

د ورودي برخـې توضـيح (5) دقيقې

له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د انګيزې د پيدا کولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

د لوست بهير او فعاليتونه(28) دقيقې:

ددې لوست فعاليت دې زده کوونکي په مناسبو ګروپونو کې سرته ورسوي او محترم استاد دې ور سره مرسته او لارښوونه ورته وکړي او زده کوونکو ته توضيح کړئ چې له هغو حقيقتونو څخه په استفادې چې د هغو سموالی مو لا مخکې قبول کړی دی عمومي نتيجه په لاس راوړو چې دې طريقې ته استنتاجي استدلال وايي، لومړی مثال د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل کړئ.

د لانديني جدول په شان يو بل مثال هم کار کړئ.

عدد وټاکئ	4	7	12	35
د 5 عدد ورسره جمع کړئ	9	12	17	40
د جمعی حاصل دوه چنده کړئ	18	24	34	80
د 4 عدد ترې تفريق کړئ	14	20	30	76
په 2 يې وويشئ	7	10	15	38
ټاکل شوی عدد له دې حاصل څخه تفريق کړئ	3	3	3	3

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره لاندې پوښتنه حل کړئ:

1- وښایاست چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت جفت عدد دی.

حل: فرض کړئ چې 2m+1 او 2n+1 دوه طاق عددونه وي چې m او n دوه طبیعي عددونه دي:

$(2m+1)+(2n+1)=2m+2n+2=2(m+n+1)$

په دې اساس چې د (2) عدد یې مضرب دی، نو د (m+n+1) 2 عدد یو جفت عدد دی.

چې دا کار د استناجي استدلال پایله ده.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**

دویمه پوښتنه له زدکوونکو وپوښتئ

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

د (پاپیروس رایند) په مقدمه کې چې ښایي د ریاضي تر ټولو پخوانی تاریخ وي (1650) کاله مخکې له میلاده داسې راغلي دي.

"په ډېر سره ویلای شو چې د انسان د شعور تر ټولو لویه ځانګړتیا چې د هر ملت د تمدن د اندازې ښوونکي ده، هماغه د استدلال کولو توان دی او په عمومي ډول دا توان د یو ملت د خلکو په ریاضیکي مهارتونو کې ښودل کېږي".

د مصر د (پاپیروس رایند) په تاریخ کې یو له هغه مسایلو څخه چې په دې تاریخ کې شته، له عددونو سره لوبې کول دي، په دې ډول یو عدد ټاکل کېږي، بیا څو نوري عملیې پرې سرته رسېږي. په پای کې پرته له دې چې ټاکل شوی عدد په پام کې ونیول شي نتیجه یې هر وخت یو شي وي.

د مثال په ډول: که ددې لوست د مثال په شان د عددونو پر ځای علامې ولیکو، لکه که د ټاکل شوي عدد پر ځای د مربع شکل په پام کې ونیسو او د لومړي مثال مرحلې پرې تطبیق کړو او د جمعې یا تفریق د عملیو پر ځای له یوې کوچنۍ دایرې څخه استفاده وکړو.

ټاکل شوی عدد	□
5 ور سره جمع کړئ	□ OOOOO
مخکینۍ نتیجه دوه چنده کړئ	□ OOOOO □ OOOOO
4 واحده ترې کم کړئ	□ OOO □ OOO
د مخکینۍ نتیجې نیمایي	□ OOO
ټاکل شوی عدد ترې کم کړئ	OOO

اوس مثال په الجبري شکل یعنې د عددونو پر ځای له تورو څخه کار اخلو د ټاکل شوي عدد پر ځای یو توری په پام کې نیسو:

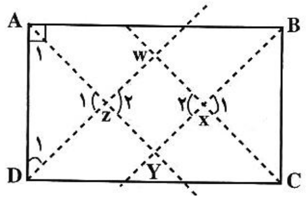
ټاکل شوی عدد	n
د ټاکل شوي عدد سره 5 جمع کړئ	n+5
د مخکینی نتیجې دوه چنده	2n+10
څلورو واحده ترې کموو	2n+6
د مخکینی نتیجې نمایې	n+3
ټاکل شوی عدد ترې کموو	3

په دریواړو حالتونو کې لیدل کېږي چې د هغه عبارتونو پر اساس چې د هغوی سموالی مو قبول کړی دې نتیجې مو په لاس راوړي. یعني د استنتاجي استدلال څخه مو استفاده وکړه.

څه وخت چې له استنتاجي استدلال څخه استفاده کوو ډاډه یو چې نتیجه هر وخت سمه ده د پورتنیو مثالونو څخه هدف د استنتاجي استدلال سره آشنا کېدل وه له دې مثالونو څخه زیاتې یې عمومی قضیې دی، عمومی یا کلی قضیې هغه حکمونه دي چې هر وخت سمې دي د ریاضي زیاتې مهمې قضیې کلي قضیې دي، د مثال په ډول د فیثاغورس د قضیې اهمیت په دې کې نه دی چې په یوه قایم الزاویه مثلث کې صدق کوي، بلکه په ټولو قایمه الزاویه مثلثونو کې صدق کوي او یا د $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ د رابطې اهمیت په دې کې دي چې د هرې x زاویې لپاره دا مساوات صدق کوي او یا x او y د هرو دوو حقیقي مثبتو عددونو لپاره لرو چې $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ په لنډ ډول استنتاجي استدلال موږ ته ډاډ راکوي چې په لاس راغلی نتیجه خامخا سمه ده، دغه جامع والی ددې ډول استدلال د توان او ښکلتیا یوه نښه ده.

- د استنتاجي استدلال یو بل مثال: هغه شکل چې د هر مستطیل د داخلي ناصف الزاویه له قطع کېدو څخه لاس ته راځي مربع ده.

د ABCD یو اختیاري مستطیل په پام کې نیسو او د داخلي زاویو ناصفو نه یې رسموو:



1- AY د $\hat{A}$ د زاویې ناصف دی او د $\hat{A}$ زاویه قایمه ده نو: $\hat{A}_1=45^\circ$

2- DW د D د زاویې ناصف الزاویه دی او د D زاویه قایمه ده نو $\hat{D}_1=45^\circ$

نو په دې اساس د AZD مثلث متساوی الساقین دی او د $\hat{Z}$ زاویه قایمه ده، په نتیجه کې:

$\hat{Z}_1=\hat{Z}_2=90^\circ$

AZ = DZ………………I

2- د لومړی شمېرې له استدلال څخه نتیجه کېږي چې د (BXC) مثلث قایم الزاویه متساوی الساقین مثلث دی:

$\hat{X}_1=\hat{X}_2=90^\circ$

BX = CX………………II

I او II رابطو ته په پام او د ABCD د مستطیل څخه نتیجه کیږي چې د ADZ او BXC مثلونه سره انطباق منونکی دي

نو: $DZ = CX$

په همدې ډول د لومړۍ شمېرې د استدلال په شان نتیجه کېږي چې د CWD مثلث هم قایمه الزاویه متساوی الساقین دی.

$\hat{W} = 90^{\circ}$

$DW = CW$..........................III

3- د I ، II او III رابطو څخه لرو چې د WXYZ څلور ضلعي مستطیل دی II او III رابطو ته په پام سره کولای شو

ولیکو چې:

$DW - DZ = CW - CX$

$WZ = WX$..........................IV

IV رابطه ښیي چې WXYZ یوه مربع ده نو په پایله کې مو په عمومي حالت کې وښودل چې:

هغه شکل چې د هر مستطیل د داخلي زاویو د ناصفونو له تقاطع څخه جوړیږي مربع ده.

ددې مثال په ثبوت کې مو له هغه حقایقو (حکمونو) څخه استفاده وکړه چې سموالی یې مو مخکې منلی وه دا حکمونه

عبارت دي له:

- د هر مثلث د داخلي زاویو مجموعه 180 درجې ده.
- هغه مثلث چې دوه زاویې سره مساوي وي متساوي الساقین دی.
- متقابل براس زاویې سره مساوي دي.
- که د یو مساوات له دواړو خواو څخه عین عدد کم کړو په مساوات کې تغیر نه راځي.

پورتني مثال د استنتاجي استدلال یوه بېلګه ده.

داسې نتیجې چې هر وخت سمې وي د قضیو بېلګې دي کلي قضیې هغه حکمونه دي چې همېشه سمې دي.

د پوښتنو حل

1- وښایاست چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یوجفت عدد دی:

حل: پوهیږو چې د k د هر تام عدد لپاره $2k+1$ یو طاق عدد دی اوس دوه طاق عددونه د $2k_1+1$ او $2k_2+1$ په پام کې نیسو چې k_1 او k_2 دوه طبیعي عددونه دي.

$$2k_1+1+2k_2+1=2k_1+2k_2+2=2(k_1+k_2+1)$$

دا چې د جمعې په حاصل کې چې ضریب یې د 2 عدد دی نتیجه اخلو چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یوجفت عدد دی.

2- ثبوت کړئ چې هر صحیح طاق عدد د $2k+1$ په شکل دی.

حل:

$$k=1 \quad : \quad 2k+1=2\cdot1+1=3$$

$$k=n \quad : \quad 2n+1$$

$$k=n+1 \quad : \quad 2(k+1)+1=2k+2+1=2k+3$$

3- د سرو زرو په 9 سکو کې یوه تقلبي ده چې له نورو سکو څخه یې وزن لږ دی څرنګه کولای شو چې د نورو وزنونو څخه د استفادې کولو پرته د پله یي ترازو په واسطه له دوه ځل تللو په پایله کې تقلبي سکه وپیژنو ؟

حل: سکې درې، درې دانې په دریو ډیریو وېشو. دوه ډیرې یې د تلې په واسطه تلو که دواړه پلې سره برابري وي، نو تقلبي سکه په بل ډیرې کې ده او که پلې سره برابري نه وي، هماغه پله چې سپکه ده، تقبلي سکه په هماغه ډیرې کې ده، بیا له دریو سکو څخه یې دوه سکې یوه په یوه پله کې او بله په بله کې ږدو که پلې سره برابری وي، نو دریمه سکه تقلبي ده او که پلې سره برابرې نه وي تقلبي سکه په سپکه پله کې ده.



دمثال د نفی کولو استدلال

د درسي کتاب (403)مخ **د لوست وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (**پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي**)	• زده کوونکي زده کړي هغه مثال ته چې وښودلای شي چې عمومي نتيجه سمه نه ده. د نفي کولو مثال وايي. • په دې وپوهيږي هغه مثال چې يو عبارت يا يو حکم نفي کوي د نفي کولو د مثال به نامه ياديږي. • دا درک کړي چې په يوه عبارت (فورمول) کې د ټولو عددونو ازمايل مشکل کار دی نو داسې يو عدد پيدا کوو چې دا خاصيت ونه لري چې دا عدد د نفي مثال دی.
د تدريس لارې (**ميتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخــې توضــيح (5) **دقيقې**	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د انگيزي د پيدا کولو لپاره دزده کوونکو پام د ورودي برخې پوښتنې ته واړوئ.

د لوست بهير او فعاليتونه(28) **دقيقې**:

د لوست فعاليت دې زده کوونکي په مناسبو گروپونو کې سرته ورسوي او محترم استاد دې ورسره مرسته او لارښوونه ورته وکړي.

$9 = 2 + 3 + 4$

$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

$22 = 4 + 5 + 6 + 7$

$39 = 12 + 13 + 14$

$74 = 17 + 18 + 19 + 20$

اوس دا پوښتنه پيدا کيږي چې ايا کولای شو چې هر طبيعي عدد د پرله پسې عددونو د مجموعې په شکل وليکو ددې کار لپاره ډير مثالونه شته، ايا کولای شو چې ټول طبيعي عددونه وازمايو؟

له طريقو څخه يوه دا ده چې يو طبيعي عدد پيدا کړو چې دا خاصيت ونه لري؟

$12 = 3 + 4 + 5$

$17 = 8 + 9$

$26 = 5 + 6 + 7 + 8$

$30 = 9 + 10 + 11$

$40 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

$100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22$

$130 = 31 + 32 + 33 + 34$

$6 = 1 + 2 + 3$

$7 = 3 + 4$

$8 = ?$

لیدل کیږي چې نه شو کولای د 8 عدد د پرله پسې عددونو د مجموعې په شکل ولیکو، نو د 8 عدد د نفي کولو مثال دی، دا ښيې هر طبیعي عدد نه شو کولای چې د پرله پسې عددونو د مجموعې په شکل یې ولیکو.

ددې لوست مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**

لاندې نمونه په نظر کې ونیسئ.

$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$

$14 = 1^2 + 1^2 + 3^2$

$24 = 2^2 + 2^2 + 4^2$

$59 = 1^2 + 3^2 + 7^2$

$61 = 3^2 + 4^2 + 6^2$

$89 = 2^2 + 2^2 + 9^2$

احتمالي نتیجه دا ده چې: ایا کولای شو چې هر طبیعي عدد د درېو کاملو مربعگانو د جمعې د حاصل په شکل ولیکو د نفي د مثال په واسطه وښیې چې پورتني نتیجه سمه نه ده.

څرنګه چې د 17 ، 19، 23 او داسې نور لومړني عددونه نه شو کولای چې د لومړنیو عددونو د کاملو مربعگانو په شکل یې ولیکو چې دا د نفې کولو یو مثال دی.

د لاندې کومو حکمونو لپاره د نفي کولو مثال شته؟

a) که $x > 1$ وي، نو $x > 2$ دی.

b) که $x > 2$ وي، نو $x > 1$ دی.

c) که $ab = 0$ وي، نو $a = 0$ او $b = 0$ دی.

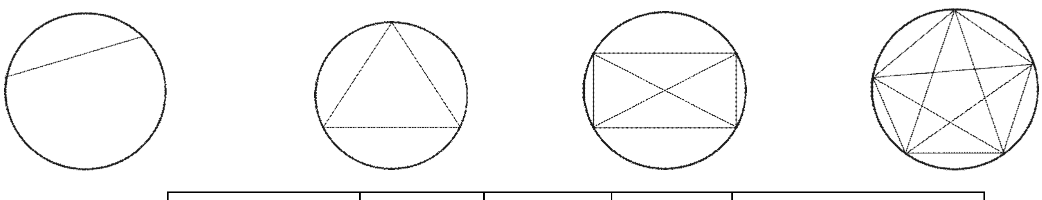
د لوست ارزونه: (5) **دقیقې**:

ددې لوست لومړۍ پوښتنه له زده کوونکو وکړئ.

ښوونکي لپاره اضافي معلومات

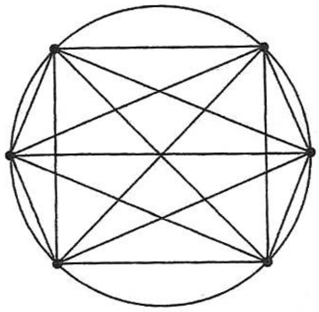
- که چیرې وویل شي د یو مثلث ارتفاعگانې د مثلث د ننه په یوه نقطه کې قطع کوي، ددې بیان لپاره د نفي کولو مثال دا دی چې د هغه مثلث ارتفاعگانې چې ضلعې یې 6،8 او 12 وي، د مثلث د ننه نه قطع کوي چې دا خاص مثال ددې گمان لپاره د نفي کولو مثال دی.

د دایرې پر محیط دوې کیفي نقطې د یو قطعه خط په واسطه سره ونښلوئ، دایره په دوو برخو ویشي او د درېو نقطو په نښلولو سره دایره په څلورو برخو وېشل کیږي لاندې شکل د دایرې پر محیط د 2،3،4 او 5 کیفي نقطو ښکارندوی دی.



د نقطو شمېر	2	3	4	5
د ناحیو شمېر	2	4	8	16

له دې څخه دا نتیجه کیږي که نقطې 6 وي، نو باید دایره په 32 برخو وویشل شي او دا خبره سمه نه ده، لاندې شکل وګورئ چې د 6 نقطو په نښلولو سره دایره په 30 برخو وېشل کیږي.



دا هغه مثال و چې زموږ ګمان یې ناسم کړ، نو ویلای شو چې د نفي د مثال په واسطه زموږ د ګمان نه سمولای ثابت شوي دی.

د پوښتنو حل:

1- د مثال د نفي کولو په استدلال سره وښایاست چې «د هر مثبت حقیقي عدد مربع د عدد له مکعب څخه کوچنی ده»

حل:

$-2 \in IR$ $\qquad$ $(-2)^2 > (-2)^3$ یا $4 > -8$

لیدل کیږي چې د هر حقیقي عدد د مکعب د عدد له مربع څخه لوی نه دی.

2- د لاندې کوم بیان لپاره د نفي مثال وجود نه لري؟

a) د دوو ناطقو عددونو مجموعه یو ناطق عدد دی.

b) د هر مثبت عدد مربع له عدد څخه لویه ده.

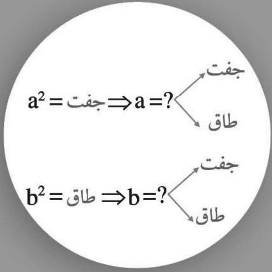
c) دوې زاویې چې متناظرې ضلعې یې سره موازي وي، دا دواړه زاویې سره مساوي دي.

d) د دوو طاقو عددونو مجموعه یو جفت عدد دی.

e) د دوو غیر ناطقو عددونو د ضرب حاصل، غیر ناطق عدد نه دی.

له a,b,c ،d او e څخه د کوم یو لپاره د نفي مثال موجود نه دی؟

حل: د c,a او d د نفي مثال نشته او د b او e لپاره د نفي مثالونه موجود دي، ځکه چې $1 = 1^2$ او $\sqrt{6} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ چې یو غیر ناطق عدد دی.



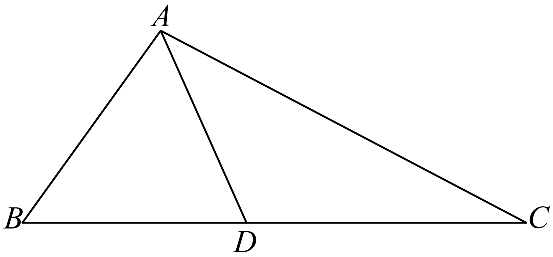
د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت

د درسي کتاب (405)**مخ** **د لوست وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (**پوهنیزې، مهارتي، ذهنیتي**)	• د غیر مستقیم ثبوت په مفهوم وپوهیږي او د غیر مستقیم ثبوت مرحلې وپیژني. • په دې پوه شي چې په دې ډول ثبوت کې فرض کیږي چې د قضیې حکم سم نه دی او د استنتاج په طریقه یوه تناقص (تضاد) ته رسیږو. • په دې پوه شي چې له دې طریقې څخه په هندسه کې د قضیو د ثبوتولو لپاره استفاده کیږي. • د هندسي مسایلو په ثبوتولو کې له غیر مستقیم ثبوت څخه استفاده وکړای شي او اهمیت یې درک کړي
د تدریس لارې (**میتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، یوکسیز او ډله ییز کارونه او...
درسي او مرستندویه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضیح (5) **دقیقې**	له لومړنیو فعالیتونو څخه وروسته د انګیزې د پیدا کولو لپاره د ورودي برخې پوښتنه دې له زده کوونکو وشي چې ځواب یې دا دی که د یو عدد مربع جفت وي، نو عدد هم جفت دی.

د لوست بهیر او فعالیتونه: (28) **دقیقې**:

ښایي زده کوونکي په ډلو کې فعالیت سرته ونشي رسولای، نو محترم ښوونکي دې دا فعالیت حل کړي چې حل یې په لاندې ډول دی.



AD د $\hat{A}$ د زاویې ناصف دی که BD ≠ CD وي ثبوت کړئ

چې $AB \neq AC$ دی.

حل: په غیر مستقم ډول یې ثبوتوو فرض کړئ چې مطلوبه نتیجه سمه نه وي یعنې $AB \neq AC$ سم نه وي یعنی $AB = AC$ وي، نو د ABC مثلث متساوي الساقین دی.

ځرنګه چې په متساوي الساقین مثلث کې د AD ناصف الزاویه د BC ضلعه هم نیمایي کوي، نو BD=DC کیږي چې دا د مسلې له فرض BD ≠ CD سره په تضاد کې ده. په پایله کې $AB \neq AC$ دی.

دې طریقې ته غیر مستقیم ثبوت وایي چې په ټولو ریاضیاتو کې د استعمال ځایونه لري، د فعالیت نتیجه زده کوونکو ته توضیح کړئ او بیا د غیر مستقیم ثبوت مرحلې هم وروپیژنئ د لوست مثال د زده کوونکو په ونډې اخیستنې سره حل کړئ.

د زده کړې پیاوړتیا: (7) **دقیقې**:

د زده کړې د پیاوړتیا لپاره دا پوښتنه حل کړئ.

که n یو تام عدد او n^2 طاق وي، د غیر مستقیم ثبوت په واسطه وښایاست چې n هم طاق دی.

د لوست ارزونه: (5) **دقیقې:**

د ارزونې لپاره دا پوښتنه وکړئ.

که n^2 د 3 مضرب وي، وښایاست چې n هم د 3 مضرب دی

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

وښایاست چې $\sqrt{2}$ یو غیر ناطق یاګنګ عدد دی.

ثبوت: فرضوو چې $\sqrt{2}$ یو ناطق (ګویا) عدد دی، نو د ناطق عدد د تعریف په اساس لیکلای شو چې:

$$\sqrt{2} = \frac{P}{q} \quad (q \neq 0)$$

چې P او q تام عددونه دي او د $\frac{P}{q}$ په ساده شکل وي یعنې د p او q لوی مشترک قاسم یو وي.

$$\sqrt{2} = \frac{P}{q} \quad \Rightarrow 2 = \frac{P^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

له دې ځایه نتیجه کیږي چې P^2 جفت عدد دی، نو P هم جفت دی یعنې $P = 2k$ دی او $P^2 = 4k^2$ کیږي.

د P^2 پر ځای یې قیمت $2q^2$ عوض کوو، نو لرو چې $2q^2 = 4k^2$

دواړه خواوې پر (2) وېشو $q^2 = 2k^2$

له دې ځایه نتیجه کیږي چې q^2 جفت او په نتیجه کې q هم جفت دی او دا د فرضیې خلاف دی ځکه په دې صورت کې د P او q مشترک قاسم 2 دی.

په پایله کې دا فرض چې $\sqrt{2}$ ناطق دی سم نه دی، نو $\sqrt{2}$ یو غیر ناطق (ګنګ) عدد دی.

په همدې ډول کولای شی چې ثبوت کړئ چې $\sqrt{3}$ هم یو غیر ناطق یاګنګ عدد دی.

- وښایاست چې د دوو طاقو پرله پسې عددونو د جمعې حاصل پر 4 پوره وېشل کیږي.

حل: که $2k+1$ او $2k+3$ دوه پرله پسې طاق عددونه وي

$$2k + 1 + 2k + 3 = 4k + 4 = 4(k + 1)$$

لیدل کیږي چې پر 4 د وېش قابلیت لري.

- وښایاست چې $\sqrt[3]{5}$ یو غیر ناطق عدد دی.

حل: فرضوو چې $\sqrt[3]{5}$ یو ناطق عدد دی، نو:

$$\sqrt[3]{5} = \frac{p}{q} \quad (q \neq 0)$$

په دې ډول چې د p او q تامو عددونو لوی مشترک قاسم 1 وي، نو د p^3 او q^3 لوی مشترک قاسم هم د 1 عدد دی چې دا امکان نه لري

$$5 = \frac{p^3}{q^3} \Rightarrow p^3 = 5q^3$$

ځکه چې د p او q لوی مشترک قاسم د 1 عدد دی په نتیجه کې $\sqrt[3]{5}$ یو غیر ناطق عدد دی

د پوښتنو ځوابونه:

وښاياست چې $\sqrt{3}$ يو غير ناطق عدد دی.

حل: فرضوو چې مطلوبه نتيجه سمه نه ده يا $\sqrt{3}$ غير ناطق عدد نه وي يعنې ناطق وي، نو $\sqrt{3}$ د $\frac{p}{q}$ په شکل ليکو چې p او q تام عددونه $(q \neq 0)$ دي.

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow 3 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 3q^2 = p^2$$

ځرنگه چې p او q تام عددونه دی او لوی مشترک قاسم يې 1 دی.

له $3q^2 = p^2$ څخه نتيجه اخيستل کيږي چې p^2 پر 3 د وېش وړ دی.

که ab پر c د وېشلو وړ وي، نو b هم په c او a هم په c باندې د وېش قابليت لري.

ځرنگه چې $p \cdot p$ يا p^2 پر 3 د وېش وړ دی، نو p هم پر 3 د وېش وړ دی، نو د k تام عدد وجود لري چې $p = 3k$ کيږي، نو $\sqrt{3}$ يو غير ناطق عدد دی.



د رياضي منطق او د بيان استنتاج

د درسي كتاب (407)**مخ** **د لوست وخت** (1 **درسي ساعت**)

د زده کړې موخې (**پوهنيزې، مهارتي ، ذهنيتي**)	زده کوونکي ددې لوست په پای کې باید: • بیان او د بیان نفي وپيژني. • د بيان او د بيان د نفي د صحت جدول جوړ کړای شي. • له يوې خوا او له دواړو خواو شرطيه بيانونه وپيژني او د صحت جدولونه يې ترتيب کړای شي. • د بيانونو د ترکيب جدول جوړ کړای شي. • د رياضي د منطق د مسايلو په حلولو کې ترې استفاده وکړای شي او اهميت يې درک کړي.
د تدريس لارې (**ميتودونه**)	پوښتنې او ځوابونه، يوکسيز او ډله ييز کارونه او...
درسي او مرستندويه مواد	درسي کتاب، تخته، چارتونه، شکلونه او...
د ورودي برخې توضيح (5) **دقيقې**	له لومړنيو فعاليتونو څخه وروسته د ورودي برخې پوښتنه دې له زده کوونکو وشي او هدف يې دا دی چې کيدای شي بيان سم يا ناسم وي.

د لوست بهير او فعاليتونه: (28) **دقيقې**:

د 407 مخ د فعاليت ځواب دې زده کوونکي ووايي او محترم ښوونکي دې ورسره مرسته وکړي، په نيتجه کې هره جمله نه شي کيدای چې يو بيان وي، دا موضوع دې زده کوونکو ته توضيح شي بيا دې بيان او د بيان نفي د دوي د صحت له جدولو سره زده کوونکو ته توضيح شي.

د بيانونو ترکيب او يو طرفه او دوه طرفه شرطيه بيانونه دې توضح شي.

لومړی او دويم مثال دې د زده کوونکو په ونډې اخيستنې سره حل شي

د زده کړې پياوړتيا: (7) **دقيقې**:

د لاندې پوښتنې حل زده کوونکو ته واضح کړئ.

که د p بيان ناسم او د q بيان سم وي ايا د $p \wedge q$ او $p \vee q$ بيانونو ترکيب سم دی يا ناسم؟

ځواب: د $p \wedge q$ بيان ناسم او د $p \vee q$ بيان سم دی.

د لوست ارزونه: (5) **دقيقې**:

که د p لومړنی بيان سم او د q بيان ناسم وي، $p \Rightarrow q$ سم دی که ناسم؟

ځواب: $p \Rightarrow q$ نا سم دی.

د ښوونکي لپاره اضافي معلومات

علامه يي منطق (symbolic Logic):

د (~) علامه ويل کيږي چې (نه) (~P د P نفي) Not p يا Negative of p

که p يو بيان وي ~P ته دP نقيض وايي، د مثال په ډول که P يو داسې بيان وي چې 5 طاق دی، نو نفي يا نقيض يې داسې دی چې (داسې نه ده چې 5 طاق دی) يا $(1 = 2) \sim$ داسې نه دی چې 1 له 2 سره مساوي وي.

د ($\wedge$) علامه د (و) ($p \wedge q$ يعنې p و q)

د ($\vee$) علامه د (يا) ($p \vee q$ يعنې p يا q)

$p \Rightarrow q$ که P نو q يا له p څخه q نتيجه کيږي، نو د يوې خوا شرطيه بيان په نامه يادېږي.

نوټ: د بيانونو رابطې د (داسې نه ده چې، او ، يا، که) په لفظونو سره صورت نيسي.

$p \Leftrightarrow q$ دوه طرفه شرطيه بيان دی ((p او که يوازې که q)) if and only if ويل کيږي يا (p له q سره معادل دی)

د صحت جدول او د سمبولونو استعمال توضيح: که p يو بيان وي (~P) نفي (Negation of p) يا داسې نه ده د p د بيان ده که p سم وي ~p ناسم دی او که p ناسم وي، نو ~p سم دی.

د صحت جدول Truth Table يې په لاندې ډول دی:

p	$\sim p$
T	F
F	T

1- د $p \wedge q$ ترکيب (Conjunction) په هغه صورت کې سم دی چې د بيان دواړه مولفې سمې وي.

د مثال په ډول $a < b \wedge b < c$ يعنې a له b کوچنی او b له c کوچنی دی د صحت جدول يې په لاندې ډول دی.

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

1مثال:

(i)کابل دافغانستان مرکز او تهران د ايران مرکز دی.

$2+2=3 \wedge 6+6=10$ (iv) $4<5 \wedge 8>10$ (iii) $4<5 \wedge 8<10$ -(ii)

لیدل کیږي چې (i) او (ii) سم دي، خو (iii) او (iv) ناسم دی.

2- د $p \vee q$ ترکیب (disjunction): په هغه صورت کې سم دی چې لږ تر لږه یو له دواړو p یا q څخه سم وي او هغه وخت ناسم دی چې دواړه ناسم وي. چې د صحت جدول یې په لاندې ډول دی.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

د مثال په ډول: په لاندې بیانونو کې یوازې څلورم بیان ناسم دی.

5 طاق دی یا واوره سپینه ده.

5 طاق دی یا واوره توره ده.

5 جفته دی یا واوره سپینه ده.

5 جفت دی یا واوره توره ده.

2مثال: 10 عدد تام مثبت عدد دی یا $\sqrt{2}$ یو ناطق عدد دی، څرنګه چې لومړی بیان سم دی، نو $p \vee q$ سم دی.

3مثال: یو مثلث دوه قایمې زاویې لري یا کندهار د افغانستان مرکز دی څرنګه چې دواړه بیانونه ناسم دي، نو $p \vee q$ هم ناسم دی.

$a<b \vee a=b$

a له b کوچنی یا a مساوي په b دی.

$\sim(a<b) \vee a=b$

a له b کوچنی نه دی یا a له b سره مساوي دی.

$\sim(a<b) \vee \sim(a=b)$

a کوچنی له b یا a له b سره مساوي نه دی.

$\sim(a<b \vee a=b)$

داسې نه ده چې a کوچنی د b یا a مساوي په b .

$p \vee q \vee r$ د $(p \vee q) \vee r$ په شکل لیکو.

شرطیه ترکیب(Implication or Conditional): چې په $p \Rightarrow q$ سره ښودل کیږي، له p،q نتیجه کیږي چې p د فرضیې او q د نتیجې په نامه یادیږي (که p نو q)

د مثال په ډول: که α او β متقابل بالراس زاویې وي، نو $\alpha = \beta$ ده. یا که $a > 1$ انگاه $a^2 > 1$ ده.

شرطیه بیان په هغه صورت کې ناسم دی چې p سم او q ناسم وي، نور په ټولو پاتې حالتونو کې $p \Rightarrow q$ سم دی.

د صحت جدول یې په لاندې ډول دی

p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

مثال: په لاندې بیانونو کې یوازې دویم ناسم دی.

که 5 طاق دی 7 لومړنی دی.

که 5 طاق دی 7 جفت دی.

که 5 جفت دی 7 لومړنی دی.

که 5 جفت دی 7 جفت دی.

او یا په لاندې بیانونو کې دویم ناسم دی او نور سم دي.

که $3 > 2$ ، نو $2 > 1$

که $3 > 2$ ، نو $2 < 1$

که $3 < 2$ ، نو $2 > 1$

که $3 < 2$ ، نو $2 < 1$

مثال: که احمد په کابل کې ژوند کوي، نو احمد په افغانستان کې ژوند کوي. که لومړی بیان سم نه وي دمثال په ډول احمد په کابل کې ژوند نه کوي، خو احمد په افغانستان کې ژووند کوي، هیڅ دلیل نشته چې احمد په افغانستان کې ژوند نه کوي، نو نه شو کولای چې د $p \Rightarrow q$ ترکیب ته ناسم ووایو. که دواړه جملې ناسمې وي لاندې مثال ته توجه وکړئ.

مثال: احمد ادعا کوي چې که دی د ټیم د کپتان په حیث وټاکل شي، نو ټیم لوبه گټې په دې وخت کې څلور امکان شته:

1- احمد د ټیم کپتان وټاکل شو او ټیم لوبه وګټله، نو د احمد بیان سم دی.

2- احمد د ټیم کپتان وټاکل شوه، خو ټیم لوبه بایلو ده، نو د احمد بیان سم نه دی.

3- احمد د ټیم کپتان و نه وټاکل شوه، خو د ټیم ټولو غړو لوبه وګټله، نو د احمد د بیان د ناسم والي دلیل وجود نه لري.

4- احمد د ټیم کپتان و نه وټاکل شو او ټیم لوبه بایلوده، نو په دې صورت کې د احمد ګناه نه ده.

مثال: احمدپه کابل کې ژوند کوي، نو احمد په افغانستان کې ژوند کوي او دا یو سم بیان دی، خو که احمد په کابل کې ژوند نه کوي نه شوو ویلای چې احمد په افغانستان کې ژوند نه کوي.

که $p \Rightarrow q$ هغه وخت ناسم بیان دی چې p سم او q ناسم وي، په دې حالت کې $\sim q$ سم او $\sim p$ ناسم دی.

$p \Rightarrow q$ او $\sim(p \wedge \sim q)$ چې دواړه په عین وخت کې سم دي د $\sim(p \wedge \sim q)$ دصحت جدول په لاندې ډول دی:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \Rightarrow q$ $\sim(p \wedge \sim q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
T	F	T	T	T

که د جدول اخیرني ستون ته پام وکړي $p \Rightarrow q$ او $\sim(p \wedge \sim q)$ دواړه یو شي دي، نو منطقا دواړه سره برابر دي.

مثال: که د x حقیقي عدد له 5 لوی وي، نو 4x له 20 لوی دی . $x > 5 \Rightarrow 4x > 20$

په هندسه کې: که مثلث متساوي الساقین وي، د مساوي ساقونو مقابلې زاویې سره مساوي دي. دې ډول قضیو ته شرطي قضیې وایي چې لومړی جملې ته د قضیې فرض او دویمې جملې ته د قضیې حکم وایي، که او نو (هغه وخت) په شرطي قضیو کې تعینوونکي نقش لري چې حکم له فرضیې څخه نتیجه کیږي، که په یو شرطي بیان کې فرض سم او حکم ناسم وي، دا بیان شرطي قضیه نه شي کیدای

مثلا: که $x > 0$ وي نو $x^2 > x$ دی.

که $x = \frac{1}{2}$ وي نو $x^2 = \frac{1}{4}$ کیږي.

چې دلته فرض $x > 0$ سم دی، خو حکم یې $\frac{1}{4} > \frac{1}{2}$ نا سم دی.

د $p \Rightarrow q$ د بیان عکس عبارت له $q \Rightarrow p$ دې څخه دی او د یو شرطي بیان د نقیض عکس یو داسې بیان دی چې لومړی

او دویمه جمله یې په ترتیب سره د دویمې جملې نقیض او د لومړی جملې نقیض دی.

د مثال په ډول :که p نو q $(p \Rightarrow q)$ د نقیض عکس یې که ~ q نو ~ p (که داسې نه ده چې q نو داسې نه ده چې p)

د یو بیان د نقیض عکس: که a طاق دی a+1 جفت دی، د تقیض عکس یې عبارت دی:

له a+1 جفت نه دی a طاق نه دی.

په لږ دقت سره ویلای شو چې د یو شرطي بیان ارزش او د بیان د نقیض د عکس ارزش سره برابر دی.

دوه شرطیه بیانونه (Biconditional): ($p \Leftrightarrow q$ بیانیه) $p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$ په لنډ ډول د $p \Leftrightarrow q$ په شکل ښودل کیږي. (P iff q) چې iff د که او که په مفهوم ښودل کیږي.

یا په هندسه کې که د یوې شرطي قضیې عکس هم یوه شرطي قضیه وي، داسې قضیې ته دوه شرطي قضیه وایي، د فیثاغورث د قضیې په شان (د وتر مربع د دوو نورو ضلعو د مربعگانو له مجموعې سره مساوي ده.)

که مثلث قایم الزاویه وي، په p چې د قضیې فرض دی او د قضیې حکم (د وتر مربع د دوو نورو ضلعو د مربگانو له مجموعې سره مساوي ده) په q سره وښایو.

د فیثاغورث قضیه $p \Rightarrow q$

د فیثاغورث قضیې عکس $q \Rightarrow p$

څرنگه چې دواړه سم دی، نو $p \Leftrightarrow q$ دی او ویل کیږي چې p د q معادل دی او وایو چې p که او یوازې که q مثلث قایم الزاویه دی که او یوازې که د یوې ضلعې مربع د دوو نورو ضلعو د مربعگانو له مجموعې سره مساوي وي او یا یې عکس.

مثال: که a=b نو 2a=2b او که 2a=2b نو a=b

یا دو شرطیه بیانونه داسې هم لیکلای شو (p یوازې او یوازې که q) یا د ⇔ علامه د لازم او کافي شرط ښکارندوی ده. د دوه شرطیه ترکیبي بیان $p \Leftrightarrow q$ ارزش یوازې او یوازې هغه وخت سم دی چې د دواړو مولفو ارزش سره برابر وي څکه چې $p \Rightarrow q$ هغه وخت سم دی چې دواړه سم یا ناسم وي، د مثال په ډول په لاندې بیانونو کې لومړی او څلورم سم او دویم او دریم بیان ناسم دي.

- که 5 طاق دی واوره سپینه ده او عکس یې
- که 5 طاق دی واوره توره ده او عکس یې
- که 5 جفت دی واوره سپینه ده او عکس یې

○ که 5 جفت دی واوره توره ده او عکس یې

د دوه شرطیه بیان د نقیض عکس:

د تعریف له مخې د $p \Leftrightarrow q$ د نقیض عکس له $\sim q \Leftrightarrow \sim p$ څخه عبارت دی چې مولفې یې د لومړی بیان د مولفو نقیض دي، د مثال په ډول د $a = b \Leftrightarrow 2a = 2b$ بیان د نقیض عکس د $\sim (2a = 2b) \Leftrightarrow \sim (a = b)$ بیان دی او یا په بل عبارت $(a \neq b \Leftrightarrow 2a \neq 2b)$ دی چې کولای شو داسې یې بیان کړو.

لازم او کافي شرط ددې لپاره چې a د b مساوي نه وي، دا دی چې 2a د 2b مساوي نه وي، توجه وشي، د یو دوه شرطي بیان د نقیض عکس او خپله د بیان ارزش یو شی دی.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

یعنې په هغه وخت کې د $p \Leftrightarrow q$ بیان سم دی چې دواړه بیانونه سم او یا ناسم وي. شرطیه بیانونه له شرطي جملو سره اړیکې لري که $p \Rightarrow q$ یو راکړل شوي شرط وي.

1- $q \Rightarrow p$ د $p \Rightarrow q$ عکس دی.

2- $\sim p \Rightarrow \sim q$ د $p \Rightarrow q$ نقیض دی.

3- $\sim q \Rightarrow \sim p$ د $p \Rightarrow q$ د نقیض عکس دی.

چې د صحت جدول یې په لاندې ډول دی.

				Given Condition	*Convers*	*Inverse*	*Contra Positive*
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T	T	T

پورتني جدول ښیي چې:

1- بیانیه او د نقیض عکس یې (contra positive) سره معادل دي د یوې قضیې ثبوت د هغې له متناقصې جملې څخه ثبوتیږي.

2- د يو بيان عکس (Converse) او نقيض (Inverse) سره معادل دي.

مثال: عکس (Converse) او نقيض (Inverse) او د نقيض عکس (Contra Positive) بيانونه د لاندې شرطيه بيانونو لپاره وليکئ.

حل:

$\sim q \Rightarrow p = ?$

Conditional	converse	inverse	contra Positive
$\sim p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow p$
$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \Rightarrow q$
$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow q$

2مثال: د لاندې راکړل شوو بيانونو لپاره د صحت جدول جوړ کړئ.

حل:

$(p \Rightarrow -p) \vee (p \Rightarrow q) = ?$

1:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow \sim p) \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T

$(p \wedge \sim p) \Rightarrow q = ?$

2:

P	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$(p \wedge \sim p) \Rightarrow q$
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

$(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) = ?$

3:

P	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \wedge \sim q)$	$(p \wedge \sim q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	F

د پوښتنو ځوابونه:

1- د صحت د جدول په ترتيبولو سره وښاياست چې د $(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim p \vee q)$ بيان هر وخت سم دی، پام مو وي چې p او

p ~ یو له بله مستقل نه دي).

حل:

p	q	~p	$p \Rightarrow q$	pvq	~pvq	~(-pvq)	$(p \Rightarrow q)v \sim (\sim pvq)$
T	T	F	T	T	T	F	T
F	T	T	T	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T	F	T

2- د صحت د جدول په جوړولو سره وښایاست چې د $(p \Rightarrow q)$ او $\sim (pvq)$ بیانونو ارزښت سره مساوي دی که نه؟

حل:

p	q	$p \Rightarrow q$	pvq	~(pvq)
T	T	T	T	F
T	F	F	T	F
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

لیدل کیږي چې د $p \Rightarrow q$ او ~(pvq) بیانونه سره مساوي نه دي.

د څپرکي د پوښتنو ځوابونه:

1- ستاسو په نظر د لاندې بیانو څخه کوم یو یې سم دی؟

الف) په مشاهدوکې خطا د استقرایي طریقې له ستونزو څخه یوه ستونزه ده.

ب) د ریاضي د استدلال له قوي طریقو څخه یوه هم استقرایي طریقه ده.

ج) د ریاضي په استقرایي طریقې کې یوه ستونزه د مشاهدو کموالی دی.

د) الف او ج ځوابونه سم دي.

ځواب: (د)

2- له لاندې بیانو څخه کوم یو یې سم نه دی؟

استقرایي استدلال:

الف) د ریاضي له مسایلو څخه یوه قوي طریقه ده.

ب) د مسایلو په برخه کې موږ ته د عمومي قوانینو لارښوونه کوي.

ج) د مسایلو د حلولو لپاره له ریاضي پرته یوه طریقه ده.

د) د مسایلو د حلولو لپاره د ریاضي طریقه نه ده.

حل: (الف)

3- د شهودي درک په برخه کې له لاندې بیانو څخه کوم یو یې سم دی؟

الف) له شهود څخه په استفادې نتیجه سل په سلو کې سمه ده.

ب) له شهود څخه په استفادې په ډاډ سره نه شو ویلای چې نتیجه سل په سلو کې سمه ده.

ج) شهود د ریاضي د ښه درک کولو لپاره دی.

د) له شهود څخه په استفادې کولای شو، د ثبوت لپاره قطعي حدس (گمان) له حتمي استدلال سره وکړو.

حل: ځواب (ب)

4- له لاندې بیانو څخه کوم یو یې سم نه دی.

الف) استقرایي استدلال له جز څخه وکل ته رسیدل دي.

ب) استقرایي استدلال له کل څخه وجز ته رسیدل دي.

ج) له استقرایي استدلال څخه نه شو کولای چې د ریاضي د دقیق ثبوت لپاره گټه واخلو.

د) استقرایي استدلال د یو شمېر مشاهدو پر اساس یوه کلي نتیجه ده.

حل: (ب).

5- د استنتاجي استدلال پر اساس له لاندې بيانو څخه کوم يو يې سم نه دی؟

الف) که واوره اوري ځمکه نمجنه کيږي، ځمکه نمجنه ده، نو واوره وريدلې ده.

ب) د يوه ښوونځي ټول فارغان له کمپيوټر سره بلد او په رياضي ښه پوهيږي، ضمير چې له دې ښوونځی څخه فارغ شوي دی نو له کمپيوټر سره ښه بلد او په رياضي ښه پوهيږي.

ج) که يوه څلور ضلعي مربع وي، نو قطرونه يې يو پر بل عمود دي، که د څلور ضلعي قطرونه يو پر بل عمود وي، نو دا څلور ضلعي مربع ده.

د) که ديوه مثلث دوې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الساقين مثلث دی، او که د مثلث درې ضلعې سره مساوي وي متساوي الاضلاع مثلث دی، نو هر متساوي الاضلاع مثلث متساوي الساقين دی.

حل: (الف).

6- د قياسي استدلال په واسطه وښاياست چې د α هرې زاويې لپاره $Sin^2\alpha + Cos^2\alpha = 1$ ده.

حل: د فيثاغورث د قضيې په ا ساس په يوه قايم الزاويه مثلث کې د وتر مربع د قايمو ضلعو د مربعګانو له مجموعې سره مساوي ده څرنګه چې په مثلثاتي دايره کې دوې قايمې ضلعې د زاويې Sin او Cos دي او وتر له واحد سره مساوي دی، نو د α د هرې زاويې لپاره $Sin^2\propto+\cos^2\propto=1$ ده.

7- د استقرايي استدلال په واسطه وښاياست چې د n مسلسلو طاقو عددونو مجموعه له n^2 سره مساوي ده.

حل: ثبوتوو چې:

$$1+3+5+.........+(2n-1)=n^2$$

1- د $n=1$ لپاره سمه ده

2- که د $n=k$ لپاره فرض يې کړو چې سمه ده د $n=k+1$ لپاره يې ثبوتوو، نو لرو چې:

$$1+3+.........+(2k-1)+2(k+1)-1=(k+1)^2$$
$$\Rightarrow k^2+2(k+1)-1=k^2+2k+2-1=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

څرنګه چې د $n=k+1$ لپاره سمه ده، نو د هر طبيعي عدد n لپاره سمه ده.

8- د استقرايي استدلال سره وښاياست چې د هر طبيعي عدد n لپاره لاندې مساوات سم دی.

$$1+2+3+.......+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

حل: د $n=1$ لپاره لرو چې:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}\Rightarrow 1=1$$

نو د $n=1$ لپاره دا رابطه سمه ده.

د $n=k$ لپاره يې قبلوو او رابطه د $n=k+1$ لپاره ثبوتوو:

$$n=k+1 \qquad 1+2+3+..........+k+k+1=\frac{(k+1)[(K+1)+1]}{2}$$

$$\frac{k(k+1)}{2}+k+1=(k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right]=(k+1)\left[\frac{k+2}{2}\right]=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

څرنګه چې د $n=k+1$ لپاره سمه ده، نو د هر طبيعي عدد n لپاره سمه ده.

9- د استنتاجي استدلال په اساس ثبوت کړئ چې د دوو جفتو عددونو د جمعې حاصل هر وخت جفت عدد دی.

حل:

که $2k_1$ او $2k_2$ دوه جفت عددونه وي.

نو $2k_1+2k_2=2(k_1+k_2)$ چې يو جفت عدد دی

10- له يوه مثاله سره وښاياست چې د 2^n+3 افاده د n د هر طبيعي عدد لپاره لومړنی عدد نه دی.

حل: که $n=5$ وي $2^5+3=32+3=35$

چې 35 لومړنی عدد نه دی د هر طبيعي عدد د n لپاره 2^n+3 افاده هر وخت لومړنی عدد نه دی.

11- د غير مستقيم ثبوت د استدلال په واسطه وښاياست که n يو طبيعي عدد وي او n^2 طاق وي، نو n هم طاق دی.

حل: ددې پر ځای چې ثبوت کړو چې n طاق دی يا n نشي کېدای چې جفت وي، لومړی فرضوو چې n يو جفت عدد دی

نو: $n=2k$

چې k يو صحيح عدد دی، نو لرو چې:

$$n^2=4k^2 \Rightarrow n^2=(2k)^2$$

له دې څخه دا نتيجه ګيرو چې n^2 جفت دی چې له فرضيې سره په تناقض کې ده يا دا چې د فرضيې خلاف n طاق دی.

12- د (باران اوري او وريځ نشته، نو باران نه اوري) د ترکيبي بيان لپاره د صحت جدول جوړ کړئ په داسې حال کې چې

(α = باران اوري)، (β =وريځ ده) سره وښايو، د 1 عدد د سم او د 0 عدد د ناسم لپاره په کار يوسئ.

α	β	$-\alpha$	$-\beta$	$\alpha\vee-\beta$	$\alpha\wedge-\beta$	$\alpha\wedge-\alpha\Rightarrow-\alpha$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1